FILOZOFIA
Roč. 71, 2016, č. 9

INTUÍCIA V MATEMATIKE

RÓBERT MACO, Katedra filozofie a dejín filozofie, Filozofická fakulta UK, Bratislava, SR

MACO, R.: Intuition in Mathematics
FILOZOFIA 71, 2016, No. 9, pp. 746-758

In mathematics we witness a certain tension between intuitive and non-intuitive elements or between intuitive and rigorous approach. Some philosophizing mathematicians remind us of the intuitive as a necessary background of all productive mathematical work, while others prefer to steer clear of anything „merely intuitive“ since they view it as something leading us to mistakes and paradoxes. The aim of this paper is to point out the variety of the intuitive in mathematical praxis and appeal for its more adequate appreciation both in the didactics and philosophy of mathematics. As a sort of a preliminary semantical map we make use of Reuben Hersh's list of the distinctive usage of term „intuitive“ in contemporary mathematical discourse.

Keywords: Mathematics – Intuition – Intuitive – Rigorous – Visual – Mathematical experience

Hoci neexistuje žiadna všeobecne uznávaná definícia matematiky, existuje niekoľko atribútov, ktoré sa vynárajú pri väčšine pokusov o jej charakterizáciu. Často sa napr. hovorí, že matematika je *deduktívna* veda, ktorá sa zaoberá *abstraktnými* objektmi, ako sú čísla, funkcie, množiny, vektorové priestory a pod., a ktorá dospieva k *exaktným* poznatkom. *Deduktívnosť*, *abstraktnosť* a *exaktnosť* sú však – zdá sa – v priamom protiklade s tým, čo sa nám zvyčajne spája s pojmom intuície, resp. intuitívneho. Zatiaľ čo dedukcia je určitá postupnosť krokov, ktoré sa riadia presnými a explicitnými pravidlami, intuícia sa vníma ako akési bezprostredné uchopenie daného predmetu. Pokiaľ ide o abstraktnosť, intuitívne sa zdá byť práve opakom abstraktného, keďže sa nám spája skôr s niečím konkrétnym a názorným, s tým, čo je (ľahko) predstaviteľné. A nakoniec, v súvislosti s exaktnosťou máme tendenciu myslieť skôr na niečo, čo prekračuje čosi „len“ intuitívne, zatiaľ čo intuícia a intuitívne sa napriek svojej bezprostrednosti, konkrétnosti a názornosti akoby zdržiavajú v oblasti, ktorá má tak trochu rozmazané hranice, v oblasti toho, čo sa nedá úplne presne uzavrieť do nejakej statickej formy, napr. v podobe definície.

Aj z týchto dôvodov panuje v matematike istá nedôvera k intuícii a k intuitívnemu, ktorá v prípade niektorých matematikov a matematických zoskupení prerastá až do podoby otvoreného odmietania intuitívnych prístupov v matematike. Zaznievajú varovania, že intuícia v matematike je nielenže nedostatočná inštancia, ale dokonca že je vyslovene škodlivou stratégiou, ktorá nás vedie k naivnému prijímaniu toho, čo sa javí ako evidentné, bez toho, že by sme mali k dispozícii formálny dôkaz. Môže nás vraj ľahko zaviesť do labyrintu najrôznejších paradoxov či jednoducho chybných tvrdení. Existuje celá plejáda prípadov, ktoré sa v tejto súvislosti zvyknú uvádzať ako význačné historické príklady toho, keď jednotlivých matematikov zviedla intuícia zo správnej cesty a priviedla ich do najrôznejších problémov. Hneď po takýchto ukážkach nešťastných matematických prešľapov často nasleduje príbeh o tom, ako sa postupne odhalili hranice naivnej intuície a jej netušené úskalia a ako sa nakoniec našťastie veci dali do poriadku tým, že boli formulované presné definície, predložené rigorózne dôkazy a prípadne dodané formálne axiomatické základy pre danú oblasť matematiky.

Typickým príkladom takéhoto príbehu je príbeh pojmu množiny v matematike v druhej polovici 19. storočia a v prvých dekádach 20. storočia. Už dávno pred 19. storočím matematici rôznym spôsobom pracovali s tým, čo by sme dnes nazvali „množiny bodov", „číselné množiny", „množiny funkcií" a pod. Neexistovala však nijaká matematická disciplína, ktorá by niesla názov „teória množín". A teda, pochopiteľne, neexistovalo ani nijaké presnejšie vymedzenie toho, čo sa rôzne označovalo ako „súbor", „súhrn", „množina", „agregát", „komplex" atď. Bolo by však prehnané všeobecne vyhlásiť, že tieto a podobné výrazy sa používali „nepresne" alebo „vágne". Hoci to tak v niektorých konkrétnych prípadoch mohlo byť, všeobecná prax matematikov v tomto období by sa dala charakterizovať skôr tak, že tieto termíny boli používané „intuitívne", a to v kontextoch, v ktorých dávali zmysel všetkým zainteresovaným. Pokiaľ nespôsobovali problémy, nebol dôvod ich zexaktňovať, či nebodaj zavrhnúť. Keď potom neskôr – v 70-tych rokoch 19. storočia – začína vznikať „teória množín", vedie to postupne k potrebe presnejšie vymedziť, čo je, a čo nie je množina.

Keď sa pozrieme na prvé takéto pokusy, ktoré podnikli dvaja matematici, označovaní aj ako (spolu)tvorcovia teórie množín – Georg Cantor a Richard Dedekind –, vidíme, že ich prvotné vysvetlenia majú ďaleko od precíznosti, aká by sa očakávala v súčasnej matematike. Práve tieto ich „definície" sa často používajú ako príklady vymedzení, ktoré sú skôr intuitívne, čím sa v tomto kontexte v podstate myslí to, že hoci majú výhodu „ľahšej pochopiteľnosti a predstaviteľnosti", v striktnom zmysle slova sú nepresné a vágne. Cantor vo svojich prvých prácach, ktoré sa pokladajú za miesto zrodu teórie množín, vlastne žiadne vymedzenie pojmu množiny nepodáva. Prvé takéto pokusy z jeho strany prichádzajú až o niekoľko rokov neskôr, keď už aj pomocou svojho intuitívneho chápania množiny rozvinul svoju teóriu do úctyhodných rozmerov.

