

FILOZOFIA MATEMATIKY RANÉHO ERNSTA CASSIRERA

RÓBERT MACO, Katedra filozofie a dejín filozofie FiF UK, Bratislava

MACO, R.: Philosophy of Mathematics in Early Ernst Cassirer
FILOZOFIA 65, 2010, No 1, p. 27

The paper deals with some major themes in early Cassirer's philosophy of mathematics. It appears, that the basis of his thinking about mathematical objects and mathematical concept formation is his Neo-Kantian idealistic (transcendental) theory of concepts which he developed in opposition to what is called the „traditional theory of concepts“ going back to Aristotle. Cassirer often seeks to confirm his philosophical insights concerning mathematics by the interpretations of the works of significant mathematicians. The second part of the paper deals with Cassirer's attempt to find such a confirmation in famous Dedekind's theory of natural numbers. Cassirer's philosophical attitude to Dedekind's theory is compared with that of Russell. The author raises the sceptical question of whether Cassirer's view of mathematics – as developed in his early period – could be a sufficient or at least plausible basis for solving philosophical problems of the foundations of mathematics of that time.

Keywords: Mathematics – Idealism – Neo-Kantianism – Structuralism – Theory of concepts – Function

Ernst Cassirer (1874 – 1945) je v dejinách filozofie známy predovšetkým svojou originálnou koncepciou filozofie kultúry, ktorú pod názvom „filozofia symbolických foriem“ rozvinul najmä v dielach z dvadsiatych rokov 20. storočia. Prvá otázka s ohľadom na tému tejto štúdie by teda mohla znieť: Ako sa Cassirer ako filozof kultúry a filozofický antropológ (známy svojou definíciou človeka ako *animal symbolicum*) dostal k takej špecifickej téme, akou je filozofia matematiky?

Na túto otázku možno odpovedať dvomi spôsobmi. Jednak, ak sa na vec pozrieme zo systematického hľadiska, musíme konštatovať, že analýza a reflexia vedy ako osobitej „symbolickej formy“ je integrálnou súčasťou filozofie symbolických foriem. Z významu matematiky pre vedu potom plynie aj Cassirerov filozofický záujem o matematiku.

Druhú možnú odpoveď na spomenutú otázku dostaneme vtedy, keď sa pozrieme na genézu Cassirerovho myslenia a na (historicko-filozofický a tiež inštitucionálny) kontext, v ktorom sa formovalo jeho filozofické myslenie. Týmto bezprostredným kontextom bola, samozrejme, Marburská škola novokantovstva, ktorá si už od svojho vzniku (v 70. rokoch 19. storočia) kládla ako prvoradý cieľ filozofické pochopenie (procesu) vedeckého poznania, a to predovšetkým jeho najrozvinutejšej a najexaktnejšej časti – matematických prírodných vied. Nie je teda žiadnym prekvapením, že Cassirer začína svoju filozofickú dráhu v novokantovskom prostredí ako filozof matematiky. Tým sa, mimochodom, Cassirer začleňuje do mimoriadne zaujímavej a vplyvnej skupiny filozofov z prelomu 19. a 20. storočia, ktorí začínali s rovnakou témou a ktorí svoje filozofické úvahy následne (svojimi vlastnými odlišnými spôsobmi) rozšírili o iné dimenzie: Gottlob Frege, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, Edmund Husserl, Rudolf Carnap, Ludwig Wittgenstein. V tom-

to zmysle chce byť táto práca drobným príspevkom k hľadaniu spoločných koreňov takých odlišných filozofických tradícií, akými sú novokantovská, analytická a fenomenologická filozofia.

Prvá práca, v ktorej sa Cassirer systematicky vyjadruje k problémom filozofie matematiky, je štúdiá z roku 1907 s názvom *Kant a moderná matematika*. Tento takmer 50-stranový text predstavuje v hlavných rysoch koncepciu, ktorú potom Cassirer podrobnejšie rozpracuje v prvej časti svojej systematickej monografie *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (ďalej len *SuF*) z roku 1910. Zatiaľ čo však v roku 1907 sa Cassirer ešte pokúša obhájiť (novokantovsky reinterpretovaného) Kanta pred ostrou paľbou kritiky francúzskeho logika a filozofa L. Couturata¹ (ktorý čerpá svoju muníciu hlavne z Russellových *The Principles of Mathematics*), v *SuF* sú historické a interpretačné otázky okolo Kantovej filozofie úplne odsunuté bokom a pozornosť sa zameriava na jadro Cassirerovej filozofie: na jeho novú (transcendentálnu) teóriu pojmov, v rámci ktorej majú byť zodpovedané aj aktuálne filozofické otázky o matematike.

Pozrime sa teda najskôr, ako Cassirer vidí situáciu v matematike a vo filozofii matematiky v roku 1907. Tak ako mnohí pred ním (a tiež po ňom) aj on často začína poukázaním na prevratné zmeny v matematike v priebehu 19. storočia. Osobitne vyzdvihuje dva príklady, ktoré zo súčasného pohľadu nie sú prekvapením: vyjasnenie fundamentálnych pojmov infinitezimálneho počtu vo „všeobecnej teórii funkcií“ (od Cauchyho cez Weierstrassa až po Peana) a rozšírenie obzoru v geometrii, kde sa prostredníctvom všeobecnejšieho uchopenia pojmu priestoru dospelo k hlbšiemu chápaniu vzájomnej súvislosti a nevyhnutnosti jednotlivých axiém (projektívna geometria a „metageometria“²). Cassirer pripomína, že namiesto odvolávania sa na (domnelú) evidentnosť nazerania sa v súdobej matematike čoraz viac presadzuje tendencia k prísnemu deduktívnemu zdôvodneniu, ktoré vychádza z presne formulovaných postulátov (pričom si môžeme domyslieť, že tu má na mysli také výsledky, akými sú Fregeho práce z logiky, Paschovu a Hilbertovu axiomatizáciu v geometrii či Dedekindove-Peanove postuláty v aritmetike).

