FILOZOFIA
Roč. 56, 2001, č. 10

EPISTEMOLOGICKÉ ASPEKTY DEJÍN KLASICKEJ MECHANIKY

LADISLAV KVASZ, Katedra humanistiky FMFI-UK, Bratislava

KVASZ, L.: Epistemological Aspects of the History of Classical Mechanics
FILOZOFIA 56, 2001, No 10, p. 679

The aim of the paper is to examine the changes, which occurred in the epistemological structure of classical mechanics during its development from Newton to Poincaré. The analysis is based on the reconstruction of the form of language. Attention is paid to such aspects of the language of classical mechanics as the notion of pace (configurational space, representational space, differentiable manifold, phase space) or the description of action (by force, potential, Lagrangian and Hamiltonian functions). Even though these notions do not have direct denotation, they, nevertheless, constitute the general framework, on which the relation between the denotative descriptions of the language of classical mechanics and the physical reality is based.

V sérii článkov ([9]; [10]; [12]) venovaných analýze vývinu syntetickej geometrie sme rozpracovali koncepciu *formálnej epistemológie*. Táto koncepcia sa zakladá na myšlienke použiť Wittgensteinovu obrazovú teóriu významu z *Traktátu* pri sémantickej analýze obrázkov obsiahnutých v dielach tvorcov modernej geometrie. Pri tejto analýze sa ukázalo, že historický vývin geometrie možno z epistemologického hľadiska opísať ako vývin formy jazyka. Druhým krokom v rozvoji formálnej epistemológie bolo oslobodiť našu koncepciu od závislosti na geometrii. Na tento účel sme zvolili algebru ([14]; [15]), ktorá je na jednej strane úzko prepojená s geometriou, ale na druhej strane namiesto vizuálnej reprezentácie používa symbolickú reprezentáciu. Cieľom predkladanej state je pristúpiť k tretej etape rozvoja formálnej epistemológie, ktorou je epistemologická analýza vývinu klasickej mechaniky. Predbežná verzia tejto state, ktorá odznela na konferencii v Prahe v júni 1998 [15], bola založená na pokuse prejsť od geometrie priamo k mechanike. Poznatky, ktoré sme medzičasom získali pri rekonštrukcii vývinu algebry, prinášajú nevyhnutnosť zásadne revidovať výsledky predošlého textu. Ide jednak o zavrhnutie rozlišovania medzi implicitnou a explicitnou podobou určitej formy jazyka, na ktorom sme pôvodne analýzu vývinu mechaniky zakladali, a o objav dvoch nových foriem jazyka (koordinatívnaj a kompozitívnej), ktoré treba pri výklade dejín mechaniky zohľadniť.

Pri epistemologickej analýze dejín klasickej mechaniky sa pridržiavame jej rekonštrukcie prostriedkami modernej matematiky ([1]; [2]; [26]). Sme presvedčení, že až moderná matematika umožňuje porozumieť epistemologickým otázkam mechaniky. Náš výklad však budeme neustále konfrontovať s historickými textami. Domnievame sa, že takýto postup jasne ilustruje rozdiel medzi epistemologickou a historickou rekonštrukciou vývinu určitej teórie. Pre historika je Lagrangeovo odmietanie používania geometrických metód v mechanike významnou črtou jeho diela. Preto použitie pojmov ako diferencovateľná varieta pri výklade Lagrangeovej mechaniky vníma historik ako skresľovanie Lagrangeových názorov. Z historického hľadiska má pravdu, lebo Lagrange takéto termíny rozhodne nepoužíval. Z epistemologického hľadiska je však situácia zásadne iná. Keď Lagrange píše: *„Predpokladajme, že berúc do úvahy formálne podmienky rovnice sústavy, vyjadríme súradnice x, y, z každého telesa ako funkcie iných premenných ξ, ψ, φ, ..., ktoré sú navzájom úplne nezávislé a slúžia na určenie polohy sústavy v ľubovoľnom okamihu.*" ([16], 413), tak by sa mohlo zdať, že tu ide o obyčajnú zámenu súradníc. Čo je však fundamentálne nové z hľadiska jazyka klasickej mechaniky, sú tie tri bodky za ξ, ψ, φ a tiež skutočnosť, že tieto súradnice majú byť *„navzájom úplne nezávislé"*. Lagrange tu opúšťa euklidovský priestor ako formu reprezentácie mechanickej sústavy a prechádza k viacrozmernému priestoru. Tento priestor, aj keď je len skrytý v Lagrangeových formuláciách, má štruktúru diferencovateľnej variety. Takto sa v Lagrangeovom texte odohráva zásadná epistemologická zmena, prechod do *n*-rozmerného priestoru.

