FILOZOFIA
Roč. 56, 2001, č. 5

EPISTEMOLOGICKÉ ASPEKTY DEJÍN MODERNEJ ALGEBRY

LADISLAV KVASZ, Katedra humanistiky FMFI-UK, Bratislava

KVASZ, L.: Epistemological Aspects of the History of Modern Algebra
FILOZOFIA 56, 2001, No 5, p. 309

The aim of the paper is to reconstruct the epistemological shifts in the development of algebraic thought during the period reaching from Lagrange to Noether. We believe that, first, it illustrates the usefulness of Wittgenstein's concept of *pictorial form* (we prefer to call it *form of language*), because the evolution of algebra can most clearly be described as the development of form of language. Secondly, our analysis offers an example of *the development of a concept ("to solve an algebraic equation")*, thus bringing new material for the discussion of the nature of conceptual change. Finally, the development of algebra shows a resemblance with the *evolution of subjectivity* in western culture. The development of algebra can in this manner be seen in a broader evolutionary context.

Moderná algebra sa dostala do povedomia širšej verejnosti vďaka francúzskemu štrukturalizmu. J. Piaget v knihe *Štrukturalizmus* píše: *„Akékoľvek úsilie podať kritický výklad štrukturalizmu bez toho, že by sme začali rozborom matematických štruktúr, je vopred odsúdené na neúspech... Dnešná hlava sociálnej a kultúrnej antropológie Lévi-Strauss vyvodil svoje štrukturálne modely priamo zo všeobecnej algebry.*" ([7], 23). Nie je však bez zaujímavosti, že hneď za týmto citátom nasledujú slová: *„Zdá sa nesporné, že najstaršou známou štruktúrou, ktorá bola ako taká aj skúmaná, bola „grupa", ktorú objavil Galois a ktorá krok za krokom ovládla matematiku 19. storočia.*" Piaget sa tu dopúšťa nepresnosti. Prvou skúmanou algebraickou štruktúrou nebola grupa, ale pole.[1] Táto nepresnosť by nestála za reč, keby bola iba náhodným Piagetovým omylom. Bohužiaľ, Piaget iba opakuje názor, ktorý dnes prevláda v matematickej komunite a v pozadí ktorého stojí nepochopenie dejín algebry. Cieľom predkladanej state je podať rekonštrukciu vývinu modernej algebry a ozrejmiť epistemologický význam pojmu grupy, ktorý je bezosporu jedným z najvýznamnejších pojmov modernej matematiky. Stať voľne nadväzuje na článok *Epistemologické aspekty dejín klasickej algebry*, v ktorom sme sledovali vývin algebry od al-Chwárizmího po Lagranga. Možno ju však čítať aj samostatne, lebo je od predošlého článku nezávislá. V predošlom článku sme ukázali, ako došlo k spredmetneniu jazyka algebry, keď z odmocňovania vznikla odmocnina, zo sčítania súčet, až sa nakoniec zrodil symbolický jazyk, ktorý umožnil nájsť

---

[1] Definície a príklady pojmov pole a grupa nájde čitateľ v ďalšom texte.

riešenie rovníc tretieho a štvrtého stupňa. Matematici sa však márne pokúšali nájsť riešenie aj pre rovnice piateho stupňa. Napriek intenzívnemu úsiliu sa nikomu nepodarilo tieto rovnice vyriešiť. Porozumenie príčinám tohto neúspechu bolo hlavným triumfom modernej algebry.

1. Interpretatívna forma[2] jazyka: algebra ako teória oborov veličín (od Lagranga po Gaussa). Hlavným prínosom interpretatívnej formy jazyka v algebre bolo prijatie odmocnín zo záporných čísel pod názvom komplexné čísla medzi štandardné matematické veličiny. Prijatie komplexných čísel je spojené so zvecnením ďalšej vrstvy jazyka algebry, zvecnením, ktoré sa však odohralo úplne inak než zvecnenie sprevádzajúce zrod algebraickej symboliky. Kým pri zrode symboliky došlo k zvecneniu jednotlivých činností, teda k nahradeniu odmocňovania odmocninou či sčítania súčtom, pri prechode k interpretatívnej forme jazyka sa nezvecňujú činnosti. Odmocniť záporné číslo nie je možné, preto vlastne niet čo zvecňovať. Nemáme k dispozícii žiadny performatívny akt, ktorý by sme mohli prehlásiť za objekt. Odmocnina zo záporného čísla označuje skôr nemožnosť aktu, zlyhanie jazyka. Proces, ktorého zavŕšením je konštrukcia modelu komplexnej roviny, sa preto zásadne líši od zvecňovania činností.

Spočiatku išlo len o prekonanie nedôvery voči výrazom obsahujúcim odmocniny zo záporných čísel a o ich pripojenie k jazyku. Odmocniny zo záporných čísel sa považovali za zvláštny druh výrazov, o ktorých sa síce nedalo povedať, čo označujú, ale bolo v celku jasné, ako s nimi treba narábať. Už perspektivistická forma priniesla do jazyka algebry záporné čísla, teda výrazy, ktoré majú len nepriamu referenciu ([6], 799). Preto sa matematici pokúsili aj komplexné čísla vyložiť ako výrazy, ktorých referencia je nepriama. Takýto výklad komplexných čísel je však odsúdený na neúspech. Záporné číslo sa totiž substitúciou môže zmeniť na kladné, a možno ho teda považovať za „obraz obrazu vecí“; u komplexných čísel však takáto zámena možná nie je. Komplexné číslo nemôže udávať žiadny počet vecí, a to ani nepriamo, lebo komplexné čísla nemožno lineárne usporiadať, alebo, povedané Eulerovými slovami, *„nie sú ani menšie, ani väčšie ako nič“*.

Druhý pokus o výklad odmocnín zo záporných čísel sa zakladá na myšlienke nepripisovať im nepriamy, ale subjektívny význam. Descartes zaviedol termín ***imaginárne číslo*** na označenie odmocnín zo záporných čísel.[3] V *Geometrii* ([2], 379) píše, že v prípade rovnice, ktorá má málo pravých (*vraies*, t.j. kladných) alebo falošných (*fausse*, t.j. záporných) koreňov, si môžeme predstaviť (*imaginer*) ešte ďalšie, imaginárne (*imaginaires*) korene. Imaginárnym koreňom nezodpovedajú žiadne skutočné veličiny. Descartes ich zavádza len preto, aby polynóm n-tého stupňa

---

[2] Stručný prehľad jednotlivých štádií vývinu jazyka algebry môže čitateľ nájsť v závere state, kde sme ich zhrnuli do prehľadnej tabuľky.

[3] Z tohto názvu vzniklo označenie i pre výraz $\sqrt{-1}$, a tak miesto $2 + 3\sqrt{-1}$ dnes píšeme $2 + 3i$.

mal práve *n* koreňov. Euler vo svojej *Algebre* z roku 1770 píše o odmocninách zo záporných čísel, že „*nie sú ani väčšie, ani menšie ako nič; a nie sú ani nič, kvôli čomu ich musíme považovať za nemožné. Napriek tomu sa však predstavujú nášmu rozumu (Verstand), a nachádzajú miesto v našej obrazotvornosti (Einbildung); preto sa nazývajú aj imaginárne (eingebildete) čísla. Ale aj keď sú tieto čísla, ako napríklad* $\sqrt{-4}$, *podľa svojej povahy úplne nemožné, máme o nich dostatočný pojem, lebo vieme, že tým je naznačené číslo, ktoré násobené samé sebou dá ako výsledok -4; a tento pojem je dostačujúci na to, aby sa tieto čísla podrobili pravidlám počítania* ([3], 61)." Pre Eulera sú teda komplexné čísla veličiny, ktoré existujú len v našej imaginácii. Táto subjektívna interpretácia komplexných čísel však nevie objasniť, ako je možné, že výpočty pomocou týchto neexistujúcich veličín vedú k platným výsledkom o reálnom svete. Je to podobné, ako keby biológ úvahami o kentauroch systematicky prinášal stále nové poznatky o koňoch a biológia by neustále potvrdzovala predpovede, ku ktorým ho jeho úvahy o kentauroch priviedli. Ak komplexné čísla umožňujú odhaliť poznatky o skutočnosti, musia s touto skutočnosťou nejako súvisieť. Preto ich subjektívna interpretácia je neuspokojivá.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) vytvoril roku 1799 geometrický model komplexných čísel v tvare roviny. Problém s komplexnými číslami bol vyriešený nie tak, že by sa našla cesta, ako postupnosťou substitúcií priradiť výrazu $\sqrt{-1}$ referenciu v reálnom svete. Miesto toho došlo k zvecneniu všetkých možných výrazov, ktorým nevieme priradiť referenciu, a až pre tento súbor všetkých imaginárnych čísel sa vytvoril model. Základná idea modelu komplexných čísel spočíva teda v tom, že sa nesnažíme interpretovať jednotlivé komplexné čísla, ale zvecníme celok sveta komplexných čísel. Nehľadáme interpretáciu pre jedno komplexné číslo, ale model pre celý ich obor. Gaussova rovina je tak **prvým modelom v dejinách matematiky**, po prvýkrát sa tu konštruuje určité umelé univerzum objektov, v ktorom sa potom interpretuje jazyk ako celok. Gauss v tvorbe modelu predbieha Beltramiho o takmer 70 rokov. Z epistemického hľadiska sú si však Gaussov model komplexných čísel a Beltramiho model neeuklidovskej geometrie ([4], *119-123*) veľmi blízke. Predovšetkým, v oboch prípadoch slúži model na to, aby z **určitej problematickej teórie urobil akceptovateľnú teóriu**. Pred Gaussom mali komplexné čísla pochybný status, podobne ako pred Beltramim bol nejasný status neeuklidovskej geometrie. Základná podobnosť medzi Gaussovou rovinou a Beltramiho modelom spočíva v tom, že obaja **aktualizujú celok sveta**. Beltrami pomocou svojho modelu aktualizoval celok sveta neeuklidovskej geometrie. V dejinách geometrie až po Beltramiho svet vždy ubiehal von z obrázku, reprezentácie zachytávali vždy len fragment sveta. Naproti tomu Beltrami reprezentuje celok neeuklidovského sveta, keď horizont zobrazuje pomocou kružnice a priamky pomocou jej tetív. Podobne Gaussova rovina reprezentuje celok sveta komplexných čísel. Aj keď na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že keď komplexné čísla modeluje pomocou roviny, tak mu celok uniká, lebo rovina sa vymyká celkovému pohľadu. Ale nesmieme zabúdať, že Gaussov model nie je modelom geometrických čiar, ale je modelom algebraických výrazov. Preto i keď z geometrického hľadiska Gaussova rovina ubieha von zo zorného poľa, z algebraického hľadiska zachytáva celok sveta. Svet algebry je svetom činností, svetom operácií. Preto celok sveta znamená v algebre nie „byť celý pred očami", ale „byť uzavretý na operácie". A Gauss ukázal, že „súčet", „súčin", „rozdiel„ a „podiel" dvoch bodov komplexnej roviny vytvára opäť bod tejto roviny. Teda Gaussova rovina predstavuje uzavreté univerzum, v ktorom možno interpretovať všetky algebraické operácie. Ďalšia podobnosť medzi Gaussovým a Beltramiho modelom spočíva v tom, že v oboch ide o **zabudovanie prekladu do syntaxe jazyka**. Gauss priraďuje komplexnému číslu bod roviny, pričom ukazuje, ako možno algebraické operácie sčítania a násobenia komplexných čísel preložiť do jazyka geometrických operácií s bodmi roviny.[4] Beltrami zas priraďuje neeuklidovskej rovine body kruhu euklidovskej roviny, pričom ukazuje, ako sa pojmy neeuklidovskej geometrie dajú preložiť do jazyka euklidovskej geometrie tohto kruhu.