Prácu B. Russella *The Principles of Mathematics* vidí Cassirer ako filozofickú snahu uplatniť tieto nové postupy a toto nové chápanie na celú modernú matematiku, t. j. zrekonštruovať celú budovu matematiky podľa jednotného, striktného logického plánu. Všíma si, že kľúčom k tejto rekonštrukcii je nové (rozšírené) poňatie logiky, ktorá sa stáva v Russellových rukách „všeobecnou logikou relácií“, čo umožnilo, aby sa matematika a logika spojili do nerozlučnej jednoty. „Až premena logiky na ‚logistiku‘ – ako Couturat nazýva symbolický logický kalkul – je tým rozhodujúcim a nevyhnutným krokom, ktorý logike zabezpečuje pozitívnu vedeckú plodnosť“ ([1], 4). Podľa Cassirera táto „logistika“ vdýchla starej formálnej logike nový život a naviazala ju na reálne (prírodovedecké) poznanie; a „tento výsledok je dôležitý aj s ohľadom na Kantovo učenie“ ([1], 8). Okamžite však dodáva, že to neznamenaá, že to, čo novokantovci podľa Kanta nazývajú „transcendentálna logika“, je tým pádom zosadené, resp. nahradené. Logistika (t. j. moderná symbolická, matematická logika) podľa neho predstavuje, predbežne povedané, skôr nový

¹ Pozri najmä jeho prácu [6], ktorá končí obsiahlym kritickým dodatkom venovaným Kantovej filozofii matematiky ([6], 235 – 308).

² „Metageometria“ je súdobý názov pre to, čo dnes označujeme ako „neeuclidovské geometrie“.

a lepší nástroj na dosiahnutie pôvodných (novo)kantovských cieľov.

Otázka teda znie: V čom konkrétne spočívajú tieto ciele a ako presne môže pri tom nová logika pomôcť? Tu sa dostáva k slovu Cassirerova teória pojmov. Základnou myšlienkou tejto jeho teórie je kritické odmietnutie tzv. „tradičnej teórie pojmov“ a jej nahradenie „funkcionálnym chápaním pojmov“. Samozrejme, zo súčasného hľadiska modernej (fregeovskej) logiky budeme takúto myšlienku na prvý pohľad ťažko považovať za prevratnú a originálnu. Chápanie pojmov podľa vzoru matematických funkcií je už možno také zaužívané, že sa skôr musíme namáhať s porozumením starších koncepcií, kde boli pojmy chápané nejakým inak. Ak by sa teda Cassirerov príspevok vyčerpával tézou, že pojmy sú funkcie svojho druhu, jeho teória by si zasluhovala nanajvýš pozornosť historika. Cassirer sa však stal v posledných dvoch desaťročiach predmetom obnoveného záujmu niekoľkých filozofov matematiky (napr. Karl-Norbert Ihmig, Michael Friedman, Erich Reck, Jeremy Richard Heis)³ práve preto, že jeho teória svojím filozofickým obsahom ďaleko presahuje zmienenu tézu. Zhrňme si teda najskôr hlavné body tejto teórie.



Ernst Cassirer

Cassirerova teória pojmov.

Zodpovedzme najskôr otázku: Čo je to vlastne „tradičná teória pojmov“ (ďalej len TTP)? Ako napovedá samotný názov, nejde o nejakú presne datovanú a individualizovanú náuku, ale skôr o istý (podľa Cassirera takmer všeobecne prijímaný) súbor vzájomne prepojených explicitných alebo implicitných logických a filozofických presvedčení týkajúcich sa podstaty, funkcie a genézy pojmov. Na základe týchto presvedčení podľa neho pracovali logici a filozofi od čias Aristotela (ktorý dal tejto teórii prvú ucelenú podobu), a to dokonca aj v období (napr. v 19. storočí), keď iné časti Aristotelovho učenia (filozofické, fyzikálne, biologické teórie) boli už dávno považované za prekonané. Pretrvávaniu tejto starej teórie pojmov pripisuje Cassirer na vrub to, že moderná filozofia matematiky

a matematických prírodných vied (až na Kanta) nebola schopná urobiť zásadný pokrok.

³ K. N. Ihmig: Cassirers Invariantentheorie der Erfahrung und seine Rezeption des „Erlanger Programms“ (1997); M. Friedman: A Parting of the Ways: Carnap, Cassirer, and Heidegger (2000); J. R. Heis: The Fact of Modern Mathematics: Geometry, Logic, and Concept Formation in Kant and Cassirer (2007); E. Reck: Cassirer and Dedekind: On the significance of structural mathematics (2008).

TTP totiž nie je len logickou teóriou, ale obsahuje v sebe isté viac či menej skryté epistemologické a ontologické predpoklady, ktoré takpovediac vytvárajú predispozície nesprávnej filozofie vedy. Hlavné tézy/predpoklady tejto „tradičnej teórie pojmov“ (ako ju prezentuje Cassirer) sa dajú rozdeliť do troch skupín: logické, resp. logicko-sémantické, psychologicko-epistemologické a ontologické.

A. Z hľadiska logiky TTP v prvom rade tvrdí, že všetky zložené pojmy sú konjunkciou kladných príp. záporných (negovaných) atribútov (ktorými sú buď iné zložené pojmy, alebo jednoduché pojmy). Dajú sa preto reprezentovať jednoduchou aritmetickou schémou typu: $P = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ (napr. človek = živočích + rozumný).

Po druhé, TTP chápe relácie (vzťahy) ako ne-podstatné (ne-esenciálne) vlastnosti, ktoré tým pádom nepatria medzi atribúty definujúce daný pojem.

Po tretie, TTP chápe pojmy ako (do veľkej miery samostatné) zložky súdov, pričom za paradigmatický typ súdov pokladá subjekt-predikátové súdy. Celá sylogistická logika je potom iba prostou konzekvenciou takéhoto chápania súdov.

Po štvrté, TTP považuje za dôležitý „logický poznatok“, že obsah pojmov je nepriamo úmerný ich rozsahu, t. j. čím je daný pojem všeobecnejší (čím menšia je suma jeho definujúcich atribútov), tým má väčší rozsah (tým väčšia je množina entít, ktoré podeň spadajú), čo je v skutočnosti len ďalšia jednoduchá konzekvencia vyššie uvedených téz.

B. Kľúčovým psychologicko-epistemologickým predpokladom TTP je abstrakcionistické chápanie pojmov.⁴ Abstrakcionizmus sa na jednej strane vzťahuje na to, ako (z hľadiska psychologickéj genézy) dospievame k pojmom, resp. ako ich tvoríme, a na druhej strane vypovedá o tom, akú (epistemickú) funkciu pojmy plnia v našom poznávaní. Podľa TTP teda pojmy vznikajú tým, že poznávajúci registruje isté podobnosti a odlišnosti vo veciach, ktoré následne fixuje vo svojom vedomí pomocou istých znakov (napr. slov). Dôležitý krok od konkrétosti vnímaných vecí k všeobecnosti pojmu sa podľa TTP deje ako mentálny akt abstrahovania, čiže odhliadnutím od istých vlastností a sústredením sa na to, čo majú viaceré prípady spoločné. Epistemickou funkciou pojmu je podľa TTP zachytávať podstatné črty skutočnosti, a pritom odfiltrovať to, čo podstatné nie je, napr. to, čo je iba náhodné, premenlivé.