V geometrii sa idea *n*-rozmerného priestoru objavuje o vyše 50 rokov neskôr, v práci Arthura Cayleyho (1821-1895) *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*, publikovanej v *Philosophical Magazine* roku 1843; u Hermanna Grassmanna (1807-1877) v jeho knihe *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* publikovanej roku 1844, a v habilitačnej prednáške Bernharda Riemanna (1826-1866) nazvanej *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, ktorá odznela roku 1854. U Lagrangea sa tak odohral prechod od trojrozmerného euklidovského priestoru ku konfiguračnému priestoru. Aj keď Lagrange o žiadnom konfiguračnom priestore explicitne nehovorí, ***používa ho***, a teda k epistemologickej rekonštrukcii jeho diela tento pojem v plnej miere náleží. Takto až moderná matematika tým, že urobila základné pojmy klasickej mechaniky úplne explicitnými, umožňuje pochopiť skrytú epistemologickú štruktúru prelomových diel z histórie tejto disciplíny. Podobne ako formálna logika pri rekonštrukcii určitého textu nezotrváva pri zjavnej gramatickej štruktúre viet, ale prechádza od gramatického povrchu k hlbšej logickej forme, ani formálna epistemológia sa neobmedzuje na explicitný povrch historických textov, ale usiluje sa rekonštruovať ich hlbšiu epistemologickú formu. V ďalšom texte sa pokúsime rekonštruovať vývin klasickej mechaniky, vedúci od Newtona a Eulera cez d'Alemberta, Lagrangea a Hamiltona až po Poincarého. Pokúsime sa ukázať, že podobne ako v geometrii a algebre aj v mechanike sa vývin zakladal na zmenách formy jazyka a viedol od perspektivistickej formy cez projektívnu, koordinatívnu, kompozitívnu, interpretatívnu až k integratívnej a konštitutívnej forme (a ešte ďalším, ležiacim za hranicami nami sledovaného úseku dejín).

1. Perspektivistická forma jazyka klasickej mechaniky: Newton 1686. Analýzu vývinu formy jazyka mechaniky začneme dielom Isaaca Newtona (1643-1727) ***Philosophiae naturalis principia mathematica*** (1686), v ktorej boli po prvýkrát sformulované zákony pohybu hmotných telies. Nebudeme sa púšťať do výkladu Newtonovej knihy, keďže táto je veľmi rozsiahla. Obmedzíme sa len na opis formy jazyka Newtonovej mechaniky. Pokúsime sa ukázať, že ňou je perspektivistická forma jazyka, ktorá spočíva v chápaní teórie ako obrazu skutočnosti.[1] Chceme ukázať, že Newton vo svojej mechanike používal viaceré pojmy, ktoré nemajú denotát (a teda tvoria formu jazyka), a že okrem toho reprezentoval svet z hľadiska jediného subjektu, ktorý sám nie je v jazyku reprezentovaný (čo je typické pre perspektivistickú formu). V súvislosti s Newtonom sme pri rozpracovávaní formálnej epistemológie v šťastnej situácii, pretože tu máme predchodcu v osobe Ernsta Macha. Mach vo svojej knihe *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (1883) podrobil Newtonovu mechaniku kritike, ktorá sa odmietnutím metafyzických pojmov, tautológií a zdanlivých definícií stala východiskom pre filozofiu Viedenského krúžku, ktorý sa spočiatku nazýval *Verein Ernst Mach*.

Mach podrobne analyzuje Newtonove názory na čas, priestor a pohyb. Napred uvádza citáty z *Princípií*: „*Absolútny, skutočný a matematický čas plynie sám osebe a vďaka svojej povahe rovnomerne a bez vzťahu k akémukoľvek vonkajšiemu predmetu. Nazýva sa tiež trvaním. Relatívny, zdanlivý a obyčajný čas je vnímateľná a vonkajšia, buď presná, alebo približná miera trvania, ktorá sa používa zvyčajne namiesto skutočného času, napr. hodina, deň, mesiac, rok... Prirodzené dni, ktoré zvyčajne ako mieru času považujeme za rovnaké, v skutočnosti rovnaké nie sú. Túto nerovnakosť napravujú astronómovia, keď merajú pohyb nebeských telies podľa skutočného času. Je možné, že neexistuje žiaden rovnomerný pohyb, pomocou ktorého by bolo možné presne merať čas, všetky pohyby môžu byť zrýchľované alebo zabrzdené, jedine beh absolútneho času nemôže byť zmenený. Trvanie všetkých existujúcich vecí je to isté, či už sú ich pohyby rýchle, pomalé alebo nulové.*“ ([20], 30). Potom Mach pristupuje ku kritike týchto názorov a píše: „*Rovnomerným nazývame taký pohyb, v ktorom rovnaké prírastky dráhy zodpovedajú rovnakým prírastkom dráhy referenčného pohybu (otáčania Zeme). Pohyb môže byť rovnomerný vo vzťahu k inému. Otázka, či je pohyb rovnomerný sám osebe,* ***nemá žiaden zmysel****. Rovnako nemôžeme hovoriť ani o absolútnom čase (nezávisle od akejkoľvek zmeny). Absolútny čas nie je možné*