Gauss použil svoj model na dôkaz *základnej vety algebry*, ktorá hovorí, že každý polynóm n-tého stupňa má práve n koreňov. Len čo Gauss túto vetu dokázal, s definitívnou platnosťou sa vyjasnilo, že problém s rovnicami piateho stupňa, napríklad s rovnicou $x^5 - 6x + 3 = 0$ nespočíva v tom, že by nemali korene. V komplexnej rovine existuje presne päť takých bodov, že keď ich súradnice dosadíme do rovnice za neznámu, rovnica bude splnená. Problém s rovnicami piateho stupňa je teda subtílnejší. Spočíva v tom, že aj keď korene existujú, **nie je možné vyjadriť ich prostriedkami jazyka algebry**. To znamená, že neexistuje vzorec, neexistuje formula vytvorená z celých čísel, aritmetických operácií (+, −, x, :) a odmocnín ($\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[17]{\ }$, $\sqrt[542]{\ }$, ...), ktorá by vyjadrovala tieto čísla. Aby sme túto situáciu mohli lepšie pochopiť, predstavme si obrovský hárok papiera, najlepšie nekonečný, na ktorom sú už napísané všetky algebraické vzorce. Sú na ňom formuly pozostávajúce z 500, 1 000, 1 000 000 alebo ľubovoľného iného konečného počtu znakov. Chceme dokázať, že na tomto papieri nie je napísaný ani jeden z piatich koreňov rovnice $x^5 - 6x + 3 = 0$. Ako to dokážeme? Nie je ťažké nahliadnuť, že keď sčítame, odčítame, vynásobíme alebo vydelíme dve algebraické formuly, opäť dostaneme algebraickú formulu. To znamená, že výrazy napísané na našom hárku papiera tvoria určitý uzavretý systém, ktorý sa odborne nazýva **pole**. Musíme teda ukázať, že toto pole neobsahuje žiadny koreň uvedeného polynómu. Takto vidíme základnú epistemologickú výhodu, ktorú prináša interpretatívna forma jazyka svojím zvecnením celku sveta. Z modálneho tvrdenia, že sa niečo nedá urobiť, že korene rovnice nemožno vyjadriť prostriedkami algebry, sa stáva extenzionálne tvrdenie, že riešenie danej rovnice nepatrí do určitého poľa. Takto vďaka zvecneniu sveta

[4] Napríklad číslu 7 + 2i priradil bod roviny, ktorého x-ová súradnica je 7 a y-ová súradnica je 2. Sčítaniu komplexných čísel zodpovedá posunutie roviny a násobeniu otočenie s rovnoľahlosťou.

algebraických výrazov začíname tušiť, v čom je problém s rovnicami piateho stupňa. Problém nie je v tom, že by tieto rovnice nemali riešenia, ale v tom, že jazyk algebry nedokáže tieto riešenia vyjadriť. Zvecnenie sveta algebraických výrazov tak umožňuje pochopiť jav neriešiteľnosti. Neriešiteľnosť určitej rovnice znamená, že jej korene ležia za hranicami sveta algebraických výrazov. Aby však bolo možné dokázať neriešiteľnosť rovníc piateho stupňa, muselo dôjsť k zvecneniu ďalšej vrstvy jazyka. Matematici museli prejsť od teórie polí a k teórii grúp.

2. Integratívna forma jazyka: algebra ako teória symetrií (od Gaussa po Galoisa). V rámci interpretatívnej formy jazyka došlo k spredmetneniu sveta algebry. Svet algebry je tvorený určitým poľom, t.j. súborom veličín uzavretým na operácie +, −, x, :. Ukazuje sa, že existuje celý rad rôznych polí, celý rad svetov, od najmenšieho poľa Q všetkých racionálnych čísel (čísel ako 5, $\frac{7}{12}$, 0, $\frac{-4}{3}$) cez o niečo bohatšie polia ako $Q(\sqrt{2})$ (pole, ktoré vznikne, keď k racionálnym číslam pridáme $\sqrt{2}$ a všetky čísla typu $a + b\sqrt{2}$, kde a a b sú racionálne, aby tento súbor bol uzavretý na aritmetické operácie) až po najväčšie pole C všetkých komplexných čísel. Svet algebry sa nachádza niekde medzi poľami Q a C. Je bohatší než pole racionálnych čísel Q, lebo napríklad iracionálne číslo $\sqrt{2}$ je plnoprávnym obyvateľom sveta algebry. Na druhej strane je však chudobnejší než pole všetkých komplexných čísel C, lebo napríklad Ludolfovo číslo π doň nepatrí (ako ukázal roku 1882 F. Lindemann). Aby sme mohli ukázať, že ani korene rovnice $x^5 - 6x + 3 = 0$ nepatria do sveta algebry, teda že ich nie je možné vyjadriť žiadnym algebraickým vzorcom, musíme predovšetkým presnejšie uchopiť samotný svet algebry, pochopiť, ako vyzerá súbor všetkých algebraických výrazov. Na zvládnutie tejto úlohy už interpretatívna forma jazyka algebry nestačí. Tá síce dokáže uchopiť určitý svet ako celok, prípadne aj pomocou prekladu prechádzať z jedného sveta do druhého, ale nedokáže porovnávať rôzne svety. Je to preto, lebo preklad pri prechode z vonkajšieho jazyka do vnútorného (z geometrického jazyka Gaussovej roviny do algebraického jazyka komplexných čísel) sa stále pohybuje v tej istej abstraktnej štruktúre. Preklad je umožnený práve tým, že z abstraktného hľadiska sú komplexné čísla a Gaussova rovina vlastne rovnaké (izomorfné). Rozdiel je len v „nosičoch" tejto štruktúry - raz sú to čísla, inokedy body roviny. Ale samotná štruktúra, teda formálne vzťahy, sú v oboch prípadoch tie isté. Preto interpretatívna forma sa vlastne stále pohybuje v jedinej štruktúre, ktorú len prenáša z jedného „média" do druhého.

Až prechodom k integratívnej forme jazyka, prechodom od prekladov (izomorfizmov) k vnoreniam (homomorfizmom), sa otvára možnosť porovnať rôzne štruktúry. Pritom opäť existuje celý rad analógií medzi spôsobom, akým prešli Cayley a Klein k integratívnej forme jazyka geometrie, ([4], 123-128), a tým, ako Evariste Galois (1811-1832) prešiel k tejto forme v algebre. Prvým spoločným bodom je existencia určitej **neutrálnej bázy**, určitej fundamentálnej úrovne opisu, do ktorej sa vnoria porovnávané štruktúry. V geometrii bola touto neutrálnou bázou projektívna rovina a jednotlivé geometrie sa porovnávali ako štruktúry vnorené do projektívnej roviny. V algebre je touto neutrálnou bázou pole komplexných čísel a všetky polia, s ktorými pracuje Galois, sú vnorené do tohto poľa. Druhým spoločným bodom je úloha, ktorú v oboch prípadoch hrá **teória grúp**. Rovnako ako v geometrii prebieha porovnávanie geometrických štruktúr prostriedkami teórie grúp, aj v algebre je teória grúp základným nástrojom umožňujúcim porovnať rôzne polia. Preto možno povedať, že integratívna forma jazyka vnorí rôzne svety do spoločnej neutrálnej bázy a potom metódami teórie grúp porovnáva štruktúry symetrií týchto svetov. Dôkaz neriešiteľnosti rovníc piateho stupňa je technicky náročný. Aby sme sprehľadnili nasledujúci výklad, rozdelili sme ho na niekoľko krokov.

2. 1. Epistemologický výklad pojmu grupy ako systému symetrií určitého sveta. Uvažujme najprv všeobecnú rovnicu tretieho stupňa

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Od Gaussa vieme, že táto rovnica má tri korene, ktoré si označíme α_1, α_2, α_3. Tieto korene existujú ako body na komplexnej rovine. Pomocou čísel α_1, α_2, α_3 môžeme vytvoriť svet, ktorý prislúcha uvažovanej rovnici, t.j. najmenšie pole, ktoré obsahuje jej korene. Toto pole sa označuje symbolom $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Je to pole, ktoré vznikne, keď k racionálnym číslam pridáme korene α_1, α_2, α_3 a všetko, čo treba pridať, aby vzniklo pole (napríklad $5\alpha_1 + 7\alpha_2$ a ľubovoľné iné kombinácie, aby sme dostali súbor uzavretý na operácie +, –, x a :). Zatiaľ nás nezaujíma, či tento svet možno vytvoriť prostriedkami algebry. Vlastne to už vieme, lebo poznáme Cardanove vzorce, ale predbežne budeme tento fakt ignorovať a budeme skúmať pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ nezávisle od toho, či prislúcha rovnici, ktorú vieme riešiť, alebo nie. Našim cieľom je pozrieť sa, ako vyzerajú symetrie tohto poľa.