C. Ontologický predpoklad TTP, ktorý sa zväčša javí ako až taký neproblematický, že zostáva nevysslovený, tkvie podľa Cassirera predovšetkým v tom, že na svet ako predmet pojmového zachytávania sa nahliada ako na čosi dané a existujúce nezávisle od aktivity poznávajúceho. Podľa tohto náhľadu je štruktúra sveta vopred určená ako niečo objektívne, čo sa dá v najlepšom prípade iba verne reprezentovať prostredníctvom rôznych

⁴ Napr. Moritz Wilhelm Drobisch v *Neue Darstellung der Logik* (1887) hovorí: „Myšlienková operácia, ktorá z porovnávaných objektov vyčleňuje atribúty, ktoré sú pre ne osobité, sa nazýva abstrakcia a tá, ktorá tieto atribúty opäť pripája k rodovému pojmu, a tým tieto objekty predstavuje ako druhy ich spoločného rodu, sa nazýva determinácia. Abstrakcia a determinácia sú opačné myšlienkové operácie; determinácia totiž znovu ustanovuje to, čo abstrakcia zrušila vytvorením rodového pojmu, a abstrakcia ruší to, čo determinácia kladie v pojme druhu. S ohľadom na ich spôsob vzniku sa preto rodové pojmy nazývajú aj abstraktnými pojmami, a pretože sú spoločné všetkým ich druhom, nazývajú sa všeobecnými (*notiones communes s. generales*)“ ([8], 21). Drobischova práca bola jednou z najznámejších a najcitovanejších učebníc tradičnej (predfregeovskej) logiky na konci 19. storočia.

pojmových schém a systémov. Pojmy ako také neprinášajú (čo do obsahu) nič nové, iba kopírujú jestvujúcu skutočnosť (a čím lepšie ju kopírujú, tým viac sa k nej primkávajú a tým menej sú v tomto zmysle originálne, tvorivé).

Implicitné ontologické predpoklady TTP však podľa Cassirera siahajú ešte ďalej než len k všeobecnému preferovaniu naivno-realistickej metafyziky. TTP nás okrem toho vedie k tomu, že fixuje určitý konkrétny ontologický model chápania sveta, a to taký, v ktorom je prednostné miesto vyhradené veciam a ich vlastnostiam (vo filozofickej terminológii: substanciam a ich akcidentom). Všetko, čo má byť pokladané za jestvujúce, sa s väčšími či menšími problémami interpretuje *sub specie substantiae* (pričom napr. s predmetmi klasickej botaniky to ide ľahšie než s „predmetmi“ teórie elektromagnetizmu).

Teraz, keď už máme istý obraz o TTP, môžeme si povedať, prečo podľa Cassirera treba prejsť k novej (funkčnej) teórii pojmov. Ústredný argument sa, samozrejme, odvíja od Cassirerovej (novokantovskej) predstavy o tom, čo by malo byť cieľom filozofického skúmania. Z hľadiska týchto kritérií sa TTP Cassirerovi ukazuje ako absolútne neadekvátne z hľadiska porozumenia tomu, čo sa deje v (najrozvinutejších) exaktných vedách. Podľa marburských novokantovcov je totiž najcharakteristickejším znakom modernej vedy práve to, že postupne prešla od idey substancie k idei zákona. Pravým predmetom rozumu v konečnom dôsledku nie sú veci (organizmy, nerasty, súhvezdia atď.), ale zákony. Túto myšlienku veľmi jasne a programovo vyslovil Hermann Cohen už v 70. rokoch 19. storočia [4]. Podľa novokantovcov sa svet „premieňa“ na systém (vedeckých) zákonov, kde veci tvoria čosi ako (zatiaľ) neanalyzované termy relácií. To je, mimochodom, základom idealizmu marburského novokantovstva. Ešte raz zdôraznime: „Logický idealizmus“ (ako ho niekedy označovali) nespočíva v tom, že sa čosi, čo sa na prvý pohľad zdá ako objektívne (telesá), interpretuje ako v podstate subjektívne (myseľ, duch), ale v tom, že objektivita sa nezakladá na objektoch, ale na (relatívne) nemenných zákonitostiach.

Ak sa na ontologické presupozície TTP pozrieme z tohto uhla pohľadu, je pochopiteľné, že Cassirer musí takúto teóriu razantne odmietnuť. To zaujímavé na Cassirerovej teórii pojmu (a preto zaujímavé aj pre filozofiu matematiky) však spočíva v tom, že nezostáva len pri takomto paušálnom odmietnutí aristotelovsky inšpirovanej TTP z pozície cohenovsky inšpirovaného logického idealizmu, ale že sa usiluje detailne vyznačiť tie miesta, kde TTP zlyháva zoči-voči reálnej vedeckej praxi.

Cassirer a Dedekind. Ako charakteristický príklad Cassirerovej argumentácie v prospech vlastnej teórie pojmov (a tým vlastnej filozofie matematiky) si vyberieme tie časti jeho raného diela, v ktorých sa Cassirer odvoláva na prácu jedného z najvýznamnejších matematikov druhej polovice 19. storočia Richarda Dedekinda (1831 – 1916). Zaujímavé nás bude jeho práca z roku 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen* (Čo sú a na čo sú čísla).

Základný prínos tejto práce Cassirer vidí v tom, že Dedekind ako primárny vyzdvihuje pojem relácie, konkrétnejšie pojem zobrazenia (funkcie) a usporiadania. Dedekindovi sa podľa neho podarilo ukázať, že „na fundujúce zdôvodnenie [Begründung] celej aritmetiky stačí, ak rad prirodzených čísel definujeme výlučne ako postupnosť prvkov,

ktoré sú navzájom spojené určitým usporiadaním, – čiže ak jednotlivé konečné čísla, bez toho, že by sme ich chápali ako ‚mnohosti‘ jednotiek, ponímame ako charakterizované výlučne prostredníctvom ‚postavenia‘, ktoré im prislúcha v rámci celkového radu“. Významné je pritom to, že toto chápanie čísel nie je len všeobecnou tézou, ale že umožňuje definície všetkých aritmetických operácií (sčítanie, násobenie atď.), ako aj kompletne dôkazy takých viet, ako sú zákony asociatívnosti a komutatívnosti pre tieto operácie, na základe ktorých sa potom dajú dokazovať konkrétne vety o číslach.