---

[1] Výklad mechaniky ako obrazu, ktorý jednoznačne zobrazuje skutočnosť, je natoľko samozrejmý, že vlastne iné alternatívy dlho neprichádzali ani do úvahy. Vznikla tak zaujímavá situácia, keď mechanika po technickej stránke už dávno opustila perspektivistickú formu založenú na chápaní teórie ako obrazu a začala používať rôzne modely, ba dokonca prešla až k integratívnej forme, ale vo filozofickej reflexii sa neustále rozmýšľalo o mechanike ako o obraze skutočnosti.

merať pomocou žiadneho pohybu, takže nemá žiadnu praktickú a ani žiadnu vedeckú hodnotu, nikto nie je oprávnený tvrdiť, že o ňom čokoľvek vie, a je to teda ***zbytočný metafyzický pojem.*** *"* ([19], 218, zdôraznil L. K.).

Podobnej kritike podrobuje Mach aj pojmy absolútneho priestoru, absolútneho pohybu, hmotnosti a tiež Newtonove zákony. Podľa Macha sú viaceré Newtonove definície iba ***zdanlivé definície*** (Scheindefinitionen), lebo fungujú v kruhu. Podobne je podľa Macha prvý Newtonov zákon ***tautológiou***, pretože sila je mierou zrýchlenia a nulovej sile automaticky zodpovedá nulové zrýchlenie, t.j. rovnomerný priamočiary pohyb. Machova kritika je asi najoriginálnejšou kritikou, akej bola Newtonova mechanika podrobená. Mach v nej predviedol spôsob analýzy, ktorý umožňuje odhaliť zmysluprázdne termíny, zdanlivé definície a tautologické tvrdenia. Machovým cieľom bolo metafyzické termíny z mechaniky odstrániť a nahradiť ich empirickými pojmami. V tomto smere možno Macha považovať za jedného z inšpirátorov teórie relativity, ktorá uskutočnila presne to, čo Mach zamýšľal. Metafyzický pojem absolútneho času bol v nej nahradený empirickým pojmom lokálneho času, viazaného na určitú sústavu referenčných telies.

Náš zámer však nie je fyzikálny, ale epistemologický. Našim cieľom nie je metafyzické pojmy z mechaniky odstrániť, ale lepšie porozumieť ich úlohe pri stavbe samotnej teórie. Preto z nášho hľadiska ***je Mach mysliteľ, ktorý odhalil existenciu formy jazyka mechaniky***, a pokladáme ho za predchodcu projektu formálnej epistemológie. Mach si ešte myslel, že je možné metafyzické pojmy v plnej miere nahradiť empirickými. V tomto bode Machov optimizmus neprijímame. Domnievame sa, že takýmto nahradením prejdeme len k novému jazyku, ktorého forma bude opäť neempirická. Samozrejme, každý prechod k novej forme jazyka prináša nepopierateľný krok vpred ako z hľadiska fyzikálneho, tak aj z hľadiska filozofického. Stačí si spomenúť na teóriu relativity, ktorá kvalitatívne prehĺbila naše porozumenie prírode a viedla k objavu mnohých nečakaných fyzikálnych javov (dilatácia času, kontrakcia dĺžky) a zákonov (zákon ekvivalencie hmoty a energie). Ale úlohou epistemológie nie je pochopiť to, ako funguje príroda, ale to, ako funguje veda. Preto aj keď nepopierame prínos Machovej snahy ***nahradiť*** metafyzické pojmy empirickými, domnievame sa, že pre epistemológiu bude rovnako zaujímavé snažiť sa ***pochopiť*** ich funkciu v jazyku vedy.

