

## KANT A FREGE O ANALYTICKOSTI

IGOR SEDLÁR, Katedra logiky a metodológie vied FiF UK, Bratislava

SEDLÁR, I.: Kant and Frege on Analyticity  
FILOZOFIA 62, 2007, No 4, p. 336

The question, whether there is a sharp difference between an analytic and a synthetic proposition, is one of the famous philosophical topics of the 20th century. The question, however, urges one to ask following questions: "What is an analytic proposition?", or „What is a synthetic proposition?“. The aim of the paper is to contribute to the discussions of the analyticity in that it tries to answer the first of the two. However, the author does not offer his own conception of analyticity. He rather offers a more detailed view on the definitions and characteristics of an analytic proposition (or an analytic judgment) in Kant and Frege.

**Keywords:** Analyticity – Frege – Kant

**1. Kant o analytickosti.** Najskôr stručne opíšeme miesto pojmu analytickosti v Kantovej filozofii. Ďalej uvedieme a hlbšie rozoberieme konkrétne formulácie, ktorými Kant pojem analytického súdu definoval. Uvedieme niekoľko námietok proti jeho formuláciám a ich dôsledkom. Následne sa pokúsime tieto námietky zhodnotiť.

**1.1. Analytické súdy v kontexte Kantovej filozofie.** Jednou z primárnych motivácií Kantovej kritickej práce je nespokojnosť so stavom metafyziky. Upozorňuje na to, že metafyzika na rozdiel od logiky, matematiky a fyziky za ideálom vedy, produkujúcej uznávané a zaujímavé poznatky o svojom predmetnom obore, zaostáva. Na rozdiel od práce logikov, matematikov a fyzikov sú stavby metafyzikov „len čírym tápaním“.

Aké sú dôvody tohto stavu metafyzických stavieb? „Čo nás... robí pri stavbe celkom bezstarostnými a dôverčivými a lichotí nám zdanlivou dôkladnosťou, je toto: veľká a hádam najväčšia časť našej rozumovej činnosti spočíva v *analýze* pojmov, ktoré sme si o predmetoch už vytvorili. Toto nám poskytuje množstvo poznatkov, ktoré hoci len objasňujú alebo vysvetľujú, čo sa už myslí v našich pojmoch (aj keď ešte zmätene), predsa sa aspoň z formálnej stránky hodnotia ako nové náhľady, aj keď z materiálnej čiže obsahovej stránky nerozširujú, ale iba analyzujú pojmy, ktoré už máme. Keďže takouto metódou získavame skutočné apriórne poznanie, ktoré postupuje spoľahlivo a prospešne, rozum nám, ani sám to nebadajúc, podhadzuje tvrdenia celkom iného druhu a k daným pojmom pridáva úplne cudzie, a to apriórne, pričom ani nevie, ako ich získava, a ani mu na um nezíde spýtať sa na to“ ([17], 61 – 62).

Podľa Kanta sú príčinou stavu, v ktorom sa metafyzika nachádza, dve veci. Po prvé, metafyzici si jasne neuvedomujú rozdiel medzi dvoma druhmi súdov: súdmi, ktoré predstavujú objasnenia alebo vysvetlenia obsahu našich pojmov, a súdmi, ktoré sú z kognitívneho hľadiska odlišné: spájajú pojmy, ktoré k sebe nepatria, na základe svojho pojmového obsa-

hu. Prvý druh súdov Kant nazýva *analytickými* a druhý *syntetickými*.<sup>1</sup> Analytický súd podľa Kanta nepredstavuje skutočne nový poznatok, iba ukazuje, čo si v našich pojmoch (niekedy iba nejasne) myslíme. Na druhej strane syntetické súdy nové poznatky predstavujú. Ak má byť metafyzike oprávnené pripisovaný štatút vedy, musí produkovať nové poznatky, a teda pravdivé syntetické súdy. Analytické súdy môžu tvoriť dôležitú súčasť metafyzického bádania, no ich úloha v ňom je iba pomocná.<sup>2</sup> Predpokladom metafyziky ako vedy je jasné uvedomenie si povahy analytických a syntetických súdov, ako aj rozdielu medzi nimi. Od poznatkov, ktoré má metafyzika produkovať, sa navyše očakáva, že to nebudú súdy týkajúce sa náhodných skutočností, ktoré sú predmetom našej zmyslovej skúsenosti. Štatút metafyziky vyžaduje, aby jej pravdy boli nezávislé od náhodného diania vo svete, aby boli *apriórne*, teda nevyhnutné a prísne všeobecné.<sup>3</sup> Súdy metafyziky ako vedy musia byť *syntetické a priori*.

Druhou príčinou stavu, v ktorom sa metafyzika nachádza, je podľa Kanta skutočnosť, že metafyzici sa nepýtali, ako je možné produkovať súdy, ktoré majú byť pravdami metafyziky – ako sú možné syntetické súdy *a priori* –, a nepýtali sa ani na to, či je vôbec v rámci ľudských možností a schopností poznatky takéhoto druhu nadobúdať. Skrátka, nepýtali sa na podmienky možnosti metafyziky ako vedy. To je úlohou Kantovej kritiky čistého rozumu.

**1.2. Kant o rozdieloch medzi analytickými a syntetickými súdmi.** V úvode ku *Kritike čistého rozumu* Kant píše: „Vo všetkých súdoch, v ktorých sa myslí vzťah subjektu k predikátu..., je tento vzťah možný dvojako. Alebo predikát *B* patrí k subjektu *A* ako niečo, čo je (skryté) v tomto pojme *A* obsiahnuté, alebo je *B* mimo pojmu *A*, aj keď sa s ním spája. V prvom prípade nazývam súd *analytickým*, v druhom *syntetickým*. Analytické súdy (kladné) sú teda tie, v ktorých sa myslí spojenie predikátu so subjektom na základe identity, kým tie, v ktorých sa toto spojenie myslí bez nej, nech sa nazývajú syntetickými“ ([17], 62).

V tejto formulácii sa za kritérium analytickosti kladného subjekt-predikátového súdu formy „*A* je *B*“ pokladá skutočnosť, že pojem predikátu zastúpeného výrazom *B* je *obsiahnutý* v pojme subjektu zastúpeného výrazom *A*. Aby sme lepšie pochopili povahu tohto vzťahu daných pojmov, musíme si bližšie všimnúť hlavné črty teoretických názorov na povahu pojmov, z ktorých Kant vychádzal.