Cassirer zároveň zdôrazňuje, že dedekindovská definícia je zbavená akýchkoľvek geometrických pomôcok. Systém prirodzených čísel sa tu prezentuje ako „štruktúra ideálnych predmetov“, ktorých celý obsah sa vyčerpáva ich vzájomnými vzťahmi; „esencia“ čísel je tak doslova rozpustená v systéme vzájomných vzťahov a „pozičných hodnôt“. Ba čo viac, tieto vzťahy nielenže nepredpokladajú geometrické (či empirické alebo „čisté“) nazeranie, ale dokonca nevyžadujú ani kantovské „nazeranie čistého času“. Na príklade dedekindovskej definície prirodzených čísel sa podľa Cassirera dozvedáme všeobecnejšiu (filozofickú) pravdu o matematike ako takej: „Vždy keď je daný nejaký **system podmienok**, ktorý sa môže realizovať v rôznych obsahoch, môžeme – bez ohľadu na premenlivosť týchto obsahov – zachytiť samotnú formu systému ako **invariant** a deduktívne rozvinúť jej zákony. Vytvárame tak nový ‚objektívny‘ útvar, ktorý je vo svojej štruktúre nezávislý od akejkoľvek ľubovôle: bolo by však nekriticky naivné, keby sme si **predmet**, ktorý týmto spôsobom vzniká, zamieňali so zmyslovo skutočnými a pôsobiacimi vecami. Z tohto predmetu nemôžeme empiricky odčítať jeho ‚vlastnosti‘; a ani to nepotrebujeme, pretože pred nami stojí v plnej určitosti, pokiaľ v jej čistote uchopíme reláciu, z ktorej vyrastá“ ([2], 52 – 53).

Hoci Cassirerov jazyk môže pre súčasného čitateľa na niektorých miestach znieť trochu archaicky a nezrozumiteľne, základný smer jeho uvažovania je, dovolíme si tvrdiť, celkom jasný. Ak by sme to mali formulovať pomocou súčasnej terminológie: Cassirer zjavne smeruje k istej forme štrukturalizmu vo filozofii matematiky, najmä ak štrukturalizmus vymedzíme pomocou známej definície, ktorá pochádza od Charlesa Parsonsa: „Pod ‚štrukturalistickým chápaním‘ matematických objektov myslím chápanie, podľa ktorého referovanie na matematické objekty prebieha vždy v kontexte nejakej štruktúry a tieto objekty neobsahujú nič viac než to, čo sa dá vyjadriť prostredníctvom základných vzťahov tejto štruktúry“ ([10], 303).

Ak je teda Cassirer štrukturalista *sui generis*, tak otázka znie takto: Je Dedekindova práca, ktorou sa Cassirer snaží túto svoju koncepciu podložiť a dokumentovať, skutočne predzvesťou cassirerovsky štrukturalistického chápania matematických objektov a matematického poznania? Aby sme túto otázku vedeli posúdiť lepšie, musíme sa ponoriť do niektorých detailov Dedekindovej teórie.

Ak názov Dedekindovej práce preložíme ako *Čo sú a na čo sú čísla?*, tak jeho odpoveď na tieto dve otázky dostávame už v predhovore (k 1. vydaniu): „Čísla sú slobodné výtvary ľudského ducha, slúžia ako prostriedok na to, aby sme ľahšie a ostrejšie ponímali rozmanitosť vecí“ ([7], 335). Zatiaľ čo druhá časť tejto odpovede sa môže javiť ako zrozumiteľná a všeobecne prijateľná, prvá si evidentne vyžaduje oveľa podrobnejšie vysvetlenie. A naozaj, aby sme presnejšie zistili, čo tým Dedekind myslí, musíme preštudovať aspoň prvých 73 (očíslovaných) odsekov jeho diela. No ešte predtým, než sa pokúsime

vysvetliť, čo znamená tvrdenie, že duch „tvorí“ čísla, môžeme si povedať, na ktorej fundamentálnej schopnosti nášho ducha toto tvorenie spočíva: Podľa Dedekinda je to schopnosť dávať veci do vzťahu s inými vecami, zobrazovať jednu vec prostredníctvom inej veci. Definíciu zobrazenia môžeme nájsť v 21. paragrafe jeho diela. Treba však postupovať opatrne. To, o čom Dedekind hovorí v predhovore, je zobrazovanie (ako schopnosť alebo činnosť), zatiaľ čo definícia v §21 je definíciou zobrazenia (ako istého zákona alebo pravidla):

„21. **Vysvetlenie.** Pod **zobrazením** φ systému [= množiny] S sa rozumie zákon, podľa ktorého ku každému určitému prvku s systému S **prisľúcha** jedna určitá vec, ktorá sa nazýva **obraz** prvku s a označuje sa $\varphi(s)$; hovoríme tiež, že $\varphi(s)$ **zodpovedá** prvku s , že $\varphi(s)$ **vzniká** alebo **generuje sa** zobrazením φ z prvku s , že s prostredníctvom zobrazenia φ **prechádza** do $\varphi(s)$ “ ([7], 348).

Napriek tomu, že aj podľa Dedekinda zjavne existuje rozdiel medzi zobrazovaním (niečoho prostredníctvom niečoho) a zobrazením ako zákonom, je dobré si všimnúť, že aj v jeho samotnej definícii zobrazenia (funkcie) sa vyskytujú isté procesuálne prvky („ $\varphi(s)$ vzniká alebo generuje sa zobrazením φ z prvku s “). Podľa Dedekinda teda, prinajmenšom vo verbálnej rovine, zobrazenie nie je „statický objekt“, tým menej množinový objekt v súčasnom ponímaní (funkcia ako množina usporiadaných dvojíc s určitými vlastnosťami).

Ak by sme ale aj nechceli pripustiť, že „zobrazenie“ v Dedekindovom chápaní obsahuje isté momenty aktivity, z hľadiska nášho interpretatívneho čítania Cassirera to má iba druhotný význam. Je totiž isté, že Cassirer tieto prvky u Dedekinda nielenže videl, ale pokladal ich aj za kľúčové. To, samozrejme, súvisí s tým, že pre Cassirera ako novokantovca je myslenie, po prvé, bytostne produktívna činnosť, generovanie (Erzeugen) objektov a po druhé, jadrom generovania objektov je generovanie vzťahov (objekty v konečnom dôsledku sú iba termami relácií). Druhá vec je rozhodnúť, nakoľko korektné je Cassirerovo čítanie Dedekinda. Pozrime sa preto na niektoré ďalšie dôležité Dedekindove pojmy.