Svet algebry nie je svetom odkrytým zraku. Je to svet, ktorý vznikol zvecnením algebraických operácií. Za epistemický subjekt jazyka algebry možno preto považovať subjekt vykonávajúci tieto operácie. V geometrii mal subjekt podobu hľadiska, v algebre preto možno hovoriť o akomsi „hľadisku slepca".[5]

[5] Ako sme uviedli v predošlom článku, jazyk algebry vzniká zvecnením motorických aktov. Epistemickým subjektom jazyka algebry je nositeľ týchto aktov. Keď ho nazývame slepcom, nemáme na mysli skutočnú slepotu. Ide nám len o odmyslenie si zraku ako spôsobu orientácie vo svete. Svet algebry nie je odkrytý zraku. Je to svet odkrývaný pomocou motorických schém. Keď sa nevidiaci učí orientovať v určitej budove, napríklad v škole, musí si pohyb v budove zafixovať. Orientuje sa nie pomocou zraku, ako to robíme my, ale pomocou schém premiestňovania sa po budove. Budova nie je dobrým príkladom, lebo ešte stále je to objekt, ktorý existuje aj v našom zrakovo konštituovanom svete. Budova má určitý tvar, určité priestorové vzťahy. Nevidiaci používajú motorické schémy iba na kompenzáciu svojho handicapu, ale svet, v ktorom sa pohybujú, je geometricky konštituovaný svet. Predstavu o svete algebry si môžeme utvoriť vtedy, keď si úplne odmyslíme akúkoľvek geometrickú reprezentáciu skutočnosti a predstavíme si, že máme svet konštituovaný výlučne pomocou

Hľadisko slepca však nie je vo svete jednoznačne fixované. Je to podobné ako v geometrii, kde hľadisko tiež nie je určené jednoznačne, ale možno meniť jeho polohu posúvaním horizontu. Rovnako v algebre potom, ako došlo k zvecneniu sveta algebry v podobe poľa, nie je poloha epistemického subjektu v tomto svete jednoznačne určená a treba ju formálne fixovať. Kým v geometrii je však poloha hľadiska vo svete určená pomocou horizontu, teda čiary, ku ktorej ubieha svet v odkrytosti zraku, v algebre je hľadisko slepca určené skôr pomocou význačných objektov ako 0 a 1. Nula určuje počiatok, kde subjekt „stojí", a jednotka udáva smer a veľkosť „kroku". Tieto objekty sú jasne odlíšené, lebo $0 + 0 = 0$, kým $1 + 1 \neq 1$, a teda slepec ich vie rozlíšiť na základe toho, ako sa správajú pri algebraických operáciách. Akonáhle sa slepec naučí identifikovať tieto objekty, vie si pomocou aritmetických operácií vytvoriť ľubovoľné racionálne číslo.

Keď však obohatíme svet slepca o čísla α_1, α_2, α_3, teda keď od poľa $\boldsymbol{Q}$ prejdeme k poľu $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, vynorí sa zásadná komplikácia. Slepec nevie čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ od seba odlíšiť. Vie, že sú rôzne, ale nevie rozlíšiť, či drží v ruke α_1, alebo α_2. Tieto čísla spĺňajú rovnicu (1), ale tú spĺňajú všetky tri. K ich číselnej hodnote, ktorá určuje ich polohu na komplexnej rovine, jazyk algebry nemá prístup. Algebra pripúšťa iba konečný počet krokov výpočtu, kým určenie hodnoty koreňov rovníc vyžaduje vo všeobecnosti nekonečný proces aproximácie, čo je algebre cudzie. Z hľadiska algebry sú čísla α_1, α_2, α_3 predbežne nerozlíšiteľné alebo aspoň nie je jasné, ako ich možno rozlíšiť algebraickými prostriedkami. Na uchopenie tejto nerozlíšiteľnosti slúži pojem grupy. To, že veličiny α_1, α_2, α_3 sú nerozlíšiteľné, znamená, že možno zmeniť ich poradie bez toho, aby sa to akokoľvek prejavilo na poli $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Hovoríme, že pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ je voči tejto zmene symetrické. Je to určitá analógia pravo-ľavej symetrie, známej z geometrie. V oboch prípadoch ide o to, že s určitým objektom môžeme niečo spraviť a objekt pritom ostáva nezmenený. Symetrie poľa si môžeme predstaviť aj ako premiestnenia slepca v jeho svete, ktoré si nemôže všimnúť.

Uvažujme teda svet rovnice tretieho stupňa, t.j. pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Slepec nevie individuálne identifikovať jednotlivé korene rovnice, preto sa môže stať, že si myslí, že si ich pred sebou zoradil ako α_1, α_2, α_3, a v skutočnosti pred ním spočívajú v poradí α_2, α_3, α_1. Nie je ťažké nahliadnuť, že popliesť sa môže práve $3.2.1 = 6$ spôsobmi, lebo na prvom mieste môže byť hociktorý z troch koreňov, na druhom môže byť hociktorý zo zvyšných dvoch, no a na poslednom mieste už musí byť ten posledný. Aby sme nemuseli stále vypisovať alfy, budeme písať len indexy, takže napríklad α_2, α_3, α_1 zapíšeme ako (2, 3, 1). Potom všetky možné poradia sú:

$$(1, 2, 3), \quad (1, 3, 2), \quad (2, 3, 1), \quad (2, 1, 3), \quad (3, 1, 2); \quad (3, 2, 1). \qquad (2)$$

Teda pole $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ prislúchajúce rovnici tretieho stupňa má šesť rôznych symetrií. Tieto symetrie možno navzájom skladať. Napríklad keď po

---

schém transformácií.

prehodení prvého a druhého prvku, čím vytvoríme poradie (2, 1, 3), prehodíme prvý s tretím, dostaneme výsledné poradie (3, 1, 2). Je zaujímavé si všimnúť, že tento výsledok sa líši od výsledku, ktorý by sme dostali, keby sme tieto prehodenia urobili v opačnom poradí. Keby sme najprv prehodili prvý prvok s tretím, vytvorili by sme poradie (3, 2, 1), a keď teraz prehodíme prvý prvok s druhým, dostaneme výsledok (2, 3, 1), čo sa odlišuje od predošlého výsledku.

Symetrie určitého poľa spolu s operáciou skladania tvoria určitý uzavretý systém, ktorý matematici nazývajú **grupou**. Grupa je teda niečo podobné ako pole, je to určitý súbor objektov uzavretý na určité operácie. Jediný rozdiel je v tom, že kým pole tvorili čísla a vyžadovali sme uzavretosť voči štyrom aritmetickým operáciám, prvky grupy sú (zvecnené) *operácie* a uzavretosť sa vyžaduje voči ďalšej operácii, operácii ich skladania. V prípade grupy máme tak do činenia s operáciami na dvoch úrovniach. Jednak sú operáciami prvky grupy a okrem toho je tu ešte operácia ich skladania. Teda grupa je určitý uzavretý svet operácií, podobne, ako pole je uzavretý svet veličín. V pojme grupy tak dochádza k zvecneniu ďalšej vrstvy jazyka algebry. Potom, ako zvecnením sveta algebraických operácií vzniklo pole, teraz sa zvecňujú symetrie tohto poľa.

2. 2. Grupy symetrií polí, ktoré prislúchajú riešiteľným rovniciam. Potom, ako sme z epistemologického hľadiska objasnili pojem grupy, vráťme sa k príkladu s rovnicou tretieho stupňa. Už vieme, že pole $Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, prislúchajúce tejto rovnici, má najviac šesť rôznych symetrií. Teraz si chceme utvoriť o týchto symetriách jasnejšiu predstavu. Za týmto účelom zaviedol Augustin Cauchy (1789-1857) rozlíšenie medzi permutáciou a substitúciou. ***Permutácie***, ktoré budeme zapisovať ako (1, 3, 2), predstavujú symetrie poľa $Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vo zvecnenej podobe a udávajú rôzne poradia, v akých sú uložené korene α_1, α_2, α_3. Naproti tomu ***substitúcie***, ktoré budeme zapisovať ako $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, predstavujú tie isté symetrie v nezvecnenej podobe ako operácie. Dvojriadková tabuľka hovorí, že jednotka ostáva na mieste, dvojka prejde na miesto trojky a trojka na miesto dvojky. Vo všeobecnosti v tabuľke horné číslo udáva, kto sa hýbe, a dolné číslo udáva, kam sa pohne. Pritom v oboch príkladoch je uvedená tá istá symetria, ale raz ako zvecnená v podobe permutácie (1, 3, 2), teda určitého usporiadania koreňov, kým v druhom prípade ako substitúcia $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, teda ako činnosť. Samozrejme, každej permutácii prislúcha práve jedna substitúcia a naopak každej substitúcii prislúcha práve jedna permutácia, stačí len pripísať respektíve zmazať horný riadok. Preto rozdiel medzi týmito pojmami je len epistemologický.

Pre zrod teórie grúp bol však tento rozdiel dôležitý. Z toho, že každej permutácii zodpovedá substitúcia, vieme, že aj substitúcií je šesť. Takto máme dve podoby toho istého – zvecnenú a nezvecnenú podobu symetrií poľa $Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. To umožnilo Galoisovi zaujímavý trik – pozrieť sa, čo sa stane, keď **aplikujeme určitú substitúciu na všetky permutácie**. Keď aplikujeme substitúciu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ na permutáciu (2, 1, 3), vieme, že 2 sa zmení na 3, 1 sa zmení na 2 a 3 sa zmení na 1, teda výsledkom bude permutácia (3, 2, 1). Galois zvecnil súbor všetkých permutácií a začal skúmať, čo sa stane s týmto súborom, keď na všetky permutácie aplikuje tú istú substitúciu. Keď na permutácie

(1, 2, 3), (1, 3, 2), ***(2, 3, 1),*** (2, 1, 3), ***(3, 1, 2),*** (3, 2, 1)

aplikujeme substitúciu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, dostaneme

(2, 3, 1), (2, 1, 3), ***(3, 1, 2),*** (3, 2, 1), ***(1, 2, 3),*** (1, 3, 2).

Na prvý pohľad sa nič nestalo, jednotlivé permutácie si iba vymenili svoje miesta. Pozoruhodné je však to, že tri permutácie, ktoré sme zvýraznili, sa premiešali medzi sebou, a zvyšné tri opäť medzi sebou.

Ukazuje sa teda, že permutácie možno rozdeliť do dvoch skupín či blokov

(1, 2, 3), ***(2, 3, 1),*** ***(3, 1, 2)*** a (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1).

Ľubovoľná substitúcia buď mieša permutácie len vnútri týchto blokov (ako to robila substitúcia $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$), alebo prehodí bloky ako celky. Ale neexistuje žiadna substitúcia, ktorá by premenila permutáciu (1, 2, 3) na niektorú z permutácií druhého bloku, kým zvyšné dve permutácie prvého bloku, teda (2, 3, 1) a (3, 1, 2), by ponechala v prvom bloku. Teda žiadna substitúcia neruší hranice blokov. Bloky buď stoja na mieste, alebo sa hýbu ako celok. Nikdy nenastane situácia, že by sa časť jedného bloku presunula do druhého bloku a zvyšok by ostal na mieste. Galois pochopil, že práve rešpektovanie blokov pri substitúciách súvisí s tým, že rovnica tretieho stupňa je riešiteľná. Dá sa ukázať, že každé pole, ktoré vieme vytvoriť pomocou odmocnín, má veľmi špeciálnu štruktúru symetrií. Symetrie takýchto polí sa vždy rozpadajú na niekoľko blokov, pričom daný blok sa ďalej rozpadá na jednoduchšie bloky, až nakoniec dostaneme blok, ktorého počet prvkov je rovný prvočíslu (v našom prípade to je 3), čím rozkladanie končí.