Ide predovšetkým o názor, že pojem je *všeobecnou predstavou*. Dôležitým bodom, v ktorom sa zhodujú dve tradície, ktoré mali na Kanta silný vplyv (teda „domáca“ nemecká tradícia i „zahranica“ britská empiristická tradícia), je chápanie predstavy ako analógie

<sup>1</sup> Presné znenie Kantových definícií uvádzam v časti 1. 2.

<sup>2</sup> „Lebo analytické súdy sú síce veľmi dôležité a potrebné, ale iba na to, aby sme získali pojmovú jasnosť, potrebnú na spoľahlivú a rozsiahlu syntézu ako na skutočne novú vymoženosť“ ([17], 63 – 64).

<sup>3</sup> Kant o apriórnych súdoch píše: „Ide tu o znak, podľa ktorého môžeme spoľahlivo odlišiť čisté poznávanie od empirického. Skúsenosť nás síce učí, že niečo je také a také, ale neučí nás, že to nemôže byť aj iné. Ak sa teda nájde, *po prvé*, veta myslená ako *nevyhnutná*, je to apriórny súd. Ak okrem toho nie je vyvodená z nijakej inej vety, ktorá zasa sama platí ako nevyhnutná, je celkom apriórna. *Po druhé*, skúsenosť nikdy nedáva svojim súdom ozajstnú alebo prísnu, ale iba predpokladanú a komparatívnu *všeobecnosť* (získanú indukciou), takže sa vlastne musí povedať: Ako sme doteraz pozorovali, z tohto alebo onoho pravidla niet výnimky. Ak sa teda nejaký súd myslí prísne všeobecne, t. j. tak, že sa nepripúšťa možnosť výnimky, tak nie je odvodený zo skúsenosti, ale platí celkom apriórne“ ([17], 58).

(vizuálneho) *obrazu*. Meier, autor učebnice logiky, ktorú Kant často pri prednáškach používal, píše, že „predstavy sú maľby alebo obrazy (Gemälde oder Bilder) tých vecí, ktoré si predstavujeme“ (cit. podľa [6], 9). David Hume píše: „Všetky percepcie ľudskej mysle môžeme rozdeliť na dva odlišné druhy, ktoré nazývam *impresie* a *idey*. Rozdiel medzi nimi spočíva v stupni sily a sviežosti, s akými dopadajú na myseľ a dostávajú sa do nášho myslenia a vedomia. Percepcie, ktoré vstupujú s najväčšou silou a prudkosťou, môžeme nazvať *impresiami*: pod tento názov zahŕňam všetky naše vnemy, vášne a emócie v podobe, v akej sa po prvýkrát objavujú v mysli. Pod ideami rozumiem vyblednuté obrazy impresií v myslení a usudzovaní“ ([16], 1).

Chápanie pojmu ako analógie vizuálneho obrazu nám umožňuje o čosi lepšie porozumieť vzťahu pojmov zastúpených výrazmi  $A$  a  $B$ , ktorý je základom analytickosti súdu formy „ $A$  je  $B$ “. Vezmime si napríklad súd „Zlato je žltý kov“. V tomto súde vystupujú tri pojmy – všeobecné predstavy –, zastúpené výrazmi *zlato*, *žltý* a *kov*. Podľa Kanta je v povahe všeobecnej predstavy zastúpenej výrazom „zlato“ to, že všeobecné predstavy zastúpené výrazmi *žltý* a *kov* sú časťami tejto predstavy (aj keď sú časťami mnohých iných predstáv, napríklad tých, ktoré sú zastúpené výrazmi *žlté jablko* či *kovový meč*); podobne oči, uši, nos atď. osoby  $X$  sú časťou portréту osoby  $X$  (portrét ich obsahuje).

Proti tomuto prístupu sa okamžite vynára nasledujúca námietka: Takéto chápanie vzťahu obsiahnutia pojmu  $B$  v pojme  $A$  ruší objektivitu Kantovho vymedzenia analytickosti. Ak sú totiž pojmy zastúpené výrazmi predstavami, tak je možné, že nejaký súd formy „ $A$  je  $B$ “ je analytický pre osobu  $X$ , no nie pre osobu  $Y$ , pretože tieto dve osoby môžu s výrazmi „ $A$ “ a „ $B$ “ spájať odlišné predstavy.

Kant však k definícii analytickosti pristupuje aj z odlišnej strany. Na inom mieste píše: „Veta: ‚Nijaká vec nesmie mať predikát, ktorý jej protirečí‘, nazýva sa vetou protirečenia a je všeobecným, i keď len negatívnym kritériom všetkej pravdy... Túto vetu však možno používať aj v pozitívnom zmysle, t. j. nielen na vylúčenie nepravdivosti a omylu (ak sa zakladajú na protirečení), ale aj na poznanie pravdy. Lebo či už je súd negatívny, alebo pozitívny, ak je *analytický*, jeho pravdivosť sa na základe vety o protirečení musí dať vždy dostatočne poznať. Vždy je totiž správne popierať opak pojmu obsiahnutého a mysleného v poznatku o objekte, sám pojem však musíme nevyhnutne afirmovať, lebo jeho opak by protirečil predmetu“ ([17], 155).

Majme subjektový výraz  $A$  a predikátový výraz  $B$ . Podľa tejto formulácie je pojem zastúpený výrazom  $B$  obsiahnutý v pojme zastúpenom výrazom  $A$  vtedy, keď je súd „ $A$  je nie- $B$ “ sporný. V takom prípade je súd „ $A$  je  $B$ “ analytický.

Skúsme sa však spýtať, ako zistíme, či je nejaký súd formy „ $A$  je nie- $B$ “ sporný. Vychádzame z predpokladu, že spor má vo všeobecnosti tvar „ $(p \wedge \sim p)$ “, kde  $p$  je ľubovoľný súd, pričom vetu o protirečení chápeme ako tvrdenie  $\sim(p \wedge \sim p)$ .<sup>4</sup> Ak má byť nejaký súd

<sup>4</sup> Je možné namietat', že takéto chápanie vety o protirečení nie je historicky adekvátne: pri úvahách o Kantových názoroch hovorí Bolzano ([3], 139) o „vete o identite“ a o „vete o protiklade“, pričom uvádza vetné formy „ $A$  je  $A$ “ a „ $x$  je buď  $A$ , alebo non- $A$ “. V modernej notácii majú uvedené vety podobu „ $(\forall x)(A(x) \supset A(x))$ “, resp. „ $(\forall x)(A(x) \vee \sim A(x))$ “. „ $(\forall x)(A(x) \vee \sim A(x))$ “ je zrejme – rovnako ako „ $(\forall x)(A(x) \supset A(x))$ “ – ekvivalentné s „ $(\forall x)(\sim A(x) \vee A(x))$ “, pričom „ $(\forall x)(\sim A(x) \vee A(x))$ “ je ekvivalentné s „ $(\forall x)\sim(A(x) \wedge \sim A(x))$ “. Ak abstrahujeme od konkrétnej podoby atomárneho výroku  $A(x)$  – čiže ak  $A(x)$  nahradíme výrokovou premennou  $p$ , tak dostaneme „ $\sim(p \wedge \sim p)$ “ čiže formuláciu, ktorú používame v hlavnom texte.