Jedným z prekvapivých zistení, ku ktorému sa môžeme dopracovať čítaním cassirerovských pasáží o Dedekindovi, je zistenie, že Cassirer nikde explicitne nespomína množinový základ Dedekindovej teórie. Prekvapivé je to jednak preto, že hneď v prvom paragrafe nazvanom *Systémy prvkov* („systém“ je Dedekindov výraz pre množinu) Dedekind podáva vymedzenie „systému“, jednak (a hlavne) preto, lebo existencia množín (dokonca nekonečných) je nepostrádateľnou súčasťou Dedekindovej teórie prirodzených čísel:

„1. ... pod **vecou** rozumiem každý predmet nášho myslenia. Vec je úplne určená prostredníctvom všetkého toho, čo o nej možno vypovedať alebo myslieť. Vec a je taká istá ako vec b (identická s b) a b je taká istá ako a , ak všetko to, čo možno myslieť o a , možno myslieť aj o b , a ak všetko, čo platí o b , možno myslieť aj o a ...

2. Často sa stáva, že rôzne veci $a, b, c...$, ktoré sú na základe nejakého podnetu uchopené z istého spoločného hľadiska, v duchu zoskupujeme, a potom hovoríme, že tvoria **systém** S ; veci $a, b, c...$ nazývame prvkami systému S , sú obsiahnuté v S ; a naopak, S pozostáva z týchto prvkov. Takýto systém S (alebo súbor, rozmanitosť, súhrn) je ako predmet nášho myslenia takisto vecou (1); systém je úplne určený, ak je u každej veci určené, či je prvkom systému S , alebo nie. Systém S je preto taký istý ako systém T ; sym-

bolicky $S = T$, ak každý prvok systému S je aj prvkom systému T a každý prvok systému T je aj prvkom systému S . Kvôli jednotnému spôsobu vyjadrovania je výhodné pripustiť aj špeciálny prípad, keď systém S pozostáva z jedného jediného (z jedného a iba jedného) prvku a , t. j. keď vec a je prvkom systému S . Naproti tomu tu chceme z istých dôvodov celkom vylúčiť prázdny systém, ktorý neobsahuje nijaký prvok, hoci pri iných skúmaníach môže byť pohodlné takýto systém vymyslieť [erdichten]“ ([7], 344 – 345).

Tieto dva odseky obsahujú viacero závažných informácií: Vec je pre Dedekinda v podstate čokoľvek – alternatívne môžeme povedať, že pojem veci je ontologicky absolútne neutrálny alebo že pod pojem veci spadajú reprezentanti všetkých možných ontologických kategórií (časopriestorové predmety, abstraktné objekty, predstavy, udalosti atď.). Nieкто by mohol namietnuť, že Dedekind sa možno iba príliš všeobecne vyjadril, ale že ako matematik má v skutočnosti na mysli hlavne matematické objekty (povedzme systémy/množiny, o ktorých hovorí v nasledujúcom odseku). No to, že táto všeobecnosť bola myslená striktno a vedome, jednoznačne dokazuje spôsob, akým argumentuje v ďalších častiach svojho diela, osobitne v 66. odseku pri dôkaze existencie nekonečného systému. V priebehu dôkazu operuje aj s takými „vecami“, ako sú myšlienky, ba dokonca „moje vlastné Ja“. A tento dôkaz pokladal sám Dedekind za **logický** dôkaz existencie nekonečného systému.

V druhom odseku si okrem dnes už dobre známeho princípu extenzionality pre množiny ($S = T \leftrightarrow \forall x (x \in S \leftrightarrow x \in T)$) treba všimnúť, že explicitne uznáva existenciu jednoprvkovej množiny (rozlíšenie medzi jednou vecou a množinou obsahujúcou túto jednu vec nebola v danej dobe žiadna samozrejmosť), vylučuje z úvah prázdnu množinu, no nie principiálne, ale, ako sa zdá, skôr z pragmatických dôvodov. Zaujímavé je to, s akou ľahkosťou hovorí Dedekind o vymýšľaní (nemecké *erdichten* znamená tiež „vybásniť si“) nových matematických objektov. V ďalších častiach svojej práce Dedekind postupne a veľmi systematicky podáva definície známych množinových pojmov (podmnožina, zjednotenie, prienik atď.) a dôkazy základných viet, hlavne tých, ktoré bude neskôr potrebovať pri definícii systému prirodzených čísel (napr. vety: Každá podmnožina prieniku $\cap \{A, B, C, \dots\}$ je spoločnou podmnožinou množín A, B, C, \dots a mnohých ďalších).

Vráťme sa však k spomenutému prekvapivému fakt, že Cassirer o Dedekindovom množinovom prístupe nehovorí, ale naopak nestále zdôrazňuje dedekindovský pojem zobrazenia. Ako mohol Cassirer ignorovať množinový základ Dedekindovej teórie? Nesvedčí to o tom, že Cassirer si Dedekinda veľmi účelovo prispôbil na svoj obraz? Uvažovať týmto smerom nás nabáda aj ďalší veľavravný fakt: Cassirer sa nikde nezmieňuje o Dedekindovom „dôkaze“ existencie nekonečného systému, hoci Dedekind pokladal tento dôkaz z hľadiska preukázania konzistentnosti svojej teórie za zásadný. Ak by išlo iba o jeden z nespočetných dôkazov v Dedekindovej teórii, nemohli by sme sa veľmi čudovať, že ho Cassirer vo svojom výklade opomenul. Tento dôkaz je však (minimálne z matematického hľadiska) veľmi kuriózný a podozrivý a pokiaľ má na ňom stáť konzistentnosť teórie, ktorou Cassirer ilustruje svoju teóriu pojmov, situácia je veľmi odlišná.

Ako si teda vysvetliť Cassirerovo mlčanie o tomto probléme? A podotknime, že zďaleka nejde len o tento (i keď filozoficky veľmi citlivý) problém. Ako sa totiž môžeme dočítať v Dedekindovom predhovore k 3. vydaniu diela *Was sind und was sollen die Zahlen* (1911), Dedekind v tom čase už osem rokov nosil v sebe pochybnosti o istote zákla-

dov svojej teórie. Išlo, samozrejme, o reakciu na Russellov paradox a ďalšie ťažkosti, ktoré sa vyrojili okolo základov teórie množín na prelome 19. a 20. storočia. Dedekind síce píše, že jeho dôverou „vo vnútornú harmóniu našej logiky“ to neotriaslo a že verí, že budúci vývoj jeho prácu postaví na pevné základy, no predsa mu trvalo deväť rokov, kým súhlasil s tretím vydaním svojho diela. Cassirer, ktorý sa na Dedekindovu prácu odvoláva tak v roku 1907, ako aj v roku 1910, však nespomína takéto problémy ani len slovom.