Ako teda vyzerali tieto intuitívne vymedzenia pojmu množiny, o ktorých neskorší autori píšu iba ako o definíciách v úvodzovkách? Tu nemáme priestor na podrobnejší rozbor, takže uvediem len niekoľko príkladov, aby sme si vedeli urobiť aspoň aký-taký obraz. Všeobecné vysvetlenie toho, čo rozumie pod „množinou", podáva Cantor v práci z roku 1883 *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (*Základy všeobecnej teórie množín*) , kde hovorí, že množina v jeho chápaní je „každá mnohosť (jedes Viele), ktorá sa dá chápať ako jedno (als Eines), t. j. každý súhrn určitých prvkov, ktorý možno pomocou nejakého zákona spojiť do jedného celku" (Cantor 1932, 204). Najčastejšie citovaná Cantorova definícia (alebo, ak chceme, „definícia") množiny sa objavuje až v diele z roku 1895 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (*Príspevky k založeniu transfinitnej teórie množín*), ktoré začína vetou: „Pod ‚množinou' rozumieme každé zhrnutie *M* určitých, dobre rozlíšených objektov *m* (ktoré sa nazývajú prvkami množiny *M*) nášho nazerania alebo myslenia do jedného celku" (Cantor 1932, 282). Na porovnanie: Dedekind hovorí vo svojej práci z roku 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*Čo sú a na čo sú čísla?*) v podobnom duchu, ibaže namiesto o „objektoch" hovorí o „veciach", namiesto *Zusammenfassung* (zhrnutie) používa (ako sloveso) nemecký termín s veľmi podobným významom *zusammenstellen* a namiesto cantorovského obľúbeného zvratu „do jedného celku" hovorí o spájaní vecí na základe „jedného spoločného hľadiska" (Dedekind 1932, 344).[1]

Predchádzajúcimi citátmi som v žiadnom prípade nechcel navodiť dojem, že Cantorove a Dedekindove intuitívne vysvetlenia sú principiálne nesprávne. Takýto záver by nebol spravodlivý už len preto, že som nezohľadnil širší kontext predložených definícií, na základe ktorého by sa postupne ukázalo, že tak Cantor, ako aj Dedekind boli oveľa sofistikovanejší, než sa to občas prezentuje pri uvádzaní spomenutých „definícií". Mojím cieľom bolo hlavne predstaviť ukážky toho, čo sa bude neskôr charakterizovať ako „intuitívne chápanie množiny" (alebo niekedy tiež „naivné chápanie množiny"). Na druhej strane, cantorovské a dedekindovské široké chápanie množín nepochybne malo svoje vážne problémy. Cantor si to podľa všetkého uvedomil ešte v priebehu 90-tych rokov, t. j. dávno predtým, než sa matematickou komunitou s plnou silou prehnal postrach russellovských a iných paradoxov. Pokiaľ ide o Dedekinda, jeho spomínaná práca na niektorých miestach veľmi zreteľne evokuje problémy, ktoré sa objavili neskôr (presnejšie povedané, zreteľne ich evokuje, pokiaľ má človek výhodu historickej retrospektívy). Napríklad teoréma č. 66 tohto spisu tvrdí, že „existujú nekonečné systémy (množiny)" (Dedekind 1932, 357). Dedekind je presvedčený, že túto vetu môže striktne matematicky dokázať, pričom jeho dôkaz (súčasní autori by opäť dodali úvodzovky) spočíva v dôkaze, že „súhrn všetkých vecí, ktoré môžu byť predmetom môjho myslenia, je nekonečný" (Dedekind 1932, 357). Okrem viacerých iných problematických aspektov tohto konkrétneho dôkazu, ktoré tu nebudem uvádzať, nám (poučeným Russellom a ďalšími) okamžite musia napadnúť otázky typu: Čo to vlastne znamená, že niečo môže byť predmetom môjho myslenia? Ako je to v prípade russellovskej množiny?

Zmienka o Dedekindovom pokuse o dôkaz existencie nekonečnej množiny nás môže plynulo priviesť k ďalšiemu často uvádzanému príkladu intuitívneho chápania matematického pojmu. Ide o pojem nekonečna a o porovnávanie rôznych nekonečien. Ako je známe, pojem nekonečna bol ústrednou témou pri zrode cantorovskej a dedekindovskej teórie množín. Preto je pochopiteľné, že téma intuitívneho chápania množín je silne previazaná s intuitívnym chápaním nekonečna. S pojmom nekonečna vystupujú na povrch osobitne niektoré zvláštnosti, ktoré stavajú do ostrého kontrastu to, čo je intuitívne, s tým, čo je prísne definované a rigorózne dokazované. Klasickým príkladom je časté varovanie pred nebezpečenstvom zavádzajúcej intuície, ktorá je vraj práve vo veci nekonečných súborov osobitne náchylná na hlboké omyly. Konkrétny a notoricky známy príklad je

[1] Dedekindovmu chápaniu množín som sa bližšie venoval v článku (Maco 2010) v súvislosti s jeho komparáciou s jednou novokantovskou koncepciou. Čitateľsky veľmi prístupný úvod do elementárnej teórie množín možno nájsť v knižke (Bukovský 1979).

vzťah medzi nekonečnosťou napr. množiny všetkých prirodzených čísel {1, 2, 3 ....} a, povedzme, množiny všetkých párnych prirodzených čísel.[2] Poučenie o nespoľahlivosti, ktoré si máme z tohto prípadu vziať, spočíva v tom, že euklidovská axióma „Celok je väčší než jeho časť" napriek jej intuitívnej evidentnosti v tomto prípade neplatí. Obidve spomenuté množiny, hoci jedna je vlastnou podmnožinou druhej (teda jej „časťou"), sú rovnako veľké alebo, povedané terminológiou teórie množín, majú tú istú mohutnosť (či kardinalitu), konkrétne mohutnosť tzv. spočítateľnej množiny. A hneď za tým nasledujú v rýchlom slede ďalšie neintuitívne alebo kontraintuitívne tézy: Všetkých zlomkov je rovnako veľa ako všetkých prvočísel. Iracionálnych čísel je „oveľa viac" než racionálnych. Transcendentných čísel je viac než algebraických. Ku každej nekonečnej množine existuje množina, ktorá je ešte väčšia atď.