formy „ $A$  je nie- $B_i$ “ sporný, musí byť možné redukovať ho na nejaký súd spornej formy „ $(p \wedge \sim p)$ “. To docielime tak, že okrem pravdivosti súdu „ $A$  je nie- $B_i$ “ (prvý predpoklad) predpokladáme aj to, že obsah pojmu zastúpeného subjektovým výrazom  $A$  je vymedzený pomocou obsahov pojmov zastúpených predikátovými výrazmi  $B_1, \dots, B_i, \dots, B_n$  (druhý predpoklad). Z druhého predpokladu vyplýva pravdivosť súdov „ $A$  je  $B_1$ “, ..., „ $A$  je  $B_i$ “, ..., „ $A$  je  $B_n$ “. Predpokladajme ďalej, že každý súd formy „ $A$  je nie- $B_i$ “ je ekvivalentný so súdom formy „Nie je pravda, že  $A$  je  $B_i$ “, skrátene „ $\sim(A \text{ je } B_i)$ “ (tretí predpoklad). Videli sme, že z druhého predpokladu vyplýva okrem iného aj pravdivosť súdu „ $A$  je  $B_i$ “, no z prvého a tretieho predpokladu vyplýva pravdivosť súdu „ $\sim(A \text{ je } B_i)$ “. To znamená, že z našich predpokladov vyplýva ako súd formy „ $p$ “, tak aj súd formy „ $\sim p$ “ (pričom premenná  $p$  v oboch prípadoch zastupuje ten istý súd), teda aj súd spornej formy „ $(p \wedge \sim p)$ “. Súdom „ $A$  je  $B_i$ “ je teda analytický.

Proti tomuto prístupu však možno namietat', že obsahuje bludný kruh. Konkrétne, aby sme zistili, že nejaký súd formy „ $A$  je  $B$ “ je analytický, musíme túto skutočnosť už predpokladať. Pripomeňme totiž, že podľa Kanta sú analytické súdy *vysvetleniami* pojmov v tom zmysle, že nám jasne ukazujú, čo tvorí obsah pojmu subjektu. Ak je teda obsah pojmu zastúpeného výrazom  $A$  vymedzený pomocou obsahov pojmov zastúpených výrazmi  $B_1, \dots, B_i, \dots, B_n$ , tak úplné vysvetlenie pojmu zastúpeného výrazom  $A$  má podobu uvedenia všetkých súdov „ $A$  je  $B_1$ “, ..., „ $A$  je  $B_i$ “, ..., „ $A$  je  $B_n$ “. Platí aj obrátená implikácia. Navyše si však musíme uvedomiť, že ak chceme hovoriť o úplnom vysvetlení pojmu zastúpeného výrazom  $A$ , tak musíme predpokladať, že tieto súdy sú nielen pravdivé, ale aj analytické. V predchádzajúcom odseku sme sa pokúsili zrekonštruovať argumentáciu, ktorá vedie k uvedomeniu si spornosti nejakého súdu formy „ $A$  je nie- $B_i$ “, a v dôsledku toho (v súlade s Kantovým druhým návrhom) k dôkazu analytickosti príslušného súdu „ $A$  je  $B_i$ “. Ako druhý predpoklad v tejto argumentácii sme boli nútení uviesť tvrdenie, že obsah pojmu zastúpeného výrazom  $A$  je vymedzený pomocou obsahov pojmov zastúpených slovami  $B_1, \dots, B_i, \dots, B_n$ . Teraz však vidíme, že táto podmienka je ekvivalentná s tvrdením, že súdy „ $A$  je  $B_1$ “, ..., „ $A$  je  $B_i$ “, ..., „ $A$  je  $B_n$ “ sú nielen pravdivé, ale aj analytické. Ak sú *všetky* tieto súdy analytické, tak je samozrejme analytický aj súd „ $A$  je  $B_i$ “, čo je žiadaný záver uvedeného argumentu. Vidíme teda, že priamym dôsledkom jedného z predpokladov uvedeného argumentu je jeho záver.

Kant sa pri vymedzovaní kritéria analytickosti súdu formy „ $A$  je  $B$ “ odvoláva na skutočnosť, že pojem zastúpený slovom  $B$  je obsiahnutý v pojme zastúpenom slovom  $A$ . Následne uvádza dve kritériá rozhodovania o tom, či je pojem zastúpený slovom  $B$  skutočne obsiahnutý v pojme zastúpenom slovom  $A$ . Proti prvému kritériu možno namietat', že ruší objektivitu analytickosti tým, že ju vzťahuje na predstavy rôznych osôb, zatiaľ čo proti druhému kritériu možno namietat', že predpokladá kruhový argument.

Proti uvedeným kritériám však existuje aj tretia námietka, ktorej pôvodcom je A. J. Ayer ([1], 104 – 105). Ayer namieta, že Kantove formulácie neobjasňujú rozdiel medzi analytickým a syntetickým, keďže vymedzujú rôzne množiny súdov. Píše: „Kant neponúka jediné jasné kritérium rozlišovania medzi analytickými a syntetickými proposíciami, ale ponúka dve odlišné kritériá, ktoré vôbec nie sú ekvivalentné“ ([1], 104).

Zatiaľ čo prvé kritérium – ktoré Ayer nazýva psychologickým – sa odvoláva na vzájomné vzťahy pojmov ako predstáv a na to, čo si v pojmoch myslíme ([17], 65), druhé kritérium – ktoré Ayer nazýva logickým – sa odvoláva na vetu o protirečení (pozri [17],

155). Kant podľa Ayera predpokladá ekvivalenciu týchto kritérií. Podľa Ayera však ide o nesprávny predpoklad, pretože možno nájsť súdy, ktoré sú analytické podľa jedného z uvedených kritérií, no syntetické podľa druhého. Taká je podľa neho napríklad veta „ $7 + 5 = 12$ “. Nieкто totiž môže myslieť na súčet 7 a 5, no nemyslieť pritom na 12, z čoho však vôbec nevyplýva, že pravdivosť vety „ $7 + 5 = 12$ “ môžeme poprieť bez toho, aby sme sa zaplietli do protirečenia.