2. 3. Neriešiteľnosť rovníc piateho stupňa. Zavedením pojmu grupy symetrií dosiahol ani nie dvadsaťročný francúzsky matematik Evariste Galois úroveň abstrakcie, ktorá umožnila porozumieť, prečo sú rovnice piateho stupňa vo všeobecnosti neriešiteľné. Už na predošlej úrovni, v rámci interpretatívnej formy jazyka, Gauss dokázal, že každá rovnica n-tého stupňa má na komplexnej rovine práve n koreňov. Preto každá rovnica piateho stupňa má päť koreňov, a teda ku každej rovnici piateho stupňa existuje pole $Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ obsahujúce jej korene. Problém riešiteľnosti rovníc piateho stupňa sa tak transformoval na problém, či príslušné pole $Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ možno vytvoriť algebraickými prostriedkami. A tu poskytuje integratívna forma jazyka zásadne nový pohľad na problematiku riešiteľnosti. Namiesto Gaussovej otázky, či je možné pole $Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ vytvoriť pomocou algebraických formúl, Galois kladie otázku, či má grupa symetrií poľa $Q(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ takú štruktúru, ako grupy symetrií všetkých polí, ktorých prvky sú vytvorené pomocou algebraických formúl, teda či sa dá rozložiť na čoraz menšie a menšie bloky. To znamená, že treba vziať súbor všetkých permutácií piatich prvkov (ktorých je 5.4.3.2.1 = 120) a vyskúšať, čo sa s týmto súborom bude diať, keď naň budeme aplikovať zodpovedajúce substitúcie. Presne to urobil Galois a zistil, že jediné delenie, ktoré môžeme urobiť, je delenie na dva bloky po 60 prvkoch. Keď sa obmedzíme na jeden z týchto blokov, dostaneme 60 prvkovú grupu, ktorá je asi jednou z najzaujímavejších grúp vôbec. Dostala zvláštne meno, volá sa alternujúca grupa piatich prvkov. Keď si Galois vypísal všetkých jej 60 permutácií a pozrel sa, čo s nimi robia príslušné substitúcie, zistil, že tu zrazu končí akékoľvek rešpektovanie hraníc a substitúcie bezhlavo miešajú všetkých 60 permutácií alternujúcej grupy. V tejto grupe neexistujú žiadne bloky, do ktorých by sme mohli rozdeliť jej prvky. Objav tejto skutočnosti bol jedným z najprekvapujúcejších momentov v dejinách algebry.

V každom poli, ktoré je vytvorené pomocou algebraických prostriedkov, sa jeho grupa symetrií rozkladá na súbor do seba zapadajúcich blokov. Galoisov objav, že v prípade alternujúcej grupy piatich prvkov takéto rozdelenie neexistuje, ukázal, že pole prislúchajúce k tak nevinne vyzerajúcej rovnici ako $x^5 - 6x + 3 = 0$ má natoľko „zamotanú" štruktúru symetrií, že ho nemôžeme vytvoriť pomocou vzorcov, nech by sme sa o to akokoľvek snažili. Preto rovnice piateho, a teda aj ľubovoľného vyššieho stupňa, sú vo všeobecnosti neriešiteľné. Riešiteľnosť rovníc je výnimočný jav, týkajúci sa malého počtu rovníc s jednoduchými grupami symetrií. Rovnice tretieho a štvrtého stupňa sú riešiteľné len preto, že polia, ktoré týmto rovniciam prislúchajú, majú tak jednoduché grupy symetrií, že ich možno rozložiť do blokov. Ale počnúc rovnicou piateho stupňa sú už im prislúchajúce grupy symetrií nerozložiteľné, a preto sú tieto rovnice vo všeobecnosti neriešiteľné. Preto algebra musí opustiť svet vzorcov a **začať skúmať algebraické štruktúry**. Sú to práve štruktúry, ako napríklad alternujúca grupa piatich prvkov, ktoré rozhodujú o tom, čo je a čo nie je možné formálne vyjadriť. Objav alternujúcej grupy tak predstavuje začiatok modernej štrukturálnej algebry.

3. Konštitutívna forma jazyka: algebra ako teória abstraktných algebraických štruktúr (od Dedekinda po Webera). Pri výklade integratívnej formy jazyka sme ukázali, že táto forma sa zakladá na určitej neutrálnej báze, do ktorej vnorí rôzne štruktúry, ktoré potom porovnáva prostriedkami teórie grúp. U Kleina bola touto neutrálnou bázou projektívna rovina a v jej rámci porovnával prostriedkami teórie grúp rôzne geometrie, euklidovskú a neeuklidovské. Podobne u Galoisa tvorilo neutrálnu bázu pole komplexných čísel a v jeho rámci porovnával polia $Q(\alpha_1, ... \alpha_n)$, prislúchajúce rôznym rovniciam, a pomocou teórie grúp dokázal od seba odlíšiť polia, ktoré prislúchajú riešiteľným rovniciam, od polí, ktoré prislúchajú rovniciam neriešiteľným. Pritom v oboch prípadoch ďalší vývin spočíva v odstránení tejto neutrálnej bázy jazyka, teda v osamostatnení štruktúry od jej nositeľa. V geometrii k tomu došlo vtedy, keď Bernhard Riemann odstránil priestor ako nositeľa geometrickej existencie a vytvoril jazyk kombinatorickej topológie ([4], 132-142), ktorý umožňuje uvažovať objekty nezávisle od priestoru. Riemann tak oslobodil objekty z ich zajatia v priestore a úlohu konštitúcie objektov preniesol z priestoru na jazyk. Podobne v algebre keď Galois skúmal grupy symetrií, vždy predpokladal, že korene $\alpha_1,..., \alpha_n$, ktorých permutácie tvorili príslušnú grupu, existujú ako komplexné čísla. Takto komplexná rovina hrala v algebre úlohu analogickú úlohe projektívnej roviny v geometrii. Zaručovala existenciu objektov, v tomto prípade grúp symetrií. Ďalší krok vo vývine algebry bol nesený snahou skonštruovať grupy symetrií bez toho, že by sme museli siahnuť po komplexnej rovine. Táto idea pochádza od nemeckého matematika Heinricha Webera (1842-1913). Weber sa rozhodol pri konštrukcii rozšírenia poľa Q o prvok α nepostupovať tak ako Galois, ktorý si prvok α „vypožičal" z komplexnej roviny. Weber chce prvok α pridať k poľu Q čisto algebraickou cestou. Na prvý pohľad sa to môže javiť čudné, veď keď je α náhodou koreňom polynómu $x^5 - 6x + 3$, tak vieme, že ho nemožno vyjadriť pomocou žiadnej algebraickej formuly. Ako chcel pridať prvok α, keď sa tento nedá vyjadriť prostriedkami algebry? Tu si Weber pomáha pojmom ideálu. Pojem ideálu predstavuje nástroj umožňujúci rozprávať o objektoch, ktorých formálne vyjadrenia v jazyku neexistujú. Weberova konštrukcia je pomerne zdĺhavá, a preto si ju rozložíme na niekoľko krokov.

3. 1. Konštrukcia okruhu Q[x]. Uvažujme pole Q, ktoré chceme rozšíriť, a formálne k nemu pridajme jeden neinterpretovaný symbol, napríklad x. Dostaneme tak obor $Q[x]$, ktorý sa nazýva *okruh polynómov* nad poľom Q. Nie je to nič zvláštne, v podstate ho už poznáme. Je to iný druh uzavretého sveta, svet v ktorom sa odohráva sčítanie, odčítanie a násobenie polynómov. Okruh sa od poľa odlišuje len v tom, že v okruhu nemožno deliť, lebo delením polynómov nemusí vzniknúť polynóm. Okruh $Q[x]$ je tvorený polynómami všetkých možných stupňov, ktorých koeficienty patria do poľa Q:

$$Q[x] \;=\; \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0;\; a_i \in Q,\; n \in N\}$$

Zostrojenie okruhu $Q[x]$ je prvým krokom Weberovej konštrukcie. Okruh $Q[x]$ sa líši od poľa $Q(\alpha)$ jednak tým, že v ňom nemožno deliť, a ďalej tým, že prvok x je zatiaľ neurčitý, kým prvok α má presne vymedzené vlastnosti dané rovnicou, ktorej je koreňom. Preto v ďalšom kroku konštrukcie treba okruh $Q[x]$ modifikovať, „ušiť" na mieru prvku α. To robí Weber pomocou pojmu ideálu.

3. 2. Konštrukcia ideálu ($g(x)$). Uvažujme prvok α, ktorý chceme k poľu Q pridať. Vieme, že je koreňom určitého polynómu. Preto môžeme namiesto prvku α vziať polynóm, ktorého je koreňom, teda napríklad namiesto výrazu $\sqrt[3]{2}$ zobrať polynóm $g(x) = x^3 - 2$, ktorého je $\sqrt[3]{2}$ koreňom. V prípade koreňov polynómu piateho stupňa, kde už algebraické vyjadrenie nie je možné, zoberieme priamo príslušný neriešiteľný polynóm (napríklad $g(x) = x^5 - 6x + 3$). Pomocou polynómu $g(x)$ vytvoríme to, čo Dedekind nazval ideálom. Pojem ideálu sa dá najlepšie priblížiť na príklade celých čísel, ktoré tiež tvoria okruh, lebo celé čísla síce možno sčítať, odčítať a násobiť, ale nemožno ich deliť (napríklad 7:3 nie je celé číslo). Dedekindova idea spočíva v tom, že namiesto určitého čísla, napríklad čísla 6, budeme hovoriť o všetkých násobkoch šestky, teda o ideáli

$$(\mathbf{6}) = \{6a;\ a \in \mathbf{Z}\} = \{0, 6, -6, 12, -12, 18, -18, \ldots\}.$$

Pritom skutočnosť, že číslo 6 je deliteľné číslom 3, sa do jazyka ideálov premietne tak, že násobky šestky sú aj násobkami trojky, teda ideál (**6**) je podmnožinou ideálu (**3**). Samozrejme, to je triviálne. Netriviálne na teórii ideálov je to, že za určitých podmienok môžu existovať ideály, ktorých prvky nie sú násobkom žiadneho jedného čísla. Inak povedané, jazyk ideálov je vo všeobecnosti bohatší ako jazyk čísel. Ku každému číslu vieme vytvoriť ideál tvorený všetkými jeho násobkami, ale za istých podmienok môžu existovať aj ideály, ktoré takto vytvorené nie sú, ideály, ktorým v obore čísel nezodpovedá žiadny prvok. A práve preto Weber siahol po teórii ideálov. Namiesto celých čísel pracoval s polynómami, ale základná idea je rovnaká. Podobne ako Dedekind priradil číslu 6 ideál (**6**), Weber vzal všetky možné násobky polynómu $g(x)$ a vytvoril z nich ideál

$$(\boldsymbol{g(x)}) = \{g(x).f(x);\ f(x) \in \boldsymbol{Q}[x]\} = \{g(x).2x,\ g(x).x^2,\ g(x).(x^3 + 7x + 3),\ \ldots\}.$$

Pomocou takýchto ideálov možno skonštruovať abstraktné objekty, ktoré sú riešením rovníc, pre ktoré vo svete vzorcov neexistuje klasické riešenie. Táto konštrukcia sa zakladá na faktorizácii.