Podľa nášho názoru prítomnosť neempirických („metafyzických") termínov a princípov je ***systematický rys každého jazyka***. Na jednej strane to znamená, že v prípade Newtona nešlo o nejakú jeho nedôslednosť či naivitu. Neempirické výrazy tvoria formu jazyka, a preto sa im nedá vyhnúť. Je síce možné prejsť k inému jazyku, v ktorom sa forma predošlého jazyka stane „empirickou", ale nový jazyk má svoju vlastnú formu, ktorá bude opäť „metafyzická". To, že Mach rozpoznal formu jazyka Newtonovej mechaniky, bolo umožnené práve tým, že ju vnímal z pozície novej formy jazyka (energetizmu), v rámci ktorej sú už metafyzické prvky Newtonovej mechaniky rozpoznateľné. Na druhej strane formu jazyka netvoria akési náhodné, izolované výrazy. Forma jazyka vytvára určitý celok, ktorý umožňuje fungovanie jazyka (aby v ňom bolo možné počítať, odvodzovať a argumentovať). Formu jazyka Newtonovej mechaniky vyčerpávajúco opísal Mach. Stačí jeho kritiku Newtonovej mechaniky interpretovať ako deskripciu formy jej jazyka. Túto formu tvoria prvky ako absolútny priestor a absolútny čas, ktoré zodpovedajú nemennému hľadisku jediného subjektu. Tento subjekt sám nie je v jazyku prítomný, a teda máme do činenia s perspektivistickou formou jazyka, s reprezentáciou sveta z pohľadu jediného vonkajšieho hľadiska.

2. Projektívna forma jazyka klasickej mechaniky: Euler 1736. Pri písaní *Princípií* slúžili Newtonovi za vzor Euklidove *Základy*. Na rozdiel od dnes bežného spôsobu formulovania fyzikálnych teórií Newton formuluje svoje tvrdenia v tvare matematických viet a dokazuje ich spôsobom obvyklým v geometrii. Takýto prístup je síce logicky prehľadný, ale na druhej strane je natoľko ťažkopádny, že už Leonhard Euler (1707-1783) cítil potrebu poznamenať: „*Hoci čitateľ nepochybuje o správnosti uvedených tvrdení, nechápe ich dosť jasne a presne, ak by sa tie isté úlohy čo i len trochu zmenili, sotva by bol schopný vyriešiť ich samostatne.*" ([29], 123) Nespokojnosť s Newtonovou čisto geometrickou formuláciou mechaniky viedla 26-ročného Eulera k jej prepísaniu z geometrického jazyka do jazyka diferenciálneho počtu v knihe ***Mechanica sive motus scientia analytice exposita*** [5]. Euler ako prvý zapísal druhý Newtonov zákon v tvare diferenciálnej rovnice

$$dc = np\frac{dt}{A}, \tag{1}$$

kde c je rýchlosť pohybu, p je sila, A je hmotnosť telesa, t je čas a n je koeficient závislý od voľby jednotiek ([5], 124). Táto zmena mala pre mechaniku zásadný význam, lebo aparát matematickej analýzy poskytuje rad metód na riešenie mechanických úloh. Výhodou analytických metód je, že „*ak by sa tie isté úlohy čo i len trocha zmenili*", stále ich možno vyriešiť zhruba rovnakým postupom (napríklad pomocou poruchovej metódy). Takto Euler odstránil základný nedostatok Newtonovho pojatia mechaniky, ktorým bola absencia univerzálnych metód. Medzi novými metódami, ktoré takto pribudli, má dôležité miesto metóda substitúcie.

Pri výklade dejín algebry sme ukázali, že objavenie sa substitúcií v jazyku je charakteristickým znakom ***projektívnej formy jazyka***. Substitúcia je prechodom od jedného systému súradníc k inému a je analógiou projekcie, ktorá v geometrii umožňuje prejsť od jedného pohľadu na daný predmet k pohľadu z iného hľadiska. Preto Eulerova kniha neprináša iba re-formuláciu mechaniky, nespočíva v obyčajnom nahradení Newtonovej geometrickej formulácie mechaniky Eulerovou analytickou formuláciou. Euler urobil podstatne viac, vytvoril novú formu jazyka, založil mechaniku ako analytickú disciplínu. Namiesto Newtonových syntetických argumentov postavil postupnosť analytických úprav.[2]

---

[2] Pre úplnosť uvedieme Newtonovu pôvodnú formuláciu pohybového zákona:

3. Koordinatívna forma jazyka klasickej mechaniky: Maclaurin 1742. Vo svojej *Mechanike* Euler používal rozklad síl na tangenciálnu a normálovú zložku. Súradná sústava, pomocou ktorej opisoval pohyb určitého telesa, bola teda zvolená vždy špeciálne z hľadiska opisovaného problému. To je výhodné, pokiaľ je systém telies dostatočne jednoduchý. Tangenciálna zložka sily spôsobuje narastanie rýchlosti, kým normálová zložka iba zakrivuje trajektóriu, pričom rýchlosť pohybu nemení. Pri opise sústav tvorených viacerými telesami, keď každú silu rozložíme na normálovú a tangenciálnu zložku, vznikne neprehľadná situácia, keďže normálový a tangenciálny smer je pre každé teleso iný. Preto Colin Maclaurin (1698-1746) v knihe ***A complete system of functions*** (1742) rozložil pohyb všetkých telies do troch pevne zvolených a nemenných smerov. Táto zmena sa môže zdať malá, ale jej dosah je ďalekosiahly. Bol to práve rozklad síl do troch nezávislých smerov, ktorý umožnil Eulerovi objaviť rovnice opisujúce rotačný pohyb tuhého telesa. Základom týchto rovníc je vzájomný vzťah medzi momentom hybnosti a momentom sily.

Moment sily poznal už Archimedes, ktorý pomocou neho opisoval rovnováhu na páke. Podobne moment hybnosti bol prítomný v druhom Keplerovom zákone. Ale spojiť tieto dva pojmy, teda dať do vzájomného vzťahu moment sily a moment hybnosti, nie je vôbec jednoduché. Tieto veličiny sú totiž vektory, teda majú nielen veľkosť, ale aj smer. Ich smer však nie je ani smerom pôsobenia sily, ani smerom pohybu. Táto okolnosť prácu s nimi komplikuje. Ak nemáme k dispozícii pevnú referenčnú sústavu, na ktorú môžeme vztiahnuť smery vektorov vystupujúcich pri rotačnom pohybe (polohový vektor, vektor uhlovej rýchlosti, vektor hybnosti, vektor momentu hybnosti, vektor sily a vektor momentu sily), je prakticky vylúčené, aby sme sa v tejto spleti vektorov vyznali. Preto zásadný pokrok v teórii pohybu tuhého telesa mohol nastať až potom, ako Maclaurin zaviedol ideu pevnej súradnej sústavy. A skutočne, s odstupom niekoľkých rokov vydáva Euler prácu ***Découvert d'un noveau principe de la mécanique*** (1750), v ktorej formuluje zákon momentu síl. Eulerova prvá formulácia bola ešte stále značne neprehľadná, a tak z roka na rok menil svoju sústavu rovníc, postupne ju zjednodušoval, až roku 1758 prišiel na nápad prejsť k hlavným osiam telesa ako

---

„Zmena pohybu je úmerná pôsobiacej sile a deje sa v smere priamky, po ktorej sila pôsobí." ([20], 40); slovenský preklad ([29], 87). Euler dal roku 1765 Newtonovmu zákonu tvar

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\lambda p}{A},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\lambda q}{A},\qquad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\lambda r}{A},$$

kde p, q, r sú priemety výslednej sily do smerov súradných osí a λ je koeficient úmernosti, ktorým Euler nahradil koeficient n z rovnice (1) ([6], 328). Túto formuláciu uvádzame iba v poznámke, lebo svojou formou spadá už do koordinatívnej formy jazyka. Porovnaním Newtonovej formulácie z roku 1686 s Eulerovými formuláciami z rokov 1736 a 1765 možno získať predstavu o rozdieloch vo vyjadrení toho istého zákona v perspektivistickej, projektívnej a koordinatívnej forme jazyka.

referenčnej sústave. Tým sa rovnice podstatne zjednodušili a nadobudli tvar:

$$P = A.\mathrm{d}p/\mathrm{d}t + (C-B).q.r,$$
$$Q = B.\mathrm{d}q/\mathrm{d}t + (A-C).r.p,$$
$$R = C.\mathrm{d}r/\mathrm{d}t + (B-A).p.q.$$

Táto sústava nesie podnes Eulerovo meno. P, Q, R sú zložky vektora momentu síl, A, B, C sú zložky momentu zotrvačnosti telesa a p, q, r sú zložky vektora uhlovej rýchlosti. Vidíme, že do prvej rovnice vstupuje x-ová zložka vektora momentu sily (označená písmenom P), y-ová a z-ová zložka vektora uhlovej rýchlosti (označené písmenami q a r), x-ová zložka vektora uhlového zrýchlenia (označená ako $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$), ako aj tri zložky momentu hybnosti (označené písmenami A, B, C).

Uvedené rovnice asi najlepšie ilustrujú význam Maclaurinovho prínosu, ktorý predstavuje prechod ku ***koordinatívnej forme jazyka***. Podobne ako v algebre Michael Stifel zjednotil (*koordinoval*) do jednotnej formy polynómu všetky typy rovníc určitého stupňa, ktoré boli predtým vyšetrované samostatne, Maclaurin zjednocuje (*koordinuje*) opis všetkých aspektov určitej mechanickej sústavy do jednotnej formy troch súradných osí.