**1.3. Zváženie námietok proti Kantovi.** Pokúsme sa čeliť uvedeným námietkam. Začnime pokusom domyslieť prvé kritérium rozhodovania o tom, či je pojem zastúpený výrazom  $B$  obsiahnutý v pojme zastúpenom výrazom  $A$  ([17], 62). Kant sa v ňom – v súlade s myšlienkovými prúdmi, ktoré mali na Kanta najvýraznejší vplyv – odvoláva na vzájomné vzťahy pojmov ako predstáv, resp. na to, čo si v daných pojmoch „myslíme“. Terminológia, ktorú tu Kant používa, dala vzniknúť námietke, podľa ktorej toto kritérium vedie k subjektívizácii analytickosti.

Táto námietka stojí na predpoklade, že keď Kant používa termín „pojem“ v zmysle „predstavy“, resp. keď sa pri charakterizácii analytickosti odvoláva na to, čo v pojmoch „skryte myslíme“, hovorí o privátnych obsahoch vedomia konkrétnych ľudí. Proti tomuto predpokladu však možno namietat’ v duchu A. Coffa ([6], 12). Východiskom jeho námietky sú niektoré Kantove tvrdenia týkajúce sa analýzy pojmov. Píše napríklad: „Keď nejaký pojem diferencujem, obsah môjho poznania touto čírou analýzou vôbec nenarastá... [pomocou analýzy] sa učím lepšie alebo s jasnejším vedomím diferencovať to, čo už bolo v danom pojme“ (cit. podľa [6], 11).

V nadväznosti na Descarta Kant hovorí, že predstava je „jasná“, keď sme si tejto predstavy vedomí, zatiaľ čo predstava je „diferencovaná“, vtedy, keď si jasne uvedomujeme rozmanitosť danú v tejto predstave ([6], 10). Kant tvrdí, že proces analýzy nám sprostredkúva čoraz diferencovanejšie chápanie pojmov, no pojmy samotné sa v procese analýzy nemenia. To však protirečí chápaniu pojmov ako konkrétnych obsahov vedomia. Určitý pojem totiž môže mať časti, ktoré si bezprostredne neuvedomujeme. Jasné uvedomenie týchto častí nám sprostredkúva pojmová analýza. Počas procesu analýzy sa menia konkrétne obsahy vedomia (uvedomujeme si čoraz viac častí daného pojmu), no pojem sám sa nemení. Pojem teda nemožno stotožňovať s konkrétnymi obsahmi vedomia. Záverom tohto argumentu je teda konštatovanie, že existujú prinajmenšom intersubjektívne platné kritériá správnosti analýzy pojmov, teda intersubjektívne kritériá analytickosti súdov. Prvá námietka proti prvej Kantovej formulácii je tým spochybnená.

Tým je však do určitej miery spochybnená aj tretia (Ayerova) námietka proti Kantovej formulácii. Tá totiž stojí na doslovnom chápaní Kantových tvrdení o „predstavách“ a „myslení jedného pojmu v druhom“, v dôsledku ktorého Ayer rozlišuje medzi „psychologickým“ a „logickým“ kritériom. Predchádzajúce odseky však ukázali, že takéto doslovné chápanie je v rozpore s určitými tvrdeniami samotného Kanta. Tieto rozpory prekonáme, ak Kantove tvrdenia o „predstavách“ a „myslení jedného pojmu v druhom“ nebudeme chápať doslovne.

**2. Frege o analytickosti.** Práca nemeckého logika a matematika G. Fregeho nadväzuje na výrazný trend, prítomný v matematike 19. storočia, totiž na úsilie o *aritmizáciu matematickej analýzy* [7]. Tento trend má dve významné stránky. Predovšetkým ho charak-

terizovalo úsilie o odstránenie akéhokoľvek odvolávania sa na *nazeranie* na základe matematickej argumentácie (resp. na základe definícií matematických pojmov); bol teda odmietavou reakciou na Kantovu filozofiu matematiky. Matematici pridriavajúci sa tohto trendu sa namiesto toho usilovali dôležité pojmy matematickej analýzy (ako napr. pojmy limity či spojivosti) definične redukovat' pomocou pojmov prináležiacich aritmetike. Dôsledkom toho bolo *hlbšie vzájomné prepojenie* matematických disciplín a úsilie o *jasné definičné vymedzenie významov pojmov*, s ktorými matematici narábali.

Frege sa stotožňuje s hlavnými ideami tohto spôsobu práce, no v úsilí o jasné vymedzenie významov pojmov sa nezastavuje pri matematickej analýze. Svoju pozornosť totiž sústreďuje na aritmetiku a usiluje sa o definičnú redukciu jej najdôležitejších pojmov na pojmy a princípy *logiky*. Cieľom tohto programu, známeho pod názvom *logicizmus*, je redukcia rozmanitých matematických disciplín (aritmetika, algebra, analýza) na pojmy a princípy logiky (pozri [21]; [22]). Zdá sa, že kľúčovou inšpiráciou tohto úsilia bola úvaha nad aplikovateľnosťou aritmetiky. Frege píše: „Počítat' je možné prakticky všetko, čo môže byť predmetom myslenia: nech je to ideálne alebo reálne, pojmy rovnako ako veci, všetko časové i priestorové, udalosti i telesá, metódy i poučky; počítat' je dokonca možné i samotné čísla“ ([12], 94). Existuje iba jediná ďalšia disciplína, ktorá je rovnako široko aplikovateľná – logika. Základné princípy aritmetiky teda už v istom zmysle prináležia logike ([9], 44), ich povahu však treba osvetliť vhodnými definíciami pomocou pojmov prináležiacich logike a vhodným zdôvodnením na základe všeobecných logických princípov.

Šlo teda o úsilie definične redukovat' matematiku (alebo jej prevažnú časť) na najabstraktnejšie princípy správneho usudzovania a na pojmy, pomocou ktorých sú tieto princípy artikulované. Aby však Frege mohol tento cieľ reálne dosiahnuť, musel mu prispôbiť samotnú logiku. Klasická aristotelovská subjekt-predikátová logika totiž bola absolútne nepostačujúca, no nepostačujúca bola aj modernejšia algebra logiky [2]. Tá síce modelovala princípy správneho usudzovania v matematickej terminológii, no na to, aby bola vhodná na *definičnú* redukciu matematických pojmov, jej chýbala dôležitá časť – *rozvinutá* teória kvantifikácie, t. j. možnosť v jednom výroku vzájomne kombinovať viacero kvantifikátorov ([15], 169 – 170). Všetky tieto vplyvy a potreby sa odzrkadlili na podobe logických kalkulov, vďaka ktorým je Frege považovaný za jedného z tvorcov modernej symbolickej logiky (pozri najmä [10]; [13]; [14]).