3. 3. Faktorizácia okruhu $Q[x]$ podľa ideálu $(g(x))$. Weberovým cieľom bolo vytvoriť rozšírenie poľa $\boldsymbol{Q}$ o prvok α, ktorý je koreňom polynómu $g(x)$. Označme toto rozšírené pole písmenom $\boldsymbol{L}$ (nechceme použiť označenie $\boldsymbol{Q}(\alpha)$, lebo číslo α používané Galoisom nepatrí do jazyka algebry). Na to, aby Weber vytvoril pole $\boldsymbol{L}$, použil konštrukciu, ktorú bežne poznáme z teórie čísel. V elementárnej aritmetike sa asi každý stretol s tým, že aj keď v celých číslach nemožno deliť (to je dôvod, prečo tvoria celé čísla okruh, a nie pole), možno v nich deliť so zvyškom. Tak pri delení číslom 6 môžeme dostať niektorý zo šiestich zvyškov 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5. Napríklad číslo 15 dáva pri delení 6 zvyšok 3, lebo 15 = 2.6 + 3. Túto skutočnosť možno preložiť do jazyka ideálov a vytvoriť namiesto jednoduchých zvyškov takzvané zvyškové triedy. Teória ideálov namiesto určitého čísla n berie všetky čísla, ktoré sú jeho násobkom, a vytvorí z nich ideál ($\boldsymbol{n}$). Podobne namiesto zvyšku k zoberie množinu všetkých čísel, ktoré dávajú rovnaký zvyšok ako k. Tak pri delení šiestimi namiesto zvyšku 3 budeme hovoriť o zvyškovej triede

$$\overline{3} = \{3 + 6a;\ a \in \mathbf{Z}\} = \{3, -3, 9, -9, 15, -15, \ldots\}.$$

Celá konštrukcia sa dá urobiť aj pre prípad polynómov. Jediný rozdiel je v tom, že zvyškových tried bude omnoho viac. Weberovi sa podarilo ukázať, že zvyškové triedy, ktoré dostane pomocou ideálu ($\boldsymbol{g(x)}$), tvoria pole (teda ich možno nielen sčítavať, odčítavať a násobiť, ale možno ich aj deliť), pričom toto pole je úplne rovnaké ako pole $Q(\alpha)$. Weberovi sa tak podarilo vytvoriť pole L bez toho, aby opustil algebru. Získal ho faktorizáciou okruhu $Q[x]$ podľa ideálu $(\mathbf{g}(x))$, teda

$$L = Q[x] \big/ (g(x)),$$

ako sa táto konštrukcia zvykne označovať. Symbol naznačuje, že pole L vzniká z okruhu $Q[x]$ ako súbor všetkých zvyškových tried pri delení ideálom $(g(x))$. Prvkom, ktorý v poli L zodpovedá prvku α poľa $Q(\alpha)$ (ktorý je riešením rovnice $g(x) = 0$), je trieda

$$\bar{x} = \{x + g(x).f(x);\ f(x) \in Q[x]\} = \{x + g(x).2x,\ x + g(x).x^2,\ x + g(x).(x^3 + 3), \dots\}.$$

Je to zvyšková trieda prvku x. Tvoria ju všetky polynómy, ktoré pri delení polynómom $g(x)$ dávajú zvyšok x. Jej prvky dostaneme, keď ku všetkým možným násobkom polynómu $g(x)$ pripočítame x. O tom, že trieda $\bar{x}$ je skutočne riešením príslušnej rovnice, sa možno presvedčiť priamym dosadením ľubovoľného prvku tejto triedy do príslušnej rovnice.

Na tejto konštrukcii vidno silu teórie ideálov. Táto teória umožňuje skonštruovať objekty, ktoré sú v pôvodnom jazyku neuchopiteľné. Weberovi sa podarilo skonštruovať abstraktný objekt, ktorý má po formálnej stránke všetky vlastnosti poľa $Q(\alpha)$, a teda obsahuje aj riešenie príslušného polynómu. Týmto riešením je trieda $\bar{x}$. Nie je to algebraický vzorec, ale určitý súbor polynómov. Preto Galoisov výsledok o neriešiteľnosti rovnice $x^5 - 6x + 3 = 0$ pomocou vzorcov ostáva zachovaný. Weberova konštrukcia však vrhá na tento výsledok nové svetlo. Ukazuje, že problém vlastne nie je v rovnici, ale v prostriedkoch, ktoré pri jej riešení používame. Keď sa nebudeme obmedzovať na svet vzorcov, každý algebraický polynóm sa stane v tomto novom, abstraktnom zmysle, riešiteľným.

Weber touto konštrukciou prináša do algebry konštitutívnu formu jazyka. Vo vývine geometrie konštitutívna forma jazyka prenáša úlohu konštituovať objekty z priestoru na jazyk. Tým sa obohacuje súbor objektov, ktoré tvoria predmet geometrie, geometria získava prístup k objektom, ktoré boli prv nepredstaviteľné, lebo ich existencia odporovala priestoru. Čosi veľmi podobné robí v algebre Weber. Pred Weberom algebra zakladala existenciu svojich objektov na možnosti ich symbolickej reprezentácie, a preto nebola schopná vyjadriť ani také jednoduché objekty, ako sú korene polynómu $x^5 - 6x + 3$. Weber túto situáciu zásadne mení. Oslobodzuje algebru od závislosti na vzorcoch a existenciu objektov zaručuje pomocou abstraktnej konštrukcie. Vo Weberovej faktorizácii možno vidieť analógiu s Riemannovými aktami rezania a lepenia ([4], 132-138). Kým Riemann stotožňuje okraje určitej plochy, Weber stotožňuje všetky objekty, ktoré dávajú rovnaký zvyšok pri delení ideálom. Oba sú to konštitutívne akty, ktoré umožňujú vytvoriť nové objekty, ktorých existencia bola predtým znemožnená úzkym pojatím jazyka. Pritom Weberov posun je imponujúci. Keď za riešenie rovníc prijmeme abstraktné objekty vytvorené v procese faktorizácie (teda keď prejdeme ku konštitutívnej forme jazyka), stáva sa každý polynóm riešiteľným. Pomocou faktorizácie vieme vytvoriť abstraktný objekt, ktorý je koreňom príslušného polynómu, nezávisle od toho, ktorého stupňa je polynóm. Preto vo Weberovom pojatí sú všetky polynómy riešiteľné. Jeho konštrukcia je pritom úplne univerzálna. Nie je to špeciálny trik fungujúci za určitých zvláštnych podmienok, pre niektoré špeciálne prípady. Je to univerzálna metóda, ktorá funguje vždy, pre všetky rovnice ľubovoľného stupňa a jednotným spôsobom.

4. Konceptuálna forma jazyka: axiomatické vymedzenie algebraických štruktúr (od Webera po Noetherovú). Vo svojej učebnici algebry [8] prináša Weber novú definíciu pojmu grupy. Je to prvá definícia, ktorá zahŕňa grupy s konečným aj s nekonečným počtom prvkov. Pred Weberom skúmali matematici len konečné grupy. Tie možno charakterizovať zákonom o krátení (t.j. požiadavkou, aby zo vzťahu $a.x = b.x$ vyplývalo $a = b$). V nekonečnom prípade je táto definícia nepoužiteľná a Weber ju preto nahradil požiadavkou existencie inverzného prvku (t.j. požiadavkou, aby ku každému x existoval prvok x^{-1} taký, že $x.x^{-1} = 1$). Táto požiadavka sa používa v definícii grupy podnes. Weberovým motívom na rozšírenie pojmu grupy aj na nekonečný prípad bolo to, že pojem grupy použil ako východisko pri definícii poľa: *„Z grupy vznikne pole, keď sú v nej možné dva spôsoby kompozície, z ktorých prvý sa nazýva sčítaním, druhý násobením“*. Weber bol tak jedným z prvých matematikov, ktorí začali vidieť pole tak, ako ho vidíme dnes, ako grupu, do ktorej je zavedená dodatočná operácia násobenia, teda vlastne ako spojenie dvoch grúp. Tým však zásadne mení vzťah, ktorý existoval medzi pojmom poľa a pojmom grupy v rámci integratívnej a konštitutívnej formy jazyka. V predošlých štádiách bolo pole svetom a grupa bola štruktúrou symetrií tohto sveta, pojem poľa bol teda prvotný a pojem grupy bol odvodený. Povedané s Kantom, pojem poľa bol predpokladom možnosti pojmu grupy. Weber stiera tento rozdiel. Z hľadiska novej, konceptuálnej formy jazyka sú všetky pojmy epistemologicky rovnocenné. Pojmy sú abstraktné entity, definované súborom axióm. Jediné, čo je pri konceptuálnej forme jazyka dôležité, je logická závislosť medzi definíciami. A keďže definícia poľa predpokladá pojem grupy, lebo každé pole obsahuje aditívnu grupu, je z hľadiska konceptuálnej formy pojem grupy logicky prvotný.