4. Kompozitívna forma jazyka klasickej mechaniky: d'Alembert 1743. Na príklade kompozitívnej formy jazyka klasickej mechaniky možno ilustrovať proces postupného vynárania sa novej formy jazyka. Príslušné tri štádiá – fragmentárne, implicitné a explicitné - sú pomerne jasne odlíšiteľné, ich formulácie sú od seba časovo dostatočne vzdialené.

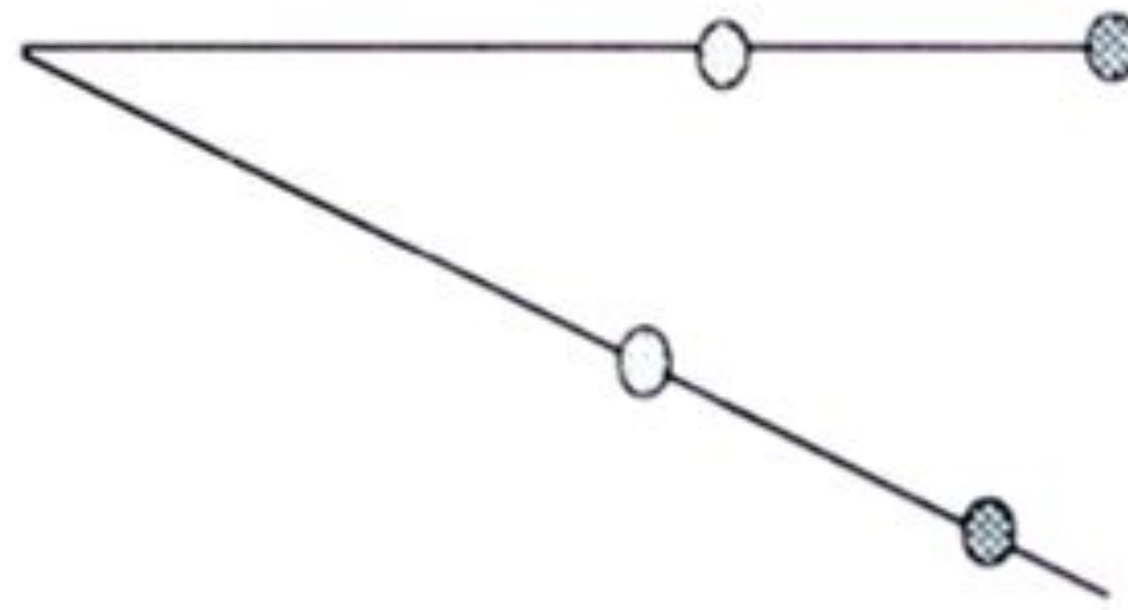
4. 1 Fragmentárna podoba kompozitívnej formy: Johann Bernoulli 1686.[3] Problémy, o ktorých sme hovorili doposiaľ, sa týkali pomerne jednoduchých sústav. Pri opise mechanických sústav tvorených viacerými telesami pospájanými väzbami, ktoré obmedzujú voľný pohyb jednotlivých telies, vzniká celý rad špecifických problémov súvisiacich so skutočnosťou, že sily, ktorými väzby pôsobia

---

[3] Skutočnosť, že fragmentárna podoba kompozitívnej formy jazyka sa objavuje takmer šesťdesiat rokov predtým, než predchádzajúca (koordinatívna) forma dosiahne svoju zavŕšenú podobu, svedčí o ďalšej zvláštnosti nášho pojatia dejín mechaniky ako vývinu jazyka. Nadväznosť jednotlivých štádií sa týka len ich zavŕšenej podoby, teda napríklad explicitná podoba kompozitívnej formy jazyka nadväzuje na explicitnú podobu koordinatívnej formy jazyka. Naproti tomu v rámci fragmentárnej podoby má väčšina foriem jazyka veľmi dlhú prehistóriu. Fragmenty, ktoré sa neskôr spoja do jednotnej formy, majú často za sebou dlhý vývin. Pritom v jednotlivých obdobiach sa môžu prelínať fragmenty, ktoré budú neskôr konštituovať rôzne formy jazyka. Postupnosť foriem jazyka, ktorú opisuje naša teória, sa tak týka až ich explicitnej podoby. Evolučnú zákonitosť vidíme napríklad v tom, že kompozitívna forma vo svojej zavŕšenej podobe nadväzuje na výdobytky predchádzajúcej koordinatívnej formy. Teda na to, aby sa mohla úspešne uskutočniť dekompozícia určitého problému na jeho nezávislé komponenty (ako to robí Lagrange), je nevyhnutné, aby idea súradného systému, základný výdobytok koordinatívnej formy jazyka, bol už dokonale zvládnutý.