**2.1. Fregeho vymedzenie analytickosti.** V práci *Grundlagen der Arithmetik* sa Frege v tomto duchu venuje pojmu čísla. Usiluje sa ukázať, že vety aritmetiky možno odvodiť pomocou definície čísla, ktorá obsahuje výlučne pojmy prislúchajúce logike, a tiež to, že takáto definícia čísla je jediná prípustná. V závere zhrňa základný zámer knihy takto: „Dúfam, že som v tomto spise učinil pravdepodobným, že aritmetické zákony sú analytické súdy, a teda a priori. V dôsledku toho by aritmetika bola len ďalej rozvinutá logika, každá aritmetická veta by bola logickým zákonom, avšak odvodeným“ ([11], 78). Vidíme teda, že v tejto práci mal pre Fregeho pojem analytickosti zásadný význam. Na vec však treba hľadiť v kontexte Fregeho logicistického zámeru. Tomu prispôsobuje aj svoje vymedzenie množiny analytických výrokov: „Teraz ide o to, aby sme našli dôkaz a sledovali ho až k prvým pravdám. Ak na tejto ceste narazíme iba na všeobecné logické zákony a definície, tak je to analytická pravda; pričom predpokladáme, že sa prihliada aj na tie vety, na ktorých je založená povedzme prípustnosť nejakej definície“ ([11], 12 – 13). Pri úsilí zistiť, či je

nejaký výrok analytický, je podľa Fregeho kľúčové sledovať *zdôvodnenie* tohto výroku. Keďže sa Frege v *Grundlagen* sústreďuje na matematické výroky, požaduje špeciálny druh zdôvodnenia – *dôkaz*.<sup>5</sup> Ak sa dôkaz výroku opiera výlučne o logické zákony a definície, tak skúmaný výrok je analytický. To, že zdôvodnenie výroku je pre otázku jeho analytickej podstaty, je podľa Fregeho niečím, čo má jeho chápanie analytickej spoločné s Kantovým chápaním. Frege píše: „Tým, prirodzene, nechcem do tých slov vkladať nový zmysel, ale iba vystihnúť to, čo pod tým dávnejší autori, obzvlášť *Kant*, mysleli“ ([11], 12, poznámka).

Hneď na začiatku si treba všimnúť *relatívnosť* Fregeho vymedzenia množiny analytických výrokov. Pre Fregeho je totiž výrok analytický vtedy, keď ho možno dokázať výlučne vychádzajúc zo všeobecných logických zákonov na základe definícií pomocou pojmov prislúchajúcich logike a logických pravidiel správneho usudzovania. Všimnime si však, že toto vymedzenie dáva množinu analytických výrokov do vzťahu s konkrétnym logickým systémom, konkrétne s axiómami, pravidlami odvodzovania a so základným pojmom konkrétneho systému.<sup>6</sup> Ak sa totiž pýtame na všeobecné logické zákony a na pravidlá a pojmy, pomocou ktorých máme skúmaný výrok *dokázať*, odpoveďou bude vždy poukazanie na konkrétny logický systém (resp. jazyk [5], 39). Formálny dôkaz je totiž vždy dôkazom v rámci určitého formálneho systému.

Relatívnosť Fregeho definície si možno uvedomiť aj v inej súvislosti: Fregeho definíciu budeme buď vzťahovať na konkrétny systém, alebo sme nútení priznať, že ten istý výrok je aj nie je analytický, čo je isto nežiaduce, ak chápeme Fregeho definíciu tak, že má množinu analytických výrokov určiť *jednoznačne*.<sup>7</sup> Vezmime si napríklad výrok  $(\sim p \supset p) \supset p$ , ktorý je teorémou Fregeho systému z [10],<sup>8</sup> no nie je teorémou Heytingovho intuicionistického kalkulu ([20], 79). Ak je nejaký výrok teorémou určitého systému, tak ho možno dokázať na základe axióm tohto systému za použitia pravidiel odvodzovania tohto systému; spĺňa teda podmienky, na základe ktorých je podľa Fregeho analytický. No ak Fregeho definíciu chápeme nezávisle od konkrétneho systému, tak sme nútení priznať, že výrok  $(\sim p \supset p) \supset p$  je aj nie je analytický. Ak sa budeme brániť námietkou, že v týchto dvoch prípadoch ide v podstate o dva rozdielne výroky, keďže „intuicionistická“ implikácia a negácia podliehajú iným pravidlám ako „klasická“ implikácia a negácia, tak v podstate odmietame hovoriť o porovnaní postavenia *jedného* výroku v *dvoch* systémoch. Tým však ku konkrétnemu systému nevzťahujeme iba *analytickosť* daného výroku, ale aj jeho *identitu*. Z toho však vyplýva, že o analytickej nejakého výroku nemá zmysel hovoriť nezávisle od daného systému.

Ak je teda naším cieľom jednoznačné vymedzenie množiny „analytických“ výrokov, tak Fregeho definícia nám buď nevyhovie (ak z nejakého dôvodu nebudeme chápať „dôkaz“ ako „formálny dôkaz v konkrétnom formálnom systéme“), alebo vymedzí nanajvýš množinu výrokov „analytických-vzhľadom-na-systém-*F*“ (skrátene „*F*-analytických“), kde *F* je premenná, za ktorú možno dosadzovať mená systémov určených ich jazykom (základné termíny, syntax, definované termíny), axiómami a pravidlami odvodzovania. Frege

<sup>5</sup> Niektorí bádatelia dokonca zastávajú názor, že podľa Fregeho sú všetky zdôvodnenia deduktívnymi dôkazmi. Pozri napr. ([4], 13).

<sup>6</sup> Carnap ([5], 39) pripomína, že na túto skutočnosť upozornil už W. Dubislav [8].

<sup>7</sup> „Presná definícia musí... jednoznačne špecifikovať referenciu definovaného termínu“ ([9], 177).