Je nepochybné, že teória množín je mimoriadne úspešná matematická disciplína, ktorá po mnohých stránkach obohatila matematiku, a to nielen pridaním nových matematických metód a viet, ale aj prepojením, ktoré vytvorila medzi dovtedy existujúcimi oblasťami matematiky. A tak ako v iných matematických (a, samozrejme, aj nematematických) disciplínach, niektoré výsledky, ku ktorým sa vedci v tejto oblasti dopracovali, boli aj pre nich samých prekvapivé; či už preto, že boli v rozpore s ich intuitívnymi očakávaniami, alebo preto, lebo išlo o niečo, o čom žiadne predchádzajúce očakávania ani nemali (napr. objavenie nejakej zaujímavej interdisciplinárnej súvislosti). Mali by sme byť však opatrní, pokiaľ ide o opis a hodnotenie zrážok s intuíciou. Často je veľmi lákavé prezentovať situáciu asi takto: Doposiaľ sme si na základe našej (naivnej) intuície mysleli, že axióma „Celok je väčší než jeho časť" platí všeobecne, no teória množín dokázala, že to tak nie je. Alebo: Doteraz sme boli na základe nášho intuitívneho chápania nekonečných súborov presvedčení, že jedno nekonečno nemôže byť väčšie alebo menšie než iné, no teória transfinitných kardinálnych čísel dokázala opak. Našu prirodzenú intuíciu teda musíme buď poopraviť, alebo – ak sa to nedá – aspoň musíme dávať pozor, aby nás neovplyvňovala pri formulovaní exaktných dôkazov.

Na takomto chápaní intuície je zavádzajúce to, že takto prehliadame významné konceptuálne posuny, ktoré nastali zavedením jazyka a spôsobu myslenia cantorovskej teórie množín. Aby som lepšie vysvetlil, čo mám na mysli, použijem analógiu: Predstavme si človeka neznalého modernej astronómie, ktorý chápe hviezdy iba ako malé svietiace (a občas blikajúce) bodky na oblohe. Takémuto človeku by sme postupne mohli vysvetliť, že ich malý viditeľný rozmer je spôsobený obrovskou vzdialenosťou, že v skutočnosti ide o plazmové gule, ktoré môžu mať stámilióny kilometrov v priemere atď. Zdá sa, že v tomto prípade by bolo celkom oprávnené povedať, že spomenutý človek mal na začiatku veľmi

[2] Rôzne paradoxy a protirečenia súvisiace s nekonečnými súbormi sa objavovali už v antických a stredovekých prácach. Ako *locus classicus* možno v novoveku označiť Galileiho pasáž v *Rozpravách a matematických dôkazoch o dvoch nových odvetviach vedy* (1639), v ktorej si kladie otázku porovnania množstva všetkých prirodzených čísel a množstva ich druhých mocnín. Jedno z najpozoruhodnejších diel, ktoré boli na túto tému napísané ešte pred vznikom (cantorovskej) teórie množín, je práca B. Bolzana *Paradoxien de Unendlichen* (*Paradoxy nekonečna*), pôvodne vydaná v 1851 (Bolzano 1963).

neadekvátnu predstavu o hviezdach. Môžeme však povedať, že sa mýlil, aj keď dotyčný nemal náš *pojem* hviezdy, a teda keď hovoril o spomenutých útvaroch, nevyjadroval sa o hviezdach v našom zmysle? Napriek tomu môžeme povedať, že sa mýlil, pokiaľ ho jeho pojem hviezdy, nech už bol akýkoľvek, viedol k presvedčeniu (alebo k inferencii), že pokiaľ by mal o niečo dlhší rebrík, mohol by sa k tým svietiacim bodkám priblížiť na dosah ruky.

Ako je to v prípade „chybnej intuície", pokiaľ ide o nekonečno? Povedal by som, že v tomto prípade nespočíva omyl v tom, že naše intuitívne chápanie nekonečna nám ukazuje akoby len parciálnu a skreslenú javovú stránku nekonečna. Ide skôr o to, že sme si zatiaľ neosvojili ten pojem nekonečna, ktorý je relevantný v (cantorovskej) teórii množín. A čo to znamená osvojiť si nový pojem nekonečna, presnejšie, nekonečnej množiny? Znamená to naučiť sa používať v kontexte danej teórie výrazy ako „nekonečný", „nekonečnosť" novým spôsobom. Znamená to napr. osvojiť si dedekindovskú definíciu nekonečnej množiny: Množina je nekonečná práve vtedy, ak existuje aspoň jedna bijekcia, ktorá ju zobrazí na niektorú z jej vlastných podmnožín. Ako je zjavné, to predpokladá, že sú nám už známe významy takých kľúčových termínov, ako sú „zobrazenie", „podmnožina", a mnohých ďalších. Pointa je v tom, že situáciu by sme si nemali predstavovať tak, že naša pôvodná intuícia nám nahovárala akúsi parciálnu a skreslenú podobu nekonečna, akési nekonečno videné len z jedného uhla, zatiaľ čo následné poučenie, ktoré sme získali z teórie množín, nám konečne predstavuje nekonečno v jeho „reálnejšej" podobe.

V určitom zmysle by sme mohli dokonca povedať, že naša pôvodná (predteoretická) intuícia o nekonečne bola a je úplne v poriadku. To, samozrejme, neznamená, že z matematického hľadiska je jedno, či zostaneme len pri takomto chápaní nekonečna. Matematická skúsenosť nazhromaždená za posledných zhruba 150 rokov nám ukazuje množstvo dobrých dôvodov, prečo prijať dedekindovskú (alebo nejakú ekvivalentnú) definíciu nekonečnej množiny. Dôležité je len to, aby sme si pri tom uvedomovali, že touto akceptáciou zavádzame do svojho jazyka nové pravidlá, rozširujeme staré slová o nové významy; nejde o to, že by sme nekonečno predtým videli len takpovediac z profilu (čiastočne), a teraz už zo všetkých jeho strán.