na telesá, nepoznáme. Riešenie týchto problémov si vynútilo zrod novej formy jazyka. Prvý problém tohto druhu predložil roku 1646 Marin Mersenne (1588-1648). V najjednoduchšej podobe ho možno sformulovať ako otázku, s akou periódou bude kmitať kyvadlo pozostávajúce z pevnej nehmotnej tyče, na ktorej sú vo vzdialenostiach $l_1 < l_2$ od bodu závesu upevnené dve guličky o hmotnostiach m_1 a m_2. Každá gulička ponechaná sama na seba by kmitala s periódou danou známym Galileovým vzorcom $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde l je dĺžka ramena kyvadla a g je konštanta gravitačného zrýchlenia. Doba kyvu je teda úmerná odmocnine dĺžky ramena kyvadla a keďže $l_1 < l_2$, gulička m_1 by sa kývala s menšou periódou ako gulička m_2. Problém je však v tom, že guličky sú upevnené na spoločnej tyči, a preto sa nemôžu kývať oddelene, každá, ako sa jej zachce. Úlohou je nájsť dobu kyvu tohto zviazaného systému. Intuitívne je zrejmé, že doba kyvu zloženého systému musí ležať niekde medzi hodnotami $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ a $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$, lebo prvá gulička zrýchľuje pohyb druhej, kým druhá spomaľuje pohyb prvej. Guličky na seba pôsobia prostredníctvom väzby.

Nasledovný obrázok zachytáva dva okamihy pohybu tohto systému.



Roku 1686 predložil Johann Bernoulli (1667-1748) riešenie tohto problému, založené na myšlienke, ktorá v zárodku obsahuje jadro d'Alembertovho princípu. Bernoulli uvažoval takto: Predstavme si, že tyč vychýlime do vodorovnej polohy. Keby nebolo väzby (t.j. tyče) spájajúcej guličky, obe by padali voľným pádom. Keďže sú však navzájom spojené nehmotnou tyčou, tento pohyb nie je možný. Tyč bude brzdiť pád guličky m_1 a naopak zrýchľovať pád guličky m_2. Takto gulička m_1 utrpí stratu a naopak gulička m_2 nárast zrýchlenia. Bernoulliho základná myšlienka spočívala v tom, že príslušná strata, resp. zisk ***musia byť vo vzájomnej rovnováhe***. Pri pohybe systému z vodorovnej polohy padajú telesá m_1 a m_2 so zrýchleniami

$$b_1 = \frac{l_1}{l} g \qquad\qquad b_2 = \frac{l_2}{l} g .$$

kde l je zatiaľ neznáma hodnota ležiaca medzi hodnotami l_1 a l_2. Je to hodnota, ktorú treba dosadiť do Galileovho vzťahu pre periódu kmitania. Keďže $l_1 < l < l_2$, je zrejme $b_1 < g < b_2$. To je presne to, čo sme očakávali, prvá gulička stráca, druhá získava v porovnaní s voľným pohybom. Pritom za krátky okamih dt stráca prvá gulička hybnosť $m_1(g - b_1).dt$, čo zodpovedá „*stratenej sile*“ $\boldsymbol{m_1(g - b_1)}$. Naopak druhá gulička sa zasa pohybuje so zrýchlením, ktoré je väčšie než jej zrýchlenie pri voľnom páde. Jej „*získaná sila*“ bude analogicky $\boldsymbol{m_2(b_2 - g)}$. A tieto dve sily sú vo vzájomnej rovnováhe, ktorú Bernoulli opísal pomocou Archimedovho zákona rovnováhy na páke

$$m_1.(g - b_1).l_1 \;=\; m_2.(b_2 - g).l_2.$$

Pomocou jednoduchých úprav dostávame $l = \dfrac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}$. Táto dĺžka určuje periódu kmitania uvažovaného systému, ktorá bude teda rovná

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 l_1 + m_2 l_2)g}}.$$

Základná idea, ktorá sa tu vynorila zatiaľ iba ako trik pri riešení špeciálneho problému, spočíva v tom, že ***sily pochádzajúce od väzieb sú vo vzájomnej rovnováhe***. Opis tejto rovnováhy pomocou zákona rovnováhy na páke využíva špeciálne danosti úlohy, a teda je obmedzený na malý počet úloh podobného charakteru. Preto hovoríme o ***fragmentárnej podobe*** kompozitívnej formy jazyka.