Zisk, ktorý prináša Weberov prechod ku konceptuálnej forme jazyka, je nespochybniteľný. Explicitným formulovaním všetkých podmienok v definíciách základných pojmov algebry sa otvára možnosť jednotlivé podmienky postupne zoslabovať a dospieť tak k rôznym zovšeobecneniam. Napríklad z pojmu grupy možno vytvoriť pojem grupoidu a pologrupy, pojmy, ktoré boli v predošlých štádiách vývinu algebry buď úplne nemysliteľné, alebo aspoň omnoho ťažšie prístupné. Keď ich však nebudeme zavádzať zdola, zovšeobecnením príkladov, ale zavedieme ich zhora, obmieňaním podmienok v definícii pojmu grupy, získame k nim ľahší prístup. Teda podobne ako konštitutívna forma jazyka prináša prelom do úplne nového sveta objektov, prináša jeho konceptuálna forma prelom do úplne nového sveta pojmov. Jazyk tak preberá na seba ďalšiu úlohu, úlohu vytvárať pojmy. V predošlých štádiách vývinu matematiky sa používali len „prirodzené“ pojmy, podobne, ako pred konštitutívnou formou jazyka sa skúmali len „prirodzene“ konštituované objekty. Boli to pojmy, ktoré prirodzene vyvstali v priebehu matematických bádaní. Naproti tomu konceptuálna forma jazyka začína skúmať pojmy nezávisle od akéhokoľvek prirodzeného kontextu, skúma pojmy systematicky, obmieňaním definícií už existujúcich pojmov. Tento vývin opäť nie je špecifický len pre algebru a jeho paralela sa objavuje aj v topológii, kde sa potom, ako bol pojem topologického priestoru axiomaticky definovaný, rodí celá plejáda rôznych typov priestorov – T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, z ktorých viaceré dovtedy nikoho nenapadlo skúmať. Teda obmieňanie podmienok v definíciách základných pojmov sa neviaže len na algebru. Je to všeobecný rys konceptuálnej formy jazyka. Konceptuálna forma jazyka poskytuje slobodu v tvorbe pojmov, aká bola prv nepredstaviteľná.

5. Zhrnutie vývinu algebry. Vo vývine algebry sa nám podarilo rozlíšiť štádiá, ktoré sa líšia v tom, čo na nich znamená riešiť algebraickú rovnicu. Riešiť rovnicu v jednotlivých vývinových štádiách algebry znamená:

a) *Nájsť* **regulu**, teda pravidlo zapísané vetami prirodzeného jazyka, ktoré umožňuje **vypočítať** koreň rovnice.

b) *Nájsť* **formulu**, teda výraz symbolického jazyka, ktorý umožňuje **vyjadriť** koreň rovnice pomocou jej koeficientov, štyroch číselných operácií a odmocňovania. *Pritom* jednotlivé znaky vo formule korešpondujú s krokmi výpočtu, takže formula je zápisom reguly.

c) *Nájsť* **rozklad formy**, teda polynóm vyjadrujúci rovnicu v kanonickom tvare **rozložiť** na súčin lineárnych členov. *Pritom* každý člen tohto rozkladu obsahuje formulu vyjadrujúcu jeden koreň, takže rozklad vlastne dáva toľko formúl, koľkého stupňa je rovnica. Preto riešiť rovnicu znamená nájsť všetky korene, teda pre rovnicu n-tého stupňa nájsť všetkých n riešení.

d) *Nájsť* **rezolventu**, teda daný problém **previesť** pomocou vhodnej substitúcie na pomocnú úlohu nižšieho stupňa. *Pritom* keď vyriešime pomocnú rovnicu, spätnou substitúciou dostávame riešenie pôvodného problému. Okrem riešení danej rovnice však dostávame aj čísla s nimi asociované. Teda v prípade rovnice n-tého stupňa dostaneme vo všeobecnosti $n!$ veličín.

e) *Nájsť* **rozkladové pole**, teda postupne **zostrojiť** pole $Q(\alpha_1,\dots \alpha_n)$ obsahujúce všetky korene rovnice. *Pritom* jednotlivé kroky konštrukcie priamo korešpondujú s príslušnými rezolventami.

f) *Nájsť* **faktorizáciu grupy symetrií poľa $Q(\alpha_1,\dots \alpha_n)$**, teda grupu symetrií **rozložiť** na systém blokov. *Pritom* faktorizácia grupy korešponduje s rozkladom poľa na jednotlivé rozšírenia, a tak zo znalosti faktorizácie grupy možno usudzovať na konštrukciu príslušného poľa.

g) *Vytvoriť* **faktorizáciu okruhu $Q[x]$ podľa ideálu $(g(x))$**, teda nájsť triedy rozkladu okruhu polynómov podľa ideálu prislúchajúceho danému polynómu. Jedna z tried je hľadaným riešením rovnice, a tak máme univerzálny postup na riešenie ľubovoľnej algebraickej rovnice.

6. Porovnanie vývinu algebry s vývinom geometrie. Doteraz sme sa pohybovali na pomerne bezpečnej pôde historických rekonštrukcií. Na záver state by sme však radi predložili na diskusiu niekoľko myšlienok všeobecnejšieho epistemologického charakteru. Ich cieľom je podať jednotný výklad epistemologických zmien, ktoré sa odohrali v dejinách geometrie a algebry. Preto sa usilujeme vo vývine algebry a geometrie nájsť určitú spoločnú schému. Čitateľovi, ktorého zaujímajú predovšetkým dejiny týchto disciplín, sa môže zdať hľadanie takejto schémy neprirodzené a náš výklad mu môže pripadať ako násilná snaha všetko vtesnať do jediného vzorca. Ale to je neporozumenie zámeru, ktorý sledujeme. Nemáme žiadnu vopred danú schému a nič do ničoho nevtesnávame. Práve naopak, dejiny geometrie a algebry sú pre nás materiálom, analýzou ktorého sa chceme dopracovať k hlbšej epistemologickej rovine, ktorá presahuje vývin jednotlivých disciplín. Schémy, ktoré používame, slúžia iba na prehľadnejšie usporiadanie historického materiálu a na zvýraznenie základných epistemologických špecifík toho ktorého obdobia. Sú to teda iba nálepky, ktoré majú pomôcť orientovať sa v nesmierne zložitom materiáli. Hlavným cieľom nášho úsilia je opísať základné epistemologické zmeny, ku ktorým došlo v dejinách matematiky.

6. 1. Niekoľko doplnení schémy vývinu formy jazyka. Výklad dejín algebry ukázal, že metódy formálnej epistemológie nie sú viazané na jazyk geometrie, kde boli pôvodne objavené, ale že ich možno použiť aj na analýzu vývinu symbolických jazykov. Napriek tomu, že celkový vývin jazyka algebry sa v hrubých rysoch zhodoval s vývinom jazyka geometrie, ktorý sme zhrnuli do tabuľky v ([4], 145), vyskytli sa aj odlišnosti, ktoré si zasluhujú pozornosť. Analýza vývinu algebry tak prináša možnosť upresnenia našej koncepcie.

Asi najdôležitejším prínosom epistemologickej rekonštrukcie vývinu algebry je objav **koordinatívnej a kompozitívnej formy jazyka**. V dejinách geometrie sa tieto formy viažu na dielo Giovanniho Saccheriho (1667-1733), respektíve Johanna Lamberta (1728-1777). Keďže sa vo vývine neeuklidovskej geometrie zásadný prelom podaril až o generáciu neskôr Gaussovi, Bolyaimu a Lobačevskému, pri výklade dejín geometrie sme sa obmedzili na analýzu Lobačevského diela, kým Saccheriho a Lamberta sme vynechali. Dejiny algebry nás tak upozornili na to, že rekonštrukciu vývinu geometrie budeme musieť doplniť o výklad diela Saccheriho a Lamberta.

Ďalšia zmena spočíva v tom, že medzi konštitutívnu a lingvistickú formu sa ukazuje ako vhodné vložiť **konceptuálnu formu jazyka**. V dejinách geometrie sme konceptuálnu formu vynechali, lebo sme Hilbertove *Základy geometrie*, ktoré sú príkladom konceptuálnej formy, zaradili do lingvistickej formy. Lingvistickú formu charakterizuje nástup teórie množín a Hilbert používa termín množina. Pri spätnom pohľade sa však ukazuje, že Hilbert nepoužíva pojem množiny v jeho plnej epistemologickej sile (transfinitná indukcia, axióma výberu ...), ale používa iba termín množiny na označenie súborov bodov, priamok a rovín v priestore. Preto

Základy geometrie je vhodnejšie zahrnúť do konceptuálnej formy. V algebre je rozdiel medzi konceptuálnou a lingvistickou formou jasnejší, lebo Weber (predstaviteľ konceptuálnej formy) patrí ešte do predmnožinovej matematiky.

Navrhujeme tiež zmeniť názov lingvistickej formy jazyka. Ako sme uviedli, je to forma jazyka, ktorá sa viaže k teórii množín ([4], 142-145). Označili sme ju termínom lingvistická forma, lebo pre formu jazyka teórie množín je charakteristické vytvoriť určitý objekt (t.j. množinu $\{x; \varphi(x)\}$) pre každú správne utvorenú formulu $\varphi(x)$. Teda akoby v teórii množín dochádzalo k **aktualizácii celého jazyka**, akoby sa objektom stalo všetko, čo možno prostriedkami jazyka opísať. Uvedomujeme si však, že slovné spojenie lingvistická forma jazyka nie je najšťastnejšie. Preto navrhujeme v spojení *„aktualizácia celého jazyka"* preniesť dôraz z jazyka na aktualizáciu, teda formu jazyka prislúchajúcu klasickej teórii množín nazvať **aktualizujúcou formou jazyka**. Oproti konceptuálnej forme je tu zásadný rozdiel v tom, že keď konceptuálna forma uchopuje určitý celok, tento je konštituovaný vždy určitým pojmom. Naproti tomu keď teória množín aktualizuje určitý celok, t.j. keď určitý súbor uchopuje ako jeden objekt, tento celok je konštituovaný iba samotným aktom. Prvky určitej množiny nemusí spájať žiadny spoločný pojem.