V predchádzajúcich riadkoch som načrtol len jeden či dva aspekty používania intuície v matematike. Cieľom bolo na týchto dvoch veľmi obmedzených príkladoch naznačiť, že intuícia a intuitívne prvky v matematike nepredstavujú nič, čo by bolo a priori a za každých okolností škodlivé, no zároveň aj to, že ich výskyt nemusí byť nevinný, ich prítomnosť môže spôsobovať v tom lepšom prípade rozmanité problémy v komunikácii, v tom horšom hlboké problémy s koherentnosťou, alebo dokonca s konzistentnosťou našich presvedčení. Intuícia a intuitívne však zohrávajú v matematike oveľa zásadnejšiu úlohu, než to naznačujú predchádzajúce príklady. Oplatí sa urobiť si širší prehľad o typoch intuície, ktoré sa v matematike vyskytujú.

Na tomto mieste by však mohol čitateľ celkom oprávnene nadobudnúť pochybnosti o realizovateľnosti takéhoto zámeru. Ako máme vyhľadávať prípady a typy intuície v matematike, keď ešte stále presne nevieme, čo to intuícia je? Ako si potom môžeme byť istí, že to, čo sa nám predloží ako opis výskytu rôznych druhov intuícií v matematike, nebude čosi pozliepané z heterogénnych častí? Takéto skeptické obavy sú celkom namieste, a to tým skôr, že z mojej strany doposiaľ nezaznel žiadny explicitný návrh na definíciu intuície.

Nemali by sme tu však očakávať nemožné. Slovo „intuícia", resp. „intuitívny" – podobne ako takmer všetky slová bežného jazyka – nemá definíciu v tom zmysle slova, v akom ju má napr. slovo „prvočíslo" v kontexte teórie čísel. A výraz „prvočíslo" má svoj presne stanovený význam (svoju definíciu) práve preto, že ho niekto „stanovil" (a my ostatní toto stanovenie z rôznych dôvodov akceptujeme a utvrdzujeme ho svojím používaním tohto slova v danom význame). Najlepšou stratégiou je podľa mojej mienky uzemniť diskusiu na túto tému tým, že namiesto „definície" intuície sa zameriame na to, akým rozličným spôsobom sami matematici vo svojich textoch a rozhovoroch používajú termíny ako „intuícia" a „intuitívny" na charakterizovanie svojich skúseností, postrehov, schopností, viet, dôkazov, teórií, didaktických a heuristických prístupov a pod. V nasledujúcej časti by som chcel využiť prácu jedného zo súčasných matematikov, ktorý sa vo svojom filozoficky orientovanom diele podujal vytvoriť klasifikáciu rôznych typov intuície v matematike. Na jeho počine je z môjho hľadiska sympatické to, že predtým, než sa dostane k formulovaniu všeobecných filozofických téz o povahe matematickej intuície, najskôr registruje, opisuje a komentuje typy kontextov, v ktorých majú matematici tendenciu prinášať do hry termíny ako „intuícia", „intuitívny" alebo „intuitívne".

Autor, ktorého mám na mysli, je americký matematik Reuben Hersh (nar. 1929). Hersh sa v rámci svojej matematickej kariéry venoval predovšetkým štúdiu diferenciálnych rovníc, no od konca 70-tych rokov 20. storočia sa jeho pozornosť začala čoraz viac upriamovať na filozofické a didaktické otázky matematiky. Prvým významným produktom jeho myslenia na tomto poli bolo príznačne pomenované dielo *The Mathematical Experience* (1981), ktoré napísal spolu s ďalším americkým matematikom Philipom J. Davisom.

Hershov celkový filozofický pohľad na matematiku je zaujímavý aj sám osebe, ale keďže na tomto mieste niet priestoru na to, aby som ho podrobnejšie predstavoval, obmedzím sa len na niekoľko poznámok, ktoré by mohli čitateľovi naznačiť, z akého uhla sa Hersh pozerá na problém intuície v matematike a prečo je pre neho táto téma zaujímavá.

Podľa Hersha je filozofia matematiky internou súčasťou výbavy profesionálneho matematika, je to súbor filozofických postojov, ktoré zaujíma ku svojmu predmetu a ktoré mu majú pomáhať pri pestovaní matematiky. K tomu patrí aj odstraňovanie istých filozofických predsudkov a deformácií, ktoré sa podľa Hersha usadili v súčasnej matematike. Hersh nás nabáda, aby sme opustili teoretizovanie, ktoré je odtrhnuté od reálnej „matematickej skúsenosti". Jeho najčastejšími terčmi sú formalizmus a platonizmus ako dva vyhrotene protikladné filozofické smery. Ani jeden z nich podľa neho nezodpovedá reálnej skúsenosti s matematikou: formalizmus neguje obsahovú, intuitívnu a aplikovanú stránku matematiky, zatiaľ čo platonizmus „postuluje mytologickú rozprávkovú ríšu" matematických objektov (Hersch, 1979, 39). Oproti tomu stavia Hersh svoj pohľad na matematiku, ktorý možno zhrnúť do troch bodov: 1. matematické objekty vynachádzajú alebo tvoria ľudia; 2. nie sú však tvorené arbitrárne, ale na základe skúsenosti s už existujúcimi matematickými objektmi a podľa potrieb vedy a bežného života; 3. keď už sú vytvorené, matematické objekty majú dobre určené vlastnosti, ktoré môže byť ťažké objaviť, no ktoré vlastnia nezávisle od nášho poznania (Hersh 1979, 40).

Pokiaľ ide o intuíciu a intuitívne prvky v matematike, Hersh je veľkým zástancom rehabilitácie intuície vo filozofii matematiky. Intuitívne prvky sú podľa neho v matematike doslova všadeprítomné. „Keďže intuícia je esenciálnou časťou matematiky, žiadna adekvátna filozofia matematiky ju nemôže ignorovať" (Hersh 1997, 61).