To všetko nás vedie k otázke: Aký vážny a aký podrobný filozofický pohľad na matematiku mala predstavovať Cassirerova filozofia matematiky koncom prvej dekády 20. storočia, keď sa nielenže nevyrovnala, ale sa ani nezačala vyrovnávať so spomenutými problémami? Nakoniec sa zdá, že jediným Cassirerovým problémom v tomto čase bolo obhájiť základnú všeobecnú tézu svojej teórie pojmov, podľa ktorej vedecké pojmy treba chápať funkcionálne, matematická pojmotvorba je paradigmatickým príkladom funkcionálnych pojmov a matematické objekty sú vzorové relačné entity, systémy vzťahov (alebo, ako by sme povedali dnes, štruktúry a pozície v štruktúrach). Zdá sa, že všetko, čo sa nehodilo do tohto obrazu o matematike (osobitne existencia množinového základu u Dedekinda a s ním spojené problémy), Cassirer minimálne v tomto čase ponechal bokom.

Aby sme však boli voči Cassirerovi z historického hľadiska korektní, treba poznamenať dve veci: Po prvé, pokiaľ ide o množiny u Dedekinda, môžeme povedať, že Cassirer prosto nasleduje Dedekindove vlastné (a opakované) vyjadrenie, že **jediným** základom jeho teórie prirodzených čísel je relačná schopnosť ľudského ducha: „Na tomto jedinom, aj inak úplne nepostrádateľnom základe musí byť... podľa môjho názoru vybudovaná celá veda o číslach“ ([7], 336).

A po druhé, pokiaľ ide o sporný Dedekindov dôkaz, Cassirerovo mlčanie nebude až také prekvapivé, ak sa dozvieme, že dôkaz tohto typu (v tom čase) explicitne akceptoval napríklad aj B. Russell, ktorého Cassirer nepochybne pokladal za autoritu v tejto oblasti (napriek tomu, že v mnohých ohľadoch neakceptoval Russellov filozofický pohľad na matematiku). V paragrafe 339 diela *The Principles of Mathematics* Russell píše: „To, že existujú nekonečné triedy, je také evidentné, že to sotva bude niekto popierať. Keďže je tu však možný formálny dôkaz, bude možno užitočné, ak to dokážeme.“ Spomedzi viacerých variantov dôkazu načrtáva jeden, v ktorom v poznámke pod čiarou odkazuje na Dedekinda (a na B. Bolzana). V Russellovom prevedení vyzerá tento dôkaz takto: „Okrem toho koreláciou celku a časti môžeme priamo dokázať, že počet propozícií alebo pojmov je nekonečný. Pre každý term alebo pojem totiž existuje idea daného termu alebo pojmu, ktorá sa líši od toho, čoho je ideou, no sama je opäť termom alebo pojmom. Na druhej strane, nie každý term alebo pojem je idea. Existujú stoly a idey stolov, čísla a idey čísel atď. Existuje teda jedno-jednoznačná relácia medzi termami a ideami, no iba niektoré termy sú idey. Z toho vyplýva, že existuje nekonečný počet termov a ideí“ ([12], 357 – 358).⁵

Dedekindova koncepcia je pre Cassirera zaujímavá aj preto, lebo mu poskytuje prí-

⁵ V poznámke pod čiarou Russell ešte upresňuje: „Nie je nevyhnutné predpokladať, že idey všetkých termov *existujú* alebo že sú súčasťou nejakej mysle; stačí, že sú entitami“ ([12], 358). (Poznámka: Russell rozlišuje medzi „bytím“ a „existenciou“; bytie má všetko, čo môže byť predmetom nášho myslenia, existencia však prináleží iba niektorým entitám.)

klad nového chápania pojmu abstrakcie. Pamätáme si, že abstrakcionizmus bol jednou z ústredných téz TTP. Ak sa teda u Dedekinda objavuje tento výraz, bude nás zaujímať, v akom význame sa tu používa. Pozrime sa na daný kontext podrobnejšie.

Aby sme porozumeli, o čo ide, musíme okrem už spomenutých dedekindovských termínov ako „systém“, „nekonečný systém“, „zobrazenie“ definovať ešte jeden kľúčový pojem, a to pojem reťazca.

Predpokladajme, že máme nejaký systém (množinu) S a zobrazenie φ , ktoré zobrazuje S do seba samej, t. j. platí $\varphi(S) \subseteq S$ alebo, inak vyjadrené, $\forall x (x \in S \rightarrow \varphi(x) \in S)$. Ak teraz máme ľubovoľnú podmnožinu množiny S , nazvime ju R , tak R je reťazcom na množine S , ak platí, že $\varphi(R) \subseteq R$ (z toho, samozrejme, plynie, že aj sama S je reťazcom).

Dalej, ak nejaká množina A je podmnožinou S , tak znak A_0 bude označovať prienik všetkých reťazcov v S , ktoré obsahujú A ako podmnožinu. Keďže sa dá dokázať, že potom aj tento prienik musí byť reťazcom, môžeme hovoriť, že množina A generuje „prieniakový“ reťazec A_0 . Špeciálny význam bude mať pre nás taký prienik reťazcov, ktorý je generovaný jednoprvkovou množinou. Ak je napr. týmto jediným prvkom a , tak takýto reťazec generovaný množinou $\{a\}$ Dedekind označuje ako a_0 a hovorí, že daný reťazec a_0 je „reťazcom prvku a “.

Teraz môžeme konečne definovať „jednoducho nekonečný systém“ a od neho je už len krok k Dedekindovým prirodzeným číslam (a k jeho špecifickej abstrakcii). Systém (množina) N sa nazýva jednoducho nekonečný práve vtedy, keď existuje injektívna funkcia (zobrazenie) $\varphi: N \rightarrow N$ taká, že N je reťazcom nejakého prvku N , ktorý ale nie je v obore hodnôt zobrazenia φ , t. j. nie je prvkom množiny $\varphi(N)$. Ak tento básový prvok označíme ako a , N ako jednoducho nekonečný systém spĺňa nasledujúce podmienky:

- a) $\varphi(N) \subseteq N$
- b) $N = a_0$
- c) $a \notin \varphi(N)$
- d) zobrazenie φ je injektívne.