<sup>8</sup> Ide o vetu (43), ktorá je dokázaná v §17.

však prišiel s konkrétnymi systémami formulovanými za konkrétnym účelom, takže môžeme predpokladať, že s jeho zámermi sa lepšie zhoduje chápanie  $F$  nie ako premennej, ale ako mena konkrétneho systému. V roku 1884 mal Frege iba jeden takýto systém – systém z práce *Begriffsschrift*.<sup>9</sup>

V prípade výroku  $(\sim p \supset p) \supset p$  sme nepoužívali definované termíny, ktoré sú však v rámci Fregeho logicistického programu životne dôležité. Frege to zdôrazňuje i vo svojej definícii analytickosti, keď hovorí, že treba prihliadať aj na definície a na „tie vety, na ktorých je založená povedzme prípustnosť nejakej definície“. Dummett však proti spôsobu, akým sa Frege tejto úlohy zhostil, namietal: „Najväčší nedostatok Fregeho charakteristiky pojmov analytickosti a apriórnosti spočíva v tom, že neformuloval podmienky, za ktorých je nejaká definícia správna. Definície, na ktoré sa odvoláva pri dôkaze, ktorého existencia poukazuje na analytickosť alebo syntetickú apriórnosť dokazovaného výroku, zjavne musia byť správne, no v *Grundlagen* Frege jednoducho predpokladá, že správnu definíciu rozpoznáme, keď ju uvidíme“ ([9], 30).

Dôsledkom tejto situácie, ako upozorňuje Dummett, je to, že ak nepracujeme s nejakým kritériom správnosti definícií, tak môžeme skoro o každom výroku dokázať, že je  $F$ -analytický – stačí, ak termíny, ktoré tento výrok obsahuje, definujeme pomocou základných termínov Fregeho systému ([9], 32). Vo všeobecnosti je absurdné definovať napríklad predikát „byť mačkou“ pomocou základných termínov Fregeho logického systému, no ak nemáme poruke kritérium správnosti definícií, tak je prípustná každá definícia. To však Fregeho definíciu analytickosti znehodnocuje.

**2.2. Frege a Kant.** V tejto časti porovnáme Fregeho vymedzenie analytickosti s Kantovým. Ukáže sa, že charakteristiky, ktoré títo dvaja autori uviedli, špecifikujú dve rozdielne množiny výrokov.

Na jednu stránku tohto rozdielu upozorňuje už samotný Frege, ktorý Kantovi vyčíta: „Na základe jeho definície nie je rozdelenie súdov na analytické a syntetické vyčerpávajúce. On má na mysli prípad všeobecného kladného súdu. Potom môžeme hovoriť o pojme subjektu a opýtať sa, či je v ňom – podľa definície – obsiahnutý pojem predikátu. Ale ako, keď subjekt je jednotlivý predmet? Ako, keď ide o existenčný súd? V tomto zmysle potom nemôže byť ani reči o pojme subjektu“ ([11], 79). Kantova definícia podľa Fregeho bytostne závisí od pojmu „pojme subjektu“, z čoho vyplýva, že ju nemožno aplikovať tam, kde nemožno hovoriť o „pojme subjektu“. Tak je to napríklad v prípade, keď subjektom súdu je jednotlivý predmet (presnejšie: meno jednotlivého predmetu). Táto poznámka je zaujímavá z historického hľadiska, pretože nám napovedá, že v tomto období Frege odmietal spájať s jednotlivými predmetmi individuový pojem (ako *Sinn* mena objektu).<sup>10</sup>

Kantovo chápanie analytickosti je podľa Fregeho príliš úzke aj vzhľadom na prípady,

<sup>9</sup> To platí iba vtedy, ak formalizáciu výrokovej a predikátovej logiky prvého rádu nechápeme ako zavedenie dvoch rozdielnych systémov. To by znamenalo, že Fregeho definícia vymedzuje dve množiny: VL-analytické a PL-analytické výroky. (V závere *Begriffsschrift* Frege dokonca kvantifikuje cez predikáty – pracuje teda v PL druhého rádu.) Pokiaľ ide o Fregeho definíciu a jej súvislosť so systémom z práce *Begriffsschrift*, je zaujímavé, že po vydaní *Grundlagen* Frege až do r. 1924 analytickosť vôbec nespomínal. K tomu pozri ([9], 3).

<sup>10</sup> Bolo by zaujímavé uvažovať o tom, ako by to bolo v prípade, keby jednotlivý predmet ako subjekt súdu nebol zastúpený menom, ale individuovou deskripciou. Vyjadruje táto deskripcia „pojme subjektu“, alebo nevyjadruje?

v ktorých *možno* hovoriť o pojme subjektu, pretože Kant pracoval s príúzkym spektrom možných spôsobov vymedzovania pojmu. Frege píše: „Zdá sa, že Kant považuje priradenie atribútov pojmu za jeho vymedzenie; to je však jeden z najmenej plodných spôsobov tvorby pojmov. Ak si niekto prezrie definície, ktoré som podal v tejto knihe, tak sotva nájde nejakú definíciu tohto druhu... V týchto definíciách nenájdeme rad priradených atribútov, ale hlbšie, mohol by som povedať organickejšie spojenie určení... Plodnejšie vymedzenia pojmov kladú hranice, ktoré ešte vôbec neboli dané“ ([11], 79). Kant chápe obsah pojmu ako vymedzený pomocou niekoľkých atribútov. Frege, opierajúc sa o prax modernej matematiky, naproti tomu využíva mnohé iné spôsoby vymedzenia pojmu – napríklad spôsob *definovania abstrakciou*, pri ktorom sa na základe ekvivalencie (resp. podobnosti v určitom ohľade) dvoch rozdielných (a už známych) entít definuje identita *novej* entity. Príklad takejto definície Frege uvádza v §64 *Grundlagen*, kde za pomoci pojmu rovnobežnosti priamok definuje pojem smeru priamky. Tento spôsob vymedzovania pojmov využíva aj pri riešení centrálného problému *Grundlagen* – pri definovaní pojmu čísla.