Čo je teda vlastne tá intuícia, o ktorej tu stále hovoríme? Tu prichádza na rad sľúbená Hershova klasifikácia, ktorá je v podstate zoznamom rôznych významov tohto slova, používaných v matematike. Keďže Hershov zoznam pokladám za výstižný a osvetľujúci, použijem ho ako kostru nasledujúcich komentárov.[3]

1. *Intuitívne* ako opak *rigorózneho*. Prvým významom slova „intuitívny" v matematike je jeho chápanie ako protikladu k „rigoróznemu". V tomto ohľade sa ako kontrastné termíny k „intutitívnemu" často používajú aj výrazy ako „striktný", „prísny", a niekedy dokonca aj „formálny" alebo „deduktívny". Keďže Hersh na tomto mieste neuvádza nijaký konkrétny príklad, pripomeniem aspoň jeden z najznámejších a najpretriasanejších vo filozofickej literatúre o matematike. Prvá polovica 19. storočia sa často označuje ako obdobie „rigorizácie kalkulu", t. j. obdobie, v ktorom boli formulované exaktné definície takých kľúčových pojmov diferenciálneho a integrálneho počtu, ako sú derivácia, spojitosť, integrál. Ako sa ukázalo, základom týchto i ďalších pojmov je pojem limity. Uvažujme napr. nekonečnú postupnosť zlomkov 1/2, 2/3, 3/4, ... Všeobecný člen tejto postupnosti sa dá vyjadriť ako $\frac{n}{n+1}$. Intuitívne je zrejmé, že čím väčšie n zoberieme, tým bližšie bude daný člen k číslu 1 (no pre žiadne prirodzené číslo n sa nebude rovnať jednotke). Dajme tomu, že by sme teraz chceli povedať, že táto postupnosť má istú hranicu, ku ktorej sa jej členy donekonečna blížia na ľubovoľne krátku vzdialenosť. Otázka teda znie takto: Čo to presne znamená, že jednotlivé členy sa „blížia" k 1? Rigorizácia v tomto prípade znamená, že intuitívne výrazy z bežného jazyka, ako je „blíženie sa", sa nahradia presným matematicko-logickými výrazmi, ktoré obsahujú iba logické a matematické znaky (kvantifikátory, premenné, logické spojky, množinové znaky, znaky pre matematické operácie a vzťahy).

Je zaujímavé vypočuť si, čo k tomuto prvému významu „intuitívneho" hovorí Hersh. Hersh k nemu totiž zaujíma istý odstup: „Tento spôsob používania nie je úplne jasný, pretože nikdy nie je uvedený presný význam ‚rigorózneho'" (Hersh 1997, 61). Mohli by sme teda povedať, že je tu v hre istá irónia: tí, ktorí by chceli pomocou tejto dichotómie

[3] Predtým, než som narazil na Hershovu knihu, mal som vytvorenú svoju vlastnú pracovnú verziu zoznamu rozličných významov slov „intuícia" a „intuitívny" v matematických textoch. Hershovej klasifikácii som dal nakoniec prednosť z dvoch hlavných dôvodov: Po prvé, napriek tomu, že moje a jeho zistenia sa z veľkej časti prekrývajú, jeho zoznam obsahuje navyše dve či tri ďalšie dištinkcie, ktoré pokladám za hodné pozornosti. A po druhé, Hersh ako matematik s dlhoročnou praxou pestovania i vyučovania matematiky mohol čerpať nielen z publikovanej matematickej literatúry, ale aj z každodennej matematickej praxe vrátane neformálnych rozhovorov, seminárov a pod. Jeho sémantické postrehy sa mi teda zdajú ako lepšia voľba, prinajmenšom ako východisko ďalších diskusií a skúmaní na túto tému.

zľahčovať *intuitívne*, robia to (podľa Hersha) pomocou pojmu, ktorý sám nie je definovaný rigorózne, ale opäť skôr intuitívne.

Je takáto kritika oprávnená? Myslím si, že skôr nie je. Pojmové rozlíšenie môže byť jasné aj bez toho, aby bolo *absolútne* presné. A nakoniec, termín „rigorózny" nie je matematický pojem, je to skôr nástroj, ktorý používame pri reflexii matematickej praxe. To, samozrejme, neznamená, že by nemal byť čo najjasnejší. Aby však bol použiteľný a užitočný, nemusí byť definovaný pre všetky možné (mysliteľné prípady). A to, či je dostatočne jasný na to, aby bol užitočný, možno zistiť iba na základe jeho konkrétnych aplikácií, napr. v jednotlivých matematických textoch. Keďže Hersh neuvádza žiadne konkrétne príklady zlyhania tejto dištinkcie, jeho všeobecnú námietku nemožno pokladať za adekvátnu. Okrem toho ľahko možno uviesť príklady textov, kde sa táto dištinkcia pomerne často používa a kde dáva dobrý zmysel a nespôsobuje nejasnosti. Napr. Terence Tao vo svojej učebnici reálnej analýzy od začiatku avizuje, že bude klásť dôraz na rigoróznosť (v protiklade k intuitívnosti). Myslím, že každý, kto jeho knihu číta, čoskoro pochopí, čo to znamená, a to aj napriek tomu, že Tao nikde explicitne nedefinuje, čo myslí pod „rigoróznosťou". Typická (a celkom zábavná) pasáž z jeho knihy to dobre dokumentuje: Pri výklade systému prirodzených čísel Tao po uvedení *prvých troch* Peanových axióm zaraďuje dôkaz nasledujúcej vety: $4 \neq 0$. Skôr, než predloží dôkaz, upozorňuje čitateľa: „Nesmejte sa! Na základe toho, ako sme definovali 4 ... nie je nevyhnutne a priori pravda, že toto číslo nie je totožné s nulou, aj keď je to ‚zrejmé'" (Tao 2006, 20). Jednoducho povedané, rigoróznosť spočíva v tom, že namiesto opierania sa o to, čo je intuitívne zrejmé, opierame svoje závery iba o explicitne uvedené axiómy.