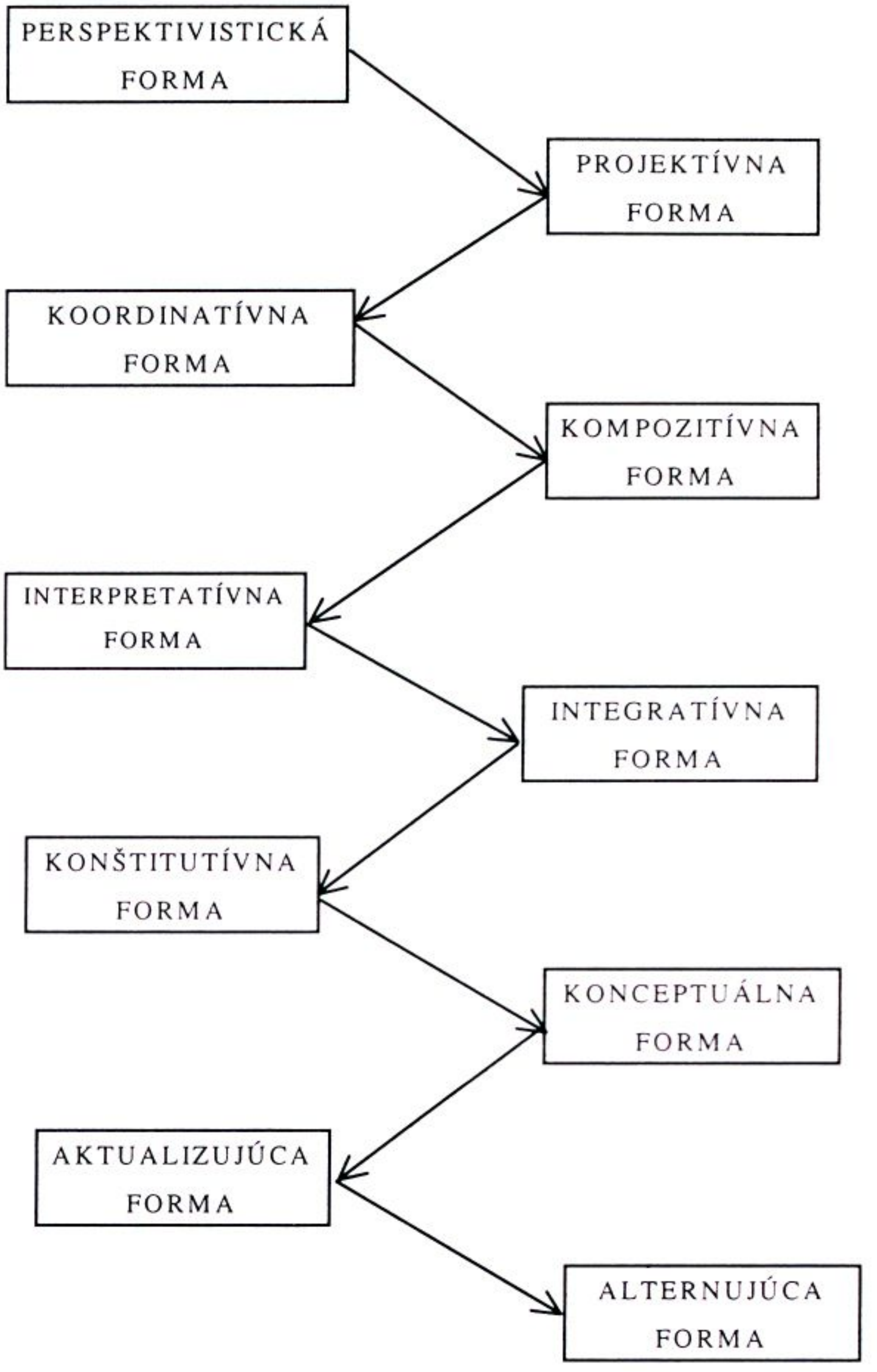
Posledným doplnením vývinu formy jazyka je zavedenie novej formy, ktorá z epistemologického hľadiska zjednocuje neštandardné modely aritmetiky, neštandardnú analýzu a alternatívnu teóriu množín. Navrhujeme nazvať ju **alternujúcou formou jazyka.** Jej základ spočíva v tom, že namiesto intendovanej interpretácie jazyka, ktorej aktualizáciu prináša predošlá forma, dochádza k zmene tejto interpretácie a jazyk sa chápe na pozadí alternatívnej interpretácie. Táto forma jazyka však už presahuje obsah našej state a uvádzame ju iba kvôli úplnosti. Jej význam sa prejavuje pri dôkaze rôznych tvrdení z metamatiky.

6. 2. Zjednotenie vývinu formy jazyka v geometrii a algebre. Dôležitým aspektom vo vývine geometrie, ktorý v algebre nemá obdobu, je pravidelné striedanie implicitnej a explicitnej formy jazyka. Kým v geometrii každá forma existuje len v týchto dvoch podobách ([4], 108-149), v algebre je situácia nepomerne zložitejšia. Keď sa pozrieme na vývin algebraickej symboliky, vidíme, že je to pomalý proces, tiahnuci sa od Regiomontana po Descarta. Skôr ako o zabudovaní implicitnej formy jazyka do jazyka, ako je to v geometrii, tu možno hovoriť o procese postupného zvecňovania jazyka. Keď si uvedomíme, že svet geometrie je daný v odkrytosti zraku, kým svet algebry sa rodí zvecňovaním motorických schém, je tento rozdiel prirodzený. Zraku je totiž svet odkrytý v jeho celistvosti, a preto zmena odkrytosti musí mať povahu zmeny geštaltu. Naproti tomu svet algebry je nám daný vždy len fragmentárne, poznáme len tie jeho „miesta", ktoré sme si „ohmatali", poznáme len tie „chodby", ktorými sme „prešli". Objavovanie novej formy jazyka tu prebieha postupne, a tak nemá a ani nemôže mať povahu zmeny geštaltu.

Kontrast sveta odkrytého zraku a sveta konštituovaného zvecnením motorických schém umožňuje objasniť aj ďalšiu zvláštnosť algebraických textov. Keď sa pozrieme na Cardanovu knihu *Ars Magna* [1], vidíme, že vedľa seba stoja fragmenty patriace do rôznych foriem jazyka. Cardano uvádza regulu na riešenie rovnice tretieho stupňa, čo spadá do perspektivistickej formy jazyka. Pri jej odvodzovaní však používa substitúcie a úpravy, ktoré sú typické pre projektívnu formu. A navyše pri svojich výskumoch narazil na odmocninu zo záporného čísla, čo je zárodok nasledujúcej formy jazyka. Teda akoby v algebraickom texte vedľa seba spočívali fragmenty patriace k rôznym formám. Z hľadiska motoriky je to prirodzené, lebo keď poznáme určitú cestu, po ktorej bezpečne dôjdeme z jedného miesta na druhé, môžeme ju používať aj potom, ako vedľa nej vyrástla sieť nových, modernejších diaľníc. Naproti tomu v geometrii je koexistencia výrazov patriacich k rôznym formám jazyka nemysliteľná. Nie je možné nájsť obrázok, ktorého jedna časť by bola euklidovská a iná by bola neeuklidovská. Keď forma jazyka fixuje odkrytosť sveta, odkrytý je svet ako celok a všetky jeho časti musia zapadať do novej formy.

Tento rozdiel je dôležitý pre koncepciu formálnej epistemológie. Ukazuje, že implicitná a explicitná podoba určitej formy jazyka sú len jej dve formulácie. Zhodou okolností v geometrii existujú len tieto dve a striedajú sa so striktnou pravidelnosťou. To nás zviedlo k predpokladu, že dynamika striedania explicitnej a implicitnej formy jazyka tvorí jadro objektácií. V algebre však existuje každá forma jazyka vo viacerých podobách, tvoriacich viac-menej spojitý prechod od fragmentárnej cez implicitnú až k explicitnej podobe. Navyše, aj po prechode k explicitnej podobe určitej formy jazyka v nej môžu pretrvávať rôzne fragmenty predošlých foriem. Preto sa zdá, že striedanie implicitnej a explicitnej formy určitého jazyka sa netýka objektácií, ale je to iba striedanie rôznych formulácií. Polarita implicitnej a explicitnej podoby formy jazyka tak zakladá dynamiku re-formulácií vo vývine geometrie.

Preto sa zdá byť účelné pojať pojem formy jazyka širšie a zahrnúť doňho ako implicitnú, tak aj explicitnú podobu určitej formy. Teda **explicitnú a implicitnú podobu nebudeme už ďalej považovať za rôzne formy jazyka**, ale jednoducho za dve formulácie jednej formy. Keď sa pri výklade dejín algebry jasne ukázalo, že striedanie implicitnej a explicitnej podoby formy jazyka sa netýka objektácií, vyvstáva otázka, čo zakladá dynamiku objektácií. Skôr, ako sa pokúsime zodpovedať túto otázku, zhrňme si doterajšie poznatky do prehľadného diagramu. V diagrame sa otvára dynamika nového druhu, dynamika, ktorá bola v dejinách geometrie prekrytá striedaním implicitnej a explicitnej podoby určitej formy jazyka. Keď abstrahujeme od týchto re-formulácií, vidíme, že v hre je tu napätie medzi singulárnou a plurálnou formou subjektivity. Tak perspektíva objavila hľadisko, z ktorého reprezentuje svet, kým projektívna forma prináša pluralitu hľadísk a pomocou premietania opisuje prechody medzi nimi. Podobne interpretatívna forma priniesla pevný interpretatívny rámec, kým integratívna forma prináša pluralitu interpretácií a snaží sa rôzne interpretácie zjednotiť do celku.



6. 3. Zmeny formy jazyka a vývin subjektivity. Na záver našich analýz sa pokúsime z jednotného hľadiska vyložiť rekonštrukciu dejín algebry, dejín geometrie ([4], 108-149) a určitých aspektov dejín maliarstva [5]. Geometria predstavuje oblasť, kde sme objavili pojem formy jazyka. Pri prenose nášho aparátu do oblasti algebry [6] sme sa opierali o určité epistemologické paralely medzi týmito dvoma oblasťami matematiky. Napríklad Weberova faktorizácia okruhu polynómov podľa určitého ideálu je z epistemologického hľadiska príbuzná s Riemannovou ideou rezania a lepenia plôch v geometrii. Formu jazyka spoločnú týmto dvom teóriám možno označiť termínom konštitutívna forma, lebo v oboch prípadoch jazyk preberá úlohu konštituovať objekty teórie. Pri prechode od geometrie k maliarstvu sa paralela zakladala na podobnostiach v tvorbe reprezentácie skutočnosti. Napríklad reprezentácia objektov pomocou simpliciálnych komplexov v kombinatorickej topológii v mnohom pripomína kubistický rozklad objektu na elementárne formy. Samozrejme, paralela tu už nie je tak pevná ako medzi algebrou a geometriou, ktoré sú obe matematické teórie a kde často ten istý matematik tvorivo pracoval v oboch (Euler, Gauss, Hilbert ...). Ale na druhej strane nemožno popierať, že existuje určitá príbuznosť v spôsobe, ako kubizmus a algebraická topológia vytvárajú svoje objekty. Tak sa vďaka geometrickému medzičlánku kubizmus dostal do vzťahu aj s algebrou. Ale kým v jednotlivých oblastiach, uvažovaných samostatne, je vývin formy jazyka pomerne jasný, keď takto postavíme do paralely dejiny algebry, geometrie a maliarstva, vynára sa otázka, čo zjednocuje tieto vývinové procesy. Domnievame sa, že tým spoločným základom, ktorý viac-menej prirodzene zjednocuje vývinové línie spomenutých troch oblastí, je vývin epistemického subjektu.