Nasleduje vyvrcholenie celého tohto postupu, dajme teda slovo samotnému Dedekindovi:

„73. **Vysvetlenie.** Ak pri uvažovaní o jednoducho nekonečnom systéme N usporiadanom zobrazením φ úplne odhliadneme od konkrétnej povahy prvkov, podržíme iba ich rozlíšiteľnosť a sústredíme sa iba na ich vzájomné vzťahy, do ktorých ich uvádza usporádúvajúce zobrazenie φ , tak tieto prvky sa nazývajú **prirodzené čísla** alebo **ordinálne čísla** alebo tiež jednoducho **čísla** a základný prvok a sa nazýva základné číslo číselného radu N . S ohľadom na toto oslobodenie prvkov od každého iného obsahu (abstrakcia) môžeme čísla oprávnené nazývať slobodným výtvarom ľudského ducha. Vzťahy alebo zákony, ktoré sú odvodené výlučne z podmienok a, b, c, d a sú preto vo všetkých jednoducho nekonečných systémoch vždy tie isté, nech už jednotlivé prvky nazveme akokoľvek, tvoria najbližší predmet **vedy o číslach** alebo **aritmetiky**“ ([7], 360).

Náš predchádzajúci výklad už dáva tušiť, čo na týchto Dedekindových vetách púta Cassirerovu filozofickú pozornosť. Za „najbližší“ (iný možný preklad: primárny) predmet aritmetiky sa tu označujú nie čísla, ale „vzťahy alebo zákony“. A abstrakcia, ktorá sa tu požíva na „vylúpnutie“ čísel z mnohých možných modelov, je postup diametrálne odlišný od abstrakcie tradičnej teórie pojmov. Dedekindova abstrakcia obnažuje štruktúru, zbavu-

je jednotlivé modely všetkého „až na (ich vzájomný) izomorfizmus“. Čísla sú tu, zdá sa, naozaj iba „pozície“, „uzly“ v relačnom systéme a ich „bytie“ sa naozaj vyčerpáva ich vzájomnými vzťahmi v rámci tejto štruktúry.

Aby sme si uvedomili špecifickosť Cassirerovho pohľadu, opäť bude užitočné porovnať Cassirerove komentáre k Dedekindovi s Russellovými. Russell vo svojich *Principles* takisto cituje Dedekindov odsek č. 73 a konštatuje (na rozdiel od Cassirera), že tento výklad nemôže byť úplne v poriadku. Prečo? „Pretože implikuje, že termy všetkých postupností (progressions) iné než ordinálne čísla sú komplexné a že ordinálne čísla sú prvkami vo všetkých takýchto termoch a možno ich získať abstrakciou. No tak to zjavne nie je. Postupnosti môžu byť tvorené bodmi alebo okamihmi, transfinitnými ordinálnymi číslami alebo kardinálnymi číslami, v ktorých, ako hneď uvidíme, ordinálne čísla nie sú prvkami“ ([12], 249).

V čom je zmysel Russellovej námietky? Myslíme si, že týmto Russellovým výhradám porozumieme jedine vtedy, ak si uvedomíme, že Russellovi prekáža presne to, čo Cassirer vo svojej interpretácii s nadšením víta. Russell nás totiž stavia pred takýto obraz: Predstavme si rôzne konkrétne postupnosti („jednoducho nekonečné systémy“), jedny tvorené priestorovými bodmi, iné časovými bodmi, ďalšie transfinitnými číslami atď. Ak sú (podľa Dedekinda) konečné ordinálne čísla (*alias* prirodzené čísla) vyabstrahované z týchto partikulárnych postupností, tak musia byť v nich obsiahnuté ako časti! Preto Russell tvrdí, že okrem ordinálnych čísel musia byť všetky ostatné prvky postupností zložené (komplexné). Keďže však Russell vôbec nevidí napríklad v okamihoch obsiahnuté prirodzené čísla, tak Dedekindov výklad nemôže byť „celkom správny“.

Sotva si možno predstaviť väčší kontrast Cassirerovho chápania dedekindovskej pasáže. Tam, kde Cassirer oslavuje, že čísla konečne stratili svoju „hmotnosť“, svoju domnelú substancialitu a rozpustili sa v systéme vzťahov, Russell naopak hľadá prirodzené čísla ako akési atómy, entity špecifického druhu a nevie si predstaviť, že by v dedekindovskej teórii ako také nefigurovali. Skrátka, Cassirer tam žiadne takéto „atómy“ nevidí a berie to ako prednosť Dedekindovej teórie; Russell ich tam vidí, a práve to ho vedie k problémom s Dedekindovou teóriou. Mimochodom, tu sa tiež ukazuje, že Russell tenduje k tradičnému chápaniu abstrakcie: Ak z prvkov nejakej vhodnej konkrétnej dedekindovskej postupnosti odstránime isté vlastnosti, zostanú nám prvky, ktoré majú už iba vlastnosti prirodzených čísel, čiže nachádzame prirodzené čísla. Z Cassirerovho hľadiska dedekindovskou abstrakciou sa posúvame na kvalitatívne a principiálne novú úroveň (na úroveň „čistých relácií“).

Celý tento rozdiel ešte viac zvýrazní a, ako dúfame, aj objasní Russellov záverečný komentár k tejto otázke, kde hovorí o tom, ako by mali vyzerat' definované entity (čiže v tomto prípade dedekindovské čísla): „Navyše, nie je možné, aby ordinálne čísla boli, ako naznačuje Dedekind, iba termami relácií, ktoré konštituujú postupnosť. Ak vôbec majú jestvovať, musia byť svojou vnútornou povahou [intrinsicly] niečím; musia sa odlišovať od iných entít tak, ako sa odlišujú body od okamihov alebo farby od zvukov... Definované entity by mali byť viditeľné aspoň pre duchovný zrak [mind's eye]. Daný [t. j. Dedekindov] princíp teda tvrdí, že za istých podmienok jestvujú takéto entity. Len keby sme vedeli, kde ich máme hľadať!... Tak či onak, Dedekind nám neukázal, čo majú všetky postupnosti spoločné, ani nám neposkytol žiadny dôvod domnievať sa, že sú to ordi-

nálne čísla, až na to, že všetky postupnosti sa riadia tými istými zákonmi ako ordinálne čísla, čo by dokazovalo aj to, že akákoľvek daná postupnosť je tým, čo majú spoločné všetky postupnosti“ ([12], 249).

Na tomto mieste nebudeme rozvíjať polemiku medzi Russellovým a Cassirerovým pohľadom na Dedekindovu definíciu prirodzených čísel. Russella v tejto časti uvádzame iba preto, aby sa čo najlepšie ukázala špecifickosť Cassirerovho vlastného prístupu.