2. *Intuitívne* ako *vizuálne*. Intuitívne v tomto zmysle znamená to, čo vieme znázorniť alebo čo si vieme predstaviť.[4] V tomto prípade Hersh opozitum k intuitívnemu neuvádza (žiada sa tu zrejme slovo „abstraktný", resp. „symbolický"). Naopak, tak trochu prekvapivo uvádza aj v tomto bode porovnanie s rigoróznym: upozorňuje, že intuitívne *qua* vizuálne (napr. intuitívna geometria alebo topológia) je na rozdiel od rigorózneho bohatšie o význam, pod čím myslí priestorový útvar, na ktorý daný matematický výraz referuje. Ako vidno, *rigorózne* v tomto kontexte chápe v zmysle *„formálne"*. Na druhej strane však poukazuje na potenciálne nebezpečné aspekty intuitívneho – vizualizácia môže niekedy zavádzať. Asi jedným z najelementárnejších príkladov tohto druhu je situácia, keď vlastnosť nájdenú na znázornenom geometrickom útvare unáhlene zovšeobecníme, pričom si neuvedomíme, že sme predtým pri jej dôkaze na obrázku použili inú vlastnosť, ktorú nemajú všetky útvary tohto druhu (napr. nelegitímna generalizácia z ostrouhlého trojuholníka, ktorý si pri dôkaze predstavujeme, na všetky trojuholníky).

Pre matematiku je charakteristický prechod od intuitívneho v zmysle názorného

[4] V našom predchádzajúcom príklade s postupnosťou (n/n+1) by sme si mohli znázorniť (vizualizovať) túto postupnosť ako rad bodov v karteziánskej súradnicovej sústave, kde na x-ovú os nanášame jednotlivé n a kde jednotlivé body majú súradnice (n, n/n+1), pričom s narastajúcim n sa čoraz viac približujú k priamke, ktorá je rovnobežná s x-ovou osou a je od nej vzdialená o jednotku.

k nenázornému, a to nielen v zmysle „ťažko názorne predstaviteľného“, ale tiež vo význame „principiálne neznázorniteľného“. Od ľahko prístupných elementárnych útvarov, ako sú úsečky, kružnice, uhly, vedie proces rozširovania a zovšeobecňovania napr. k zložitejším krivkám, ktoré síce ešte stále môžu byť prístupné našej geometrickej intuícii (i keď často len za cenu značnej mentálnej námahy), no presné vlastnosti ktorých už nie sú odčítateľné z ich vizualizácie, ale musíme sa k nim dopracovať cestou symbolických manipulácií (napr. riešením rovníc). Ďalší stupeň generalizácie nám zoberie spod nôh aj poslednú intuitívnu pôdu (napr. prechod do viac než trojdimenzionálnych priestorov), takže nám zostanú už len analytické nástroje.[5]

Netreba však prehliadnuť, že v matematike existuje aj opačný pohyb – od toho, čo bolo na začiatku abstraktné, od produktov symbolických manipulácií, smerom k názornému. Jednoduchým príkladom sú komplexné čísla, ktoré až dodatočne dostali názornú reprezentáciu v podobe bodov v komplexnej rovine alebo, ešte lepšie, v podobe vektorov. Významné je pritom to, že toto znázornenie pôvodne nenázorného neplní len funkciu pomôcky ad hoc slúžiacej našej predstavivosti, ale prináša so sebou novú dimenziu porozumenia takým operáciám, ako je sčítavanie a násobenie komplexných čísel.

3. *Intuitívne* ako *plauzibilné*. Pod plauzibilným sa tu myslí to, čo pôsobí vierohodne alebo presvedčivo aj bez dôkazu. Hersh tu nemá na mysli nejaké elementárne matematické vety, ktoré vnímame ako správne na prvý pohľad (napr. 1 = 1), ale skôr vety, ktoré vyjadrujú isté matematické domnienky (hypotézy), ku ktorým ešte nebol zostrojený (striktný) dôkaz, no napriek tomu na matematika pôsobia tak, že by mali platiť. Tento typ intuitívnej plauzibilnosti je pre produktívneho matematika strategicky veľmi dôležitý. Slúži totiž ako určité vodidlo vo vzťahu k tomu, čo sa oplatí začať dokazovať. Inými slovami, je to jedna stránka procesu pri výbere dobrého matematického problému. Okrem toho, že problém by mal byť užitočný v tom zmysle, že jeho vyriešenie v niečom zaváži, je veľmi výhodné, ak daný problém má túto črtu – že sa takpovediac ponúka na nájdenie rigorózneho dôkazu.

Vedieť odhadnúť, ktoré matematické domnienky sú plauzibilné, je súčasťou schopnosti tých matematikov, o ktorých sa hovorí, že majú výbornú intuíciu v danej oblasti. Intuícia v tomto zmysle nie je nevyhnutne spojená s vizualizáciou, názornosťou či priestorovou predstavivosťou. Nielen psychológov a kognitívnych vedcov ale aj niektorých matematikov zaujímajú v tomto kontexte otázky typu: Ako sa buduje intuícia v danej oblasti? Je to iba záležitosť mnohých skúseností a dôkladnej praktickej oboznámenosti s danou problematikou, alebo je potrebné niečo oveľa viac? Dá sa intuícia naučiť, alebo je to „vrodená“ schopnosť? Ak zohrávajú svoju rolu obidva faktory, aké je potom ich zastúpenie? Je možné byť expertom v danej oblasti, a pritom nemať dobrú intuíciu alebo mať intuíciu iba veľmi slabú (veľmi omylnú)?

---

[5] Na špecifické charakteristiky matematických symbolov zaujímavým spôsobom poukazuje L. Kvasz vo svojom článku (Kvasz 2015), a to odlíšením ich funkcie a významu od roly šachových figúrok na pozadí dejín matematiky.

4. *Intuitívne* ako *neúplné*. V tomto prípade ide jednoznačne o negatívne chápanie intuitívneho – v týchto prípadoch sa často k tomuto adjektívu pridáva (alebo primýšľa) častica „iba“: napr. sa hovorí, že „tento argument je iba intuitívny“. Príkladom je situácia, keď pri práci s nejakou funkciou použijeme jej rozvoj do nekonečného radu, pričom nemáme k dispozícii dôkaz o konvergencii daného radu. V tomto prípade je zaujímavé všimnúť si istú terminologickú dvojznačnosť: na jednej strane sa niekedy matematikovi, ktorý postupuje uvedeným spôsobom, povie, že postupuje „iba intuitívne“, no rovnako bežné je v takýchto prípadoch komentovať situáciu tak, že ide o „čisto formálny“ postup. Z prechádzajúcich spôsobov používania výrazov „intuitívny“ a „formálny“ by sa zdalo, že ide o opačné póly. Tento obraz však dokumentuje, že spôsoby používania týchto slov sú oveľa spletitejšie, než by sa mohlo zdať na prvý pohľad.