Ďalším problémom Kantovej definície sú podľa Fregeho existenčné sudy. Keďže existencia nie je atribútom,<sup>11</sup> nemôžeme sa k uznaniu pravdivosti existenčného súdu formy „ $(\exists x)(P_1x \wedge \dots \wedge P_nx)$ “ dopracovať na základe atribútov, ktoré tvoria pojmy zastúpené premennými  $P_1, \dots, P_n$ .<sup>12</sup>

Fregeho vymedzenie analytickosti sa však od Kantovho líši aj v inom podstatnom smere. Pri posudzovaní analytickosti súdu formy „ $A$  je  $B$ “ totiž Kant nekladie na obsah pojmu zastúpeného výrazom  $A$  nijaké zvláštne požiadavky *toho druhu*, aké v obdobnej situácii kladie Frege. Frege totiž požaduje, aby pravdivosť analytického výroku bolo možné dokázať výlučne na základe všeobecných logických princípov, definícií pojmov vystupujúcich v danom výroku, *pomocou* základných termínov Fregeho kalkulu (alebo iných termínov, ktoré však už boli definované pomocou spomínaných základných termínov), ďalej viet, na ktorých stojí prípustnosť definícií, a pomocou odvodzovacích pravidiel systému. Z toho vyplýva, že Frege na použité definície kladie špeciálnu požiadavku: Významy definovaných termínov musia byť v konečnom dôsledku vymedzené pomocou základných termínov Fregeho kalkulu.<sup>13</sup>

Na ilustráciu tohto rozdielu si vezmeme výrok „Zlato je žltý kov“. Podľa Kanta ide o analytický výrok (súd), pretože „žltý“ a „kov“ sú atribúty obsiahnuté v pojme „zlato“. No ak tieto pojmy nemožno definovať pomocou základných pojmov Fregeho kalkulu a pravdivosť zvažovaného výroku následne dokázať na základe axióm, definícií a pravidiel Fregeho kalkulu, tak výrok „Zlato je žltý kov“ nie je podľa Fregeho analytický – nie je  $F$ -analytický, je však  $K$ -analytický (analytický vzhľadom na Kantovo kritérium).

Existuje teda výrok, ktorý je  $K$ -analytický, no nie je  $F$ -analytický. Z toho však vyplýva, že  $K$ -analytickosť je *inou vlastnosťou* výrokov než  $F$ -analytickosť.

<sup>11</sup> Čo dokazoval aj Kant. Pozri ([17], 372 – 376).

<sup>12</sup> Takouto analýzou sa však možno dopracovať k uznaniu pravdivosti súdu formy „ $\sim(\exists x)(P_1x \wedge \dots \wedge P_nx)$ “, a to v prípade, že sa medzi atribútmi tvoriacimi pojmy, ktoré sú zastúpené premennými  $P_1, \dots, P_n$ , nájde nejaká dvojica tvaru  $A_i, \sim A_i$ .

<sup>13</sup> Rozbor Fregeho definície pojmu čísla ukazuje, že v prípade pojmu Čísla ide o tieto základné pojmy: totožnosť, pojem, rozsah pojmu, vzťah,  $\forall$ ,  $\wedge$ ,  $\supset$ , premenná. Ak by sa v dôkaze určitého aritmetického tvrdenia vyskytovali termíny, ktoré nie je možné nakoniec definične zredukovať na základný slovník Fregeho logického systému, tak by zjavne nemalo zmysel hovoriť o *logickom* založení aritmetiky.

Porovnanie Kantových a Fregeho názorov ukončíme zdôraznením ďalšieho rozdielu. Spomenuli sme, že analytické sudy podľa Kanta nerozširujú naše poznanie, pretože iba jasne prezentujú to, čo si už v našich pojmoch myslíme – fungujú teda nanajvýš ako pripomenutia obsahov pojmov, ktoré používame.

Skúsme sa však spýtať, či to isté možno povedať aj o *F*-analytických výrokoch. Jasným príkladom skutočnosti, že *F*-analytické výroky môžu predstavovať rozšírenie nášho poznania, je samotný osud Fregeho systému z práce [13]. Ako sme už zdôraznili, Fregeho primárnym vedeckým cieľom bola redukcia aritmetiky na logiku, čo v nadväznosti na aritmetizáciu analýzy v konečnom dôsledku znamená redukciu veľkej časti matematických disciplín na logiku. Frege predstavil v práci [13] logický systém, na ktorého základe sa tento cieľ mal dosiahnuť, a v prácach [13] a [14] redukciu predviedol. To, že Fregeho jeho zámer nevyšiel, sa ukázalo v júli 1902, keď mu anglický matematik a filozof B. Russell poslal list, v ktorom ho informoval o parodoxe, ktorý v jeho systéme možno odvodiť.<sup>14</sup> Tento výsledok sa preslávil ako Russellov paradox<sup>15</sup> a úsilie o jeho prekonanie (a prekonanie iných, podobných paradoxov) sa stalo ústrednou motiváciou práce v matematickej logike na začiatku 20. storočia.

V kontexte našich úvah si treba uvedomiť, že paradoxné tvrdenie  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ , uvedené v poznámke 16, možno odvodiť z axióm Fregeho systému z *Grundgesetze* výlučne na základe definícií pomocou základných termínov tohto systému a pravidiel odvodzovania tohto systému. V §17 *Grundlagen* Frege píše: „Namiesto toho, aby sme rad úsudkov nadviazali bezprostredne na nejakú skutočnosť, môžeme, ponechajúc túto skutočnosť bokom, uviesť jej obsah ako podmienku. Tým, že takto všetky skutočnosti v rade myšlienok nahradíme podmienkami, dostaneme výsledok v takej forme, že následok bude závisieť od radu podmienok. Táto pravda by bola zdôvodnená výlučne myslením“ ([11], 26). To znamená, že namiesto toho, aby sme vždy, keď nastane nejaká skutočnosť *A*, tvrdili vetu *B*, môžeme tvrdiť vetu „Ak *A*, tak *B*“ nezávisle od toho, či *A* aktuálne nastáva, alebo nie. Ak vetu „Ak *A*, tak *B*“ možno zdôvodniť deduktívne („výlučne myslením“), tak je *F*-analytická.

Inštanciou tohto princípu je aj nasledujúca skutočnosť: Ak z výrokov  $A_1, \dots, A_n$  môžeme logicky odvodiť výrok *B*, tak môžeme tvrdiť výrok „Ak  $A_1$  a ... a  $A_n$ , tak *B*“.<sup>16</sup> Vezmime si teraz konjunkciu axióm a definícií systému *Grundgesetze I* a nazvime ju *K*. Pri koncipovaní axióm a definícií systému *Grundgesetze I* Frege isto nevedel, že z nich možno odvodiť spor, teda že (podľa uvedeného princípu) platí „Ak *K*, tak  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ “. Keďže výrok  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$  možno logicky odvodiť z axióm a definícií systému *Grundgesetze I*, tak výrok „Ak *K*, tak  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ “ je *F*-analytický. Keďže je na

<sup>14</sup> Český preklad tohto listu a Fregeho odpovede nájde čitateľ na s. 229 – 230 práce V. Kolman [19].