Ako sme videli, Cassirer skúma matematiku a matematický spôsob poznávania v rámci svojej novej teórie pojmov. Matematickú pojmotvorbu vidí ako paradigmatický spôsob tvorenia vedeckých pojmov, ktorý potvrdzuje základné tézy jeho funkcionálnej a zároveň idealistickej teórie pojmov. Ak jednou zo základných otázok filozofie matematiky je otázka povahy matematických objektov, tak Cassirer na ňu má odpoveď v podobe svojho štrukturalizmu, či možno ešte lepšie „relacionizmu“. Stručne zopakované, výraz pre matematický objekt je pre neho v podstate zhusteným údajom o existencii istých vzťahov alebo zákonov (podmienok). V dôsledku toho sa vynára otázka presného ontologického statusu relácií. Tu sa však Cassirer dostáva do zložitej situácie. Cassirer sa ako novokantovec stráni tak psychologistickej, ako aj platonistickej interpretácie (o empiristickej ani nehovorí). Snaží sa podať vyvážený opis subjektívnych i objektívnych aspektov matematiky. Na jednej strane koncepciu predmetov matematiky ako osebe (t. j. absolútne nezávisle od akéhokoľvek subjektu) jestvujúcich entít odmieta s poukázaním na ich bytostne relačnú povahu, na druhej strane *SuF* končí kapitolou o „psychológii relácií“, v ktorej sa usiluje preukázať, že základné kategoriálne relácie nie sú kauzálne vysvetliteľné ani pomocou psychológie, ani pomocou fyziológie. „Nesamostatnosť, ktorá sa zdá byť spätá s čistými reláciami v ich faktickom výskyte a takpovediac v ich psychickej existencii, nevyučuje samostatnosť ich špecifického významu. Všeobecne platné relácie, o ktoré tu ide, neexistujú ako časovo a miestne ohraničené časti psychickej alebo fyzickej skutočností, ale ‚jestvujú‘ [bestehen] výlučne vďaka nevyhnutnostiam, ktorú priznávame určitým výrokom“ ([2], 449). V konečnom dôsledku sa pre Cassirera tento problém javí ako riešiteľný iba z pozície logického idealizmu, pre ktorý sú výrazy ako „čisté relácie“ a „čisté funkcie vedomia“ (= neempirické formy spontaneity rozumu) nevyhnutnými korelátmi, nereducovateľnými na nič iné. Je to akési „syntetické a priori“ nášho poznania, na ktoré sa dívame z dvoch strán: zo „subjektívnej“ a z „objektívnej“.

Okrem tohto výsostne filozofického problému sme však tiež narazili na „technickejšie“ problémy Cassirerovej pozície, a to konkrétne v súvislosti s množinovým základom dedekindovskej koncepcie. S tým sa spájajú aj otázky garancie konzistentnosti, ktoré sú podľa nášho názoru osobitne akútne pri takom pohľade na matematiku, aký si osvojuje Cassirer. Ak je podľa neho totiž zdrojom „bytia“ matematických predmetov „produktivita myslenia“, tak vyvstáva otázka, či niektoré z týchto konštruktov nemôžu vyústiť do protirečenia alebo paradoxov. Práve udalosti okolo roku 1900 ukázali, že nestačí len generovať formálne systémy podmienok, z ktorých následne logicky odvodzujeme dôsledky (ako to na mnohých miestach formuluje Cassirer). Práve Dedekindov a, samozrejme, Fregeho systém v sebe obsahovali isté slabé miesta a nebezpečenstvá, ktorých pochopenie znamenalo novú výzvu pre veľkú časť nasledujúcej filozofie matematiky.

Predtým, než na základe predchádzajúcich poznámok vyslovíme definitívny verdikt nad Cassirerovou filozofiou matematiky, treba spomenúť a vziať do úvahy dva ďalšie

body. Po prvé, naša práca sa zamerala iba na určitý výsek Cassirerovej ranej filozofie matematiky, a hoci táto časť podľa nášho názoru dobre reprezentuje jeho spôsob uvažovania o matematike, jeho filozofický záber v tejto oblasti je nepomerne širší a ponúka oveľa viac podnetov na premýšľanie, ako bolo možné na tomto mieste prezentovať. A po druhé, treba si uvedomiť, že Cassirer neskôr – v rámci svojej filozofie symbolických foriem – jednak niektoré svoje tézy revidoval, jednak sa vyjadril k mnohým problémom filozofie matematiky, ktoré zostali v jeho ranom diele nedotknuté. Celkové a definitívne hodnotenie plusov a mínusov jeho filozofickej reflexie matematiky by teda bolo možné podať až po rozbere jeho zrelej koncepcie filozofie symbolických foriem.

LITERATÚRA

- [1] CASSIRER, E.: Kant und die Moderne Mathematik. In: *Kant-Studien*, 12, 1907, S. 1 – 49.
- [2] CASSIRER, E.: *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*., Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1980.
- [3] CASSIRER, E.: Hermann Cohen und die Erneuerung der Kantischen Philosophie. In: *Kant-Studien*, 17, 1912, S. 252 – 273.
- [4] COHEN, H.: *Kants Theorie der Erfahrung*. Berlin: Harrwitz und Gossmann 1871.
- [5] COHEN, H.: *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*. Berlin: Harrwitz und Gossmann 1883.
- [6] COUTURAT, L.: *Les principes des mathématiques*. Paris: Librairie scientifique et technique 1980.
- [7] DEDEKIND, R.: *Gesammelte mathematische Werke, Dritter Band*. Braunschweig: Druck und Verlag von F. Vieweg und Sohn 1932.
- [8] DROBISCH, M. W.: *Neue Darstellung der Logik*. Hamburg/Leipzig: Verlag von L. Voss 1887.
- [9] NATORP, P.: *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*. Leipzig/Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner 1910.
- [10] PARSONS, CH.: The Structuralist View of Mathematical Objects. In: *Synthese*, 84, 1990, pp. 303 – 346,.
- [11] RECK, E.: Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense. In: *Synthese*, 137, 2003, pp. 369 – 419.
- [12] RUSSELL, B.: *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press 1903.

Táto štúdia vznikla s podporou štipendia Vzdelávacej nadácie Jana Husa.

Mgr. Róbert Maco, PhD.
Katedra filozofie a dejín filozofie FiF UK
Gondova 2
818 01 Bratislava 1
SR
e-mail: maco@fphil.uniba.sk