5. *Intuitívne* ako založené na nejakom nematematickom (napr. fyzikálnom) modeli. Výborným príkladom takto chápaného „intuitívneho“ je kniha Morrisa Klina (Kline 1998), ktorej pointa je v tom, že vysvetľuje základy diferenciálneho a integrálneho počtu pomocou hojného počtu fyzikálnych a iných modelov. Najznámejším a najpoužívanejším príkladom v tomto kontexte je chápanie derivácie funkcie ako okamžitej rýchlosti. Kline však svojou knihou a tiež niektorými ďalšími svojimi prácami chce povedať nielen to, že „intuitívny a fyzikálny prístup“ (to je podtitul Klinovej knihy) je didakticky vhodnejší než prístup abstraktný a formálny, ale tiež to, že prílišný dôraz na neintuitívny axiomatický prístup dezinterpretuje povahu matematiky ako takej. Podrobnejšie informácie nájde čitateľ v jeho polemickom článku (Kline 1970).

V tejto súvislosti už len dodám, že plodnosť fyzikálnej intuície, dokonca aj pokiaľ ide o čistú matematiku, sa osvedčuje aj v súčasnosti, napr. v kontexte kvantovej teórie poľa, z ktorej vyšli viaceré významné prínosné matematické idey (napr. v topológii a algebraickej geometrii).

6. *Intuitívne* ako *holistické*. Pod „holistickým“ alebo „integrujúcim“ prístupom v matematike má Hersh na mysli prístup, ktorý sa necháva viesť inštinktívnym presvedčením, že matematika predstavuje koherentný systém a na základe toho dospieva k vhľadom, ktoré nie sú detailne analyticky zdôvodnené v každom jednotlivom kroku, ale napriek tomu poskytujú presvedčivý pohľad na danú oblasť alebo teóriu ako celok, zatiaľ čo podrobnému analytickému pohľadu postupujúcemu štýlom *krok za krokom* môžu v spletitosti jednotlivých dedukcií unikať práve dôležité hlavné kontúry.

Predpokladám, že ľudia, ktorí sa intenzívne venujú matematike – či už ako profesionálni, alebo ako amatérski matematici –, v zásade nebudú mať problém súhlasiť s Hershovou sumarizáciou intuitívneho v matematike. Ak by padali nejaké námietky, zrejme by sa týkali skôr detailov, napr. otázky, či je na adekvátny opis potrebných všetkých šesť skupín, či sa niektoré neprekrývajú natoľko, že by sa dali zlúčiť do jednej. Okrem toho by však mohla zaznieť aj otázka, či by v niektorých prípadoch nebolo pre niektoré typy matematických skúseností výstižnejšie použiť iné označenie než práve *intuícia* (niektorí autori uprednostňujú napr. výraz „matematický inštinkt“ a pod.).[6]

Závažnejší problém by však vznikol vtedy, keby niekto pri pohľade na Hershovu pestrú paletu intuitívneho v matematike zauvažoval, či má vôbec zmysel pomenovávať také rôzne fenomény spoločným termínom, teda či „intuícia“ a „intuitívne“ majú v týchto kontextoch (ak sa zoberú ako celok) ešte stále dostatočný sémantický obsah, aby ponúkali niečo informatívne. Na takto formulovanú výhradu by som chcel zareagovať tromi záverečnými poznámkami, ktoré v mojich očiach nielen že formálne ospravedlňujú tento prístup, ale dodávajú mu aj istú potenciálne praktickú relevanciu.

Po prvé, netreba zabúdať, čo bolo prvotným cieľom navrhnutej klasifikácie „intuitívneho“ v matematike. Hersh sa podľa vlastných slov pokúsil zachytiť spôsoby, ako sa v súčasnej matematike (v matematických diskurzoch a v matematických textoch) používajú výrazy ako „intuitívny“, „intuícia“, „intuitívne vzaté“, „intuitívne zrejmé“ a pod. Ak by sa teda aj ukázalo, že týmito slovami sa zvyknú označovať veľmi heterogénne fenomény, situácie a skúsenosti, stále by mohol existovať dobrý dôvod urobiť výpočet týchto rôznych spôsobov použitia. Okrem toho treba povedať, že Hersh si veľmi dobre uvedomuje, a explicitne to aj pripomína, že všetky ním zachytené významy „intuitívneho“ v matematike sú pomerne vágne, premenlivé a silne závislé od konkrétnych kontextov.

Po druhé, podľa mňa sa okrem predchádzajúcej trochu vyhýbavej obrany dá povedať aj viac. Pokiaľ to vidím správne, v používaní výrazov ako „intuícia“ a „intuitívny“ v matematike sa dajú identifikovať dve sémantické ohniská, okolo ktorých sa točí veľká väčšina jednotlivých použití. Tým prvým je binárna opozícia intuitívne/rigorózne a tým druhým je kontrast medzi intuitívnym a nenázorným. V tom prvom prípade sa výrazy ako „intuitívny“ a jeho varianty núkajú všade tam, kde ide o poukázanie na situácie a faktory, ktoré nie sú definované (či dokonca definovateľné) pomocou explicitne uvedených, exaktných a jednoznačne objektívnych (intersubjektívnych) pravidiel. Použitie slov „intuícia“ či „intuitívny“ v takýchto kontextoch však má vyjadriť, alebo aspoň naznačiť, že napriek absencii presných pravidiel a algoritmických procedúr sa tu nepohybujeme vo vákuu, ale opierame sa o nejaký iný zdroj, ktorý je takpovediac z princípu ťažko uchopiteľný. Tento zdroj, z ktorého tu ťažíme, môže byť na jednej strane akoby implicitným „spoločným majetkom“ ľudí, pretože bol nadobudnutý v neustálych konfrontáciách s realitou (manipulácia s bežnými predmetmi, symbolická manipulácia so znakmi, priestorová orientácia atď.), alebo to môže byť zdroj, ktorý je vlastný danému jednotlivcovi na základe jeho opakovaných skúseností s určitou (matematickou) praxou a na náklade jeho vrodených dispozícií. Keďže orientácia na základe nášho zmyslového vnímania (osobitne vizuálna a kinestetická) tiež tvorí takýto spoločný zdroj, ktorý nie je vyčerpávajúco opísateľný pojmami, je pochopiteľné, že intuitívne ako nerigorózne sa terminologicky často