<sup>15</sup> Majme množinu *M* takú, že  $M = \{x \mid \sim(x \in x)\}$ . Platí  $M \in M$ ? Ak áno, tak *M* musí spĺňať podmienku „členstva“ v *M*, teda *M* je také *x*, že  $\sim(x \in x)$ . Potom ale platí  $\sim(M \in M)$ , teda  $(M \in M) \supset \sim(M \in M)$ . Ak  $M \in M$  neplatí, tak *M* nespĺňa podmienku „členstva“ v *M*, čiže *M* je také *x*, že  $\sim\sim(x \in x)$ , a teda  $(M \in M)$ . To znamená, že  $\sim(M \in M) \supset (M \in M)$ . Z  $(M \in M) \supset \sim(M \in M)$  a  $\sim(M \in M) \supset (M \in M)$ , ale vyplýva  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ .

<sup>16</sup> Tento princíp predznamenáva jednu polovicu známej vety o dedukcii, ktorú nezávisle od seba dokázali Herbrand a Tarski. S vetou o dedukcii v rôznej forme pracovali už Aristoteles, stoici, či Arnauld a Nicole. Pozri ([18], 320).

mieste konštatovať, že Russellov objav bol pre Fregeho prekvapením, môžeme tiež konštatovať, že „Ak K, tak  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ “ bolo pre Fregeho novým poznatkom. Videli sme však, že „Ak K, tak  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ “ je *F*-analytické tvrdenie, a teda *F*-analytické tvrdenia môžu predstavovať obohatenie nášho poznania. Bližšie k dôvodom tejto vlastnosti *F*-analytických výrokov pozri ([9], 36 – 42).

Proti tomuto spôsobu uvažovania možno namietat' dvom spôsobmi. Po prvé, už sme uviedli, že výrok je podľa Fregeho analytický vtedy, ak ho možno dokázať na základe axióm určitého systému S za prípadnej pomoci definícií niektorých výrazov, ktoré sa v danom výroku objavujú, pomocou primitívnych termínov daného systému. Ďalej sme uviedli, že „S“ je vo Fregeho koncepcii vhodnejšie pokladať za meno konkrétneho systému než za premennú. Uviedli sme však aj to, že pri písaní *Grundlagen* mal Frege k dispozícii iba jeden takýto systém, a sice systém z práce *Begriffsschrift*. Russellov paradox bol však odvodený zo systému *Grundgesetze*, takže pedantný kritik by mohol namietat', že na tvrdenie „Ak K, tak  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ “ sa Fregeho definícia analytickosti z *Grundlagen* neaplikuje. Po druhé, mohlo by sa namietat', že tvrdenie „Ak K, tak  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ “ predstavuje nový poznatok pre prirodzene obmedzené ľudské myslenie, čo však nie je črta samotného tvrdenia. Ak by v tomto smere bolo ľudské myslenie vyvinutejšie, tak by povedzme pri pohľade na množinu axióm nejakého systému okamžite dospelo k množine teorém tohto systému, takže formulovanie akejkoľvek teorémy by nepredstavovalo nový poznatok: Tvrdenie „Ak K, tak  $\sim(M \in M) \equiv (M \in M)$ “ je novým poznatkom v „epistemologickom“, no nie v podstatnejšom, povedzme „metafyzickom“, zmysle. Proti tejto námietke by sa dalo brániť takto: Pre uvažovanie o tom, či nejaké tvrdenie predstavuje nový poznatok, je relevantný iba „epistemologický“ zmysel termínu „nový poznatok“. Mohli by sme tiež pochybovať o tom, či tento termín má okrem „epistemologického“ aj nejaký iný zmysel.

(výňatok z diplomovej práce)

## LITERATÚRA

- [1] AYER, A. J.: *Language, Truth and Logic*, 2. vyd. Victor Gollanz 1946.
- [2] BOOLE, G.: *Investigations of The Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities*. London 1854.
- [3] BOLZANO, B.: *Výbor z filosofických spisů*. Praha: Svoboda 1981.
- [4] BURGE, T.: Frege on Apriority. In: P. Boghossian & Ch. Peacocke (vyd.): *New Essays on the A Priori*. Oxford: Clarendon Press 2000.
- [5] CARNAP, R.: *Logische Syntax der Sprache*. Wien: Springer-Verlag 1934.
- [6] COFFA, A.: *Semantic Tradition From Kant To Carnap*. Cambridge UP 1991.
- [7] DEDEKIND, R.: *Steigkeit und irrationale Zahlen*. Brunswick 1872.
- [8] DUBISLAV, W.: *Über die sogenannten analytischen und syntetischen Urteile*. Berlin 1926.
- [9] DUMMETT, M.: *Frege. Philosophy of Mathematics*. Cambridge (Mass.): Harvard UP 1991.
- [10] FREGE, G.: *Begriffsschrift*. Angl. prekl. in: J. van Heijenoort (vyd.): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879 – 1931*. Cambridge (Mass.): Harvard UP 1967, s. 1 – 82.
- [11] FREGE, G.: *Základy aritmetiky*. Bratislava: Veda 2001.

- [12] FREGE, G.: Ueber formale Theorien der Arithmetik. In: *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, XIX, s. 94 – 104.
- [13] FREGE, G.: *Grundgesetze der Arithmetik I*. Jena 1893.
- [14] FREGE, G.: *Grundgesetze der Arithmetik II*. Jena 1903.
- [15] HINTIKKA, J. – SANDU, G.: Revolution in Logic? In: *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1996, roč. 1, č. 2, s. 169 – 183.
- [16] HUME, D. (1739/40): *A Treatise of Human Nature*. Oxford UP 1978.
- [17] KANT, I. (1787): *Kritika čistého rozumu*, 2. vyd. Bratislava: Nakladateľstvo Pravda 1979.
- [18] KNEALE, W. – KNEALE, M.: *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press 1962.
- [19] KOLMAN, V.: *Logika Gottloba Frega*. Praha: Filosofia 2002.
- [20] MLEZIVA, M.: *Neklasické logiky*. Praha: Nakladatelství Svoboda 1970.
- [21] RUSSELL, B. – WHITEHEAD, A. N.: *Principia Mathematica*. 3 vols. Cambridge: Cambridge UP 1910 – 1913.
- [22] RUSSELL, B.: *Jazyk a poznanie. State a prednášky z rokov 1901 – 1924*. Prel. M. Zouhar. Bratislava: Kalligram 2005.

---

Mgr. Igor Sedlár  
Katedra logiky a metodológie vied FiF UK  
Šafárikovo nám. 6.  
818 01 Bratislava 1  
SR.  
igor.sedlar@fphil.uniba.sk