Akoby ľavý stĺpec našej schémy predstavoval okamihy zrodu nového druhu subjektivity, zrodu novej **skúsenosti seba**. Naproti tomu formy jazyka stojace v pravom stĺpci vnášajú do tejto skúsenosti seba pluralitu, prinášajú **skúsenosť iného**. Perspektíva vyjadruje to, ako *ja* vidím svet, pomocou projektívnej formy môžem pochopiť, ako vidí svet *iný*. Koordinatívna forma vyjadruje to, ako *ja* vnášam poriadok do svojej skúsenosti, kým kompozitívna forma umožňuje zladiť alternatívne poriadky *iných*. Interpretatívna forma vyjadruje to, ako *ja* rozumiem svojej skúsenosti, integratívna forma mi poskytuje možnosť porozumieť skúsenosti *druhého*. Konštitutívna forma vyjadruje to, ako *ja* konštituujem seba, konceptuálna forma mi odkrýva možnosť porozumieť sebakonštitúcii *iného*. Teda dynamika v rovine objektácií je dynamikou stretania sa so sebou a stretania sa s iným.

Pritom uvedený diagram ukazuje, že cesta k sebe vedie cez iného. Na to, aby som sa mohol so sebou stretnúť v koordinatívnej rovine ako s nositeľom poriadku sveta a odkryť svoju neodňateľnú slobodu subjektu (čo je asi jadrom ***karteziánskeho zmocnenia sa seba***), musím sa napred stretnúť s iným v rámci projektívnej formy, naučiť sa vidieť svet očami druhého, a tým sa oslobodiť od egocentrickej perspektívy. Podobne na to, aby som sa mohol so sebou stretnúť v interpretatívnej rovine ako s nositeľom hodnôt a hodnotovej interpretácie skutočnosti (čo je asi jadrom ***romantického precítenia seba***), musím sa napred stretnúť s iným v rámci kompozitívnej formy a naučiť sa tolerancii alternatívnych poriadkov. Podobne na to, aby som sa mohol stretnúť so sebou v konštitutívnej rovine, ako s nositeľom svojej existencie (čo je asi jadro ***existenciálnej odcudzenosti seba***), musím sa napred stretnúť s iným v integratívnej rovine, musím pochopiť základnú ekvivalentnosť všetkých interpretácií sveta. Až keď sa oslobodím od pocitu samozrejmosti (prirodzenosti, správnosti ...) svojej interpretácie sveta a naučím sa integrovať životnú skúsenosť druhého do spoločného ľudského údelu, až potom sa môžem stretnúť so sebou ako s existenciou.

Bez stretnutia s iným človeku hrozí uviaznutie na povrchu seba, uviaznutie vo vrchných vrstvách vlastnej subjektivity. Ale platí to aj naopak. Každému stretnutiu s iným musí predchádzať stretnutie so sebou. Na to, aby som sa mohol stretnúť s iným v projektívnej rovine ako s nositeľom alternatívneho pohľadu na svet a odkryť tak pluralitu vízií sveta (čo je asi jadrom ***manieristickej fascinácie iným***), musím sa napred stretnúť so sebou v rámci perspektivistickej formy a naučiť sa vidieť svet z pevného hľadiska. Podobne na to, aby som sa mohol stretnúť s iným v kompozitívnej rovine ako so zástancom alternatívneho poriadku sveta (čo je asi jadrom ***osvietenskej tolerancie iného***), musím sa napred stretnúť so sebou v rámci koordinatívnej formy a naučiť sa podriadiť svet pevnému poriadku. Podobne na to, aby som sa mohol stretnúť s iným v integratívnej rovine ako s nositeľom alternatívnych hodnôt (čo je asi jadro ***pozitivistického skúmania iného***), musím sa napred stretnúť so sebou v interpretatívnej rovine ako s nositeľom hodnotovej interpretácie skutočnosti.

Táto dynamika prenikania do stále hlbších vrstiev subjektivity je základom ako dejín geometrie či algebry, tak aj veľkej časti západnej civilizácie. V tomto zmysle sú dejiny algebry súčasťou všeobecnej ľudskej skúsenosti, podobne ako dejiny literatúry či maliarstva, a ich štúdiom môžeme odhaliť mnoho nového o nás samotných. Teória vývinu epistemického subjektu tak vrhá nové svetlo na diskusie ohľadom smrti subjektu. Tabuľka ukazuje, že len v dejinách algebry od al-Chwárizmího po Noetherovú sa vyskytlo osem rôznych druhov subjektivity. **Hrob subjektu je teda masovým hrobom**. Preto hlásatelia tézy, že subjekt je mŕtvy, by svoju tézu mali prinajmenšom preložiť do plurálu.

7. Záverečné poznámky. Na záver state ešte pripojíme niekoľko poznámok o vzťahu našich analýz k logike, normatívnej epistemológii a dialektike.

7. 1. Vývin algebry a otázka vývinu pojmov. Sedem štádií (štádiá *a* až *f*, uvedené v piatej časti state) predstavuje podľa nášho názoru sedem štádií vo **vývine pojmu** „riešiť algebraickú rovnicu". Na jednej strane sú tieto štádiá dostatočne odlíšené, takže ich sotva možno považovať za rôzne explikácie toho istého pojmu. Každému štádiu totiž zodpovedajú špecifické činnosti, na základe ktorých možno príslušné štádium odlíšiť od ostatných. Rozkladať grupu symetrií je čosi zásadne iné než konštruovať pole či hľadať rezolventu. Ale na druhej strane je tiež zrejmé, že ide stále o ten istý pojem, lebo ak je riešenie určitej rovnice známe v zmysle niektorej z úrovní, možno ho preložiť do tvaru zodpovedajúceho neskoršiemu štádiu. Neskoršie štádium preto zahŕňa predošlé štádiá ako špeciálny prípad. Aj keď je teda hľadanie rezolventy čosi zásadne iné ako rozkladanie grúp symetrií, akonáhle poznáme rezolventu, vieme si zostrojiť príslušné pole, nájsť jeho grupu symetrií a sledujúc substitúciu vedúcu k rezolvente, vieme nájsť bloky, na ktoré sa rozpadá príslušná grupa. Preto príslušné štádiá predstavujú štádiá vývinu jedného pojmu.

Každé vyššie štádium je bez predošlých štádií nemysliteľné. Bez pojmu rezolventy je nemysliteľná konštrukcia rozkladového poľa, bez rozkladového poľa je nemysliteľná grupa jeho symetrií. Každé vyššie štádium predpokladá predošlé štádiá, lebo sa z nich vyvinulo v procese abstrakcie.

7. 2. Vývin algebry a otázka normatívnosti epistemológie. Osem foriem jazyka algebry, ktoré sme opísali, ukazuje bohatstvo epistemologických zmien, ku ktorým došlo v algebre. Štandardne sa v epistemológii analyzuje iba korešpondenčná a koherenčná teória pravdy. Korešpondenčná teória pravdy zodpovedá perspektivistickej forme jazyka, koherenčná teória zas jeho konštitutívnej forme. Ale okrem týchto, vo filozofii často diskutovaných pozícií sa podarilo opísať ešte aspoň šesť ďalších, ktoré si epistemológia zatiaľ nevšimla. Je možné, že mnohé problémy „normatívnej" epistemológie sú dôsledkom ignorovania foriem jazyka, ktoré sme opísali vyššie. Vzťah dvoch po sebe idúcich foriem je z epistemologického hľadiska ľahko rekonštruovateľný. Keď sa však vynechá šesť foriem, v epistemickej štruktúre poznania vznikajú medzery, na premostenie ktorých sa musia vymýšľať rôzne duchaplné konštrukcie. Preto opis vývinu formy jazyka považujeme za východisko akejkoľvek vážnejšie myslenej epistemológie.

7. 3. Formálna epistemológia versus dialektika. Diagram znázorňujúci zmeny foriem jazyka, ktorý sme uviedli v šiestej časti state, nazývame bipolárnym diagramom. Zakladá sa na tom, že stavia proti sebe dva aspekty jazyka, ktoré sú v určitom epistemickom napätí. Konkrétne ide o napätie medzi singulárnou a plurálnou formou subjektivity. Toto napätie vytvára nerovnováhu a opísaný vývin možno chápať ako proces postupnej redukcie tejto nerovnováhy. Metóda rekonštrukcie vývinu jazyka, ktorú prináša formálna epistemológia, si kladie za cieľ nahradiť vágny a neproduktívny spôsob, akým sa vývin poznania opisuje v rôznych dialektických koncepciách. Pojmom epistemického napätia chceme nahradiť pojem protirečenia. Sme presvedčení, že plurálna a singulárna forma subjektivity si neprotirečia a opisovať vývin poznania pomocou logických kategórií ako protirečenie či negácia je scestné. Epistemické napätie vytvára v poznaní určitú nerovnováhu a vývin poznania má za cieľ túto nerovnováhu redukovať. Pritom v každom konkrétnom štádiu existuje prevaha jedného pólu (singulárnej alebo plurálnej formy subjektu) nad druhým, a tak sa dynamika sústreďuje na rozvoj menej rozvinutého pólu. Ako výsledok vzniká nová forma subjektivity, ktorá má však opäť epistemický presah nad predošlou formou, a tak vývin nikdy nekončí. Sme presvedčení, že naše rekonštrukcie vývinu geometrie, algebry a maliarstva ukazujú, že vývin poznania je nesmierne zložitý a reči o protirečeniach nijako nepomáhajú pri jeho pochopení.

LITERATÚRA

[1] CARDANO, G. (1545): *Ars Magna, or the Rules of Algebra*. MIT Press 1968.
[2] DESCARTES, R. (1637): *Rassuždenie o metode*. Moskva, Izdateľstvo Akademii Nauk SSSR 1953.
[3] EULER, L. (1770): *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Leipzig, Reclam 1911.
[4] KVASZ, L.: *Gramatika zmeny*. Bratislava, Chronos 1999.
[5] KVASZ, L.: "Epistemologické aspekty moderného maliarstva". *Filozofia* 2000/8, s. 601-619.
[6] KVASZ, L.: "Epistemologické aspekty dejín klasickej algebry". *Filozofia* 2000/10, s. 788-808.
[7] PIAGET, J. (1968): *Štrukturalizmus*. Bratislava, Pravda 1971.
[8] WEBER, H.: *Lehrbuch der Algebra*. Braunschweig 1895.

Ďakujem Pavlovi Bónovi, Táni Jajcayovej, Vladimírovi Záhoranskému a Pavlovi Zlatošovi za mnohé pripomienky, ktoré prispeli k spresneniu niektorých argumentov a formulácií textu. Moja vďaka patrí tiež **Nadácii Alexandra von Humboldta** za podporu projektu *Základy formálnej epistemológie*, ktorého súčasťou je aj táto stať.

Doc. Dr. Ladislav Kvasz
Katedra humanistiky FMFI-UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
SR
e-mail: kvasz@fmph.uniba.sk