[6] Samozrejme, oveľa výraznejšie rozdiely by sa dali očakávať, ak by sme uvažovali o reakciách jednotlivých matematikov na filozofické závery, ktoré Hersh zo svojej koncepcie vyvodzuje. Ako som naznačil už vyššie, Hersh má veľmi silnú „filozofickú agendu“: presadiť „humanistický pohľad“ na matematiku v kontrapozícii k tradičným filozofickým prístupom. Túto stránku jeho práce som však zámerne ponechal bokom.

kríži s intuitívnym ako názorným, percepčne prístupným.

Predstavuje však toto všetko dostatočný dôvod na to, aby sme sa systematicky zaoberali intuitívnymi prvkami v matematike? Vo svojej poslednej, tretej poznámke chcem poukázať na spomínaný (pozitívny) praktický dôsledok, ktorý by mohlo mať takéto nasmerovanie našej pozornosti.

Ako som spomenul v úvode tohto článku, medzi atribúty, ktoré sa často uvádzajú ako prvé, keď sa hovorí o matematike, patria atribúty *deduktívny*, *exaktný*, *abstraktný*, *formálny* a pod. Takéto apriórne nastavenie na vnímanie matematiky má často za následok doslova pohromu z didaktického hľadiska. Matematika vnímaná ako súbor abstraktných poučiek, spletitých deduktívnych dôkazov vyvodzovaných z prvých princípov (na prijatie ktorých sa neuvádza nijaká primeraná motivácia) a mechanických procedúr, ktoré nie sú zasadené do zmysluplného kontextu, je tým, čo „spoľahlivo" odradí a odpudí už v pomerne ranom veku veľkú časť populácie. Takáto situácia je podľa môjho názoru osobitne alarmujúca v kontexte vytvárania, či dokonca prehlbovania priepasti medzi humanitými, resp. spoločenskovedne orientovanými odbormi a disciplínami orientovanými technicky, matematicky a prírodovedne. Ľuďom, ktorí nedokázali prekonať bariéru abstraktnosti, formálnosti a exaktnosti, zostanú tak uzavreté významné dimenzie ľudskej skúsenosti i adekvátne pochopenie kľúčových poznatkov, ktoré predstavujú vrchol nášho súčasného teoretického obrazu sveta a ktoré sú v podobe čoraz sofistikovanejších technológií čoraz prepletenejšie aj s naším každodenným životom. Rozdiel medzi vstupom a nevstupom do „sveta matematiky" často spočíva „len" v tom, či daný človek niekedy vo svojom živote s porozumením a chuťou absolvuje alebo neabsolvuje základy lineárnej algebry alebo diferenciálneho počtu. Ak ich absolvuje, získa predpoklady a mentálne nástroje na porozumenie všetkého ostatného v matematike (a v matematických prírodných vedách).

Ako tu teda prichádza k slovu intuícia? Do značnej miery ide o otázku spôsobu prezentovania matematiky. Ak by náš prístup k matematike pripomínal, či priam vyzdvihoval všetky tie intuitívne prvky, o ktorých bola reč vyššie, matematika by už pre mnohých nebola odstrašujúcou nedobytnou pevnosťou vo forme axiomatických systémov a formálnych dôkazov. Ak by intuitívny a experimentálny prístup k matematike nebol a priori vnímaný ako prečin proti exaktnosti a rigoróznosti, mohli by sme dúfať, že svoju cestu k matematike nájde oveľa viac ľudí. Vyzdvihnutie intuitívnych prvkov nakoniec nie je len šikovným trikom, ako didakticky zefektívniť prístup k vyššej matematike. Reflexia, akú nám ponúka Hersh (a mnohí ďalší), naopak ukazuje, že intuícia a intuitívnosť je každodenným faktorom matematického života – vyčistené a utriedené poznatky v podobe definícií, tvrdení, dôkazov, axióm, formálnych systémov a pod. sú produktom intuitívneho anticipovania, intuitívneho hľadania a intuitívneho experimentovania.

Literatúra

BOLZANO: B. (1963): *Paradoxy nekonečna*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd.

BUKOVSKÝ, L. (1979): *Množiny a všeličo okolo nich*. Bratislava: Veda.

CANTOR, G. (1932): *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin: Verlag von Julius Springer.

DEDEKIND, R. (1932): *Gesammelte mathematische Werke*. Dritter Band. Braunschweig: Verlag von F. Vieweg & Sohn.

DAVIS, P. J., HERSH, R. (1981): *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser.

HERSH, R. (1979): Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics. *Advances in Mathematics*, 31, 31-50.

HERSH, R. (1997): *What is Mathematics, Really?* Oxford/New York: Oxford University Press.

KLINE, M. (1970): Logic versus Pedagogy. *The American Mathematical Monthly*, 77 (3), 264-288.

KLINE. M. (1998): *Calculus. An Intuitive and Physical Approach*. 2nd Edition. New York: Dover Publications, Inc. (1st Edition: 1967).

KVASZ, L (2015): Šach ako metafora matematiky. *Filozofia*, 70 (3), 175-187.

MACO, R. (2010): Filozofia matematiky raného Ernsta Cassirera. *Filozofia*, 65 (8), 27-39.

TAO, T. (2006): *Analysis I*. New Delhi: Hindustan Book Agency.

ZEĽDOVIČ, J. B. (1973): *Vyššia matematika pre začiatočníkov*. Bratislava: Alfa.

Tento príspevok je súčasťou riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0461/15 *Kognitívna intuícia ako filozofický problém. Historické a súčasné epistemologické perspektívy*.

Róbert Maco
Katedra filozofie a dejín filozofie FiF UK
Gondova 2
814 99 Bratislava 1
Slovenská republika
e-mail: robert.maco@uniba.sk