4. 2 Implicitná podoba kompozitívnej formy jazyka: D'Alembert 1743. Všeobecný princíp umožňujúci vyriešiť ľubovoľnú úlohu, v ktorej je pohyb mechanického systému podrobený väzbám, sformuloval Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) vo svojom diele ***Traité de Dynamique*** roku 1743 takto: „*Všeobecná úloha: Majme daný systém telies, ktoré sú navzájom ľubovoľným spôsobom rozmiestnené; predpokladajme, že každému telesu je vlastný určitý pohyb, ktorý však nemôže uskutočniť v dôsledku pôsobenia ostatných telies: hľadá sa pohyb, ktorý musí prijať každé teleso. Riešenie: Nech sú A, B, C etc. telesá tvoriace systém a predpokladajme, že sú im vlastné pohyby* a, b, c, *ktoré sú však nútené v dôsleku vzájomného pôsobenia zmeniť na pohyby* $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. *Je zrejmé, že pohyb* a *vlastný telesu A možno zložiť z pohybu* $\underline{a}$, *ktorý teleso skutočne vykonáva, a iného pohybu* $\underline{\alpha}$; *a že rovnako si možno predstaviť aj pohyby* b, c *ako zložené z pohybov* $\underline{b}$, $\underline{\beta}$; $\underline{c}$, $\underline{\gamma}$ *atď; ... Z toho vyplýva, že pohyby telies A, B, C by boli rovnaké, keby im boli udelené namiesto pohybov* a, b, c *atď. súčasne dvojice pohybov* $\underline{a}$, $\underline{\alpha}$; $\underline{b}$, $\underline{\beta}$; $\underline{c}$, $\underline{\gamma}$ *atď. Teraz ale podľa predpokladu telesá A, B, C atď. by samé od seba prijali pohyby* a, b, c *atď. Preto pohyby* $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\gamma}$ *atď. musia byť také, že na pohyboch* $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ *atď. nič nezmenia, to znamená, že keby telesá konali len pohyby* $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\gamma}$ *atď., museli by sa tieto pohyby navzájom vyrušiť a sústava by musela ostať v pokoji.*“ ([3], 108)

D'Alembert tu vyslovil v plnej všeobecnosti požiadavku, ktorá bola u Bernoulliho viazaná na kontext konkrétnej úlohy. Táto požiadavka v dnešnej terminológii hovorí, že sily väzieb sú navzájom v rovnováhe. D'Alembert svoj princíp vyslovil plne explicitne. Termín implicitná v nadpise kapitoly odkazuje nie na princíp, ale na formu jazyka, v ktorej je vyjadrený. Jazyk, v ktorom d'Alembert svoj princíp formuluje, ešte neuchopuje sily väzieb automaticky, ale vyžaduje neustále na tieto sily myslieť. Na rozdiel od Bernoulliho tu síce máme všeobecný princíp, použiteľný na ľubovoľnú úlohu, a teda spoločný všetkým fragmentom jazyka, všetkým konkrétnym kontextom jeho použitia. Ale na druhej strane u každej konkrétnej úlohy musíme sami odhaliť, ako máme princíp použiť. Princíp je teda syntetickým princípom, princípom odkazujúcim na istú implicitnú štruktúru (štruktúre rovnováhy síl väzieb), ktorú musíme sami nájsť. Princíp nás síce vedie smerom k tejto štruktúre, ale jej konkrétnu podobu musíme určiť sami.

4. 3 Explicitná podoba kompozitívnej formy jazyka: Lagrange 1788.

Pri výklade vývinu syntetickej geometrie sme sa stretli s pozoruhodným javom, ktorý sme označili ako zabudovanie formy jazyka do jazyka. To, čo bolo v určitom vývinovom štádiu viazané na syntetický názor, sa v nasledujúcom štádiu premieňa na sled analytických úkonov, podriadených plne explicitným pravidlám. Jazyk tak preberá úlohu, ktorá predtým pripadala názoru. Takto vzťah analytického a syntetického je vlastne vzťahom explicitnej a implicitnej podoby formy jazyka. Keď je forma jazyka implicitná, je nositeľom úprav syntetický názor. Akonáhle sa forma jazyka stane plne explicitnou, zmenia sa úpravy na vnútrojazykovú, úplne analytickú záležitosť. V prípade kompozitívnej formy jazyka klasickej mechaniky prináša jej explicitnú podobu Lagrange v diele ***Mécanique analytique*** [16]. V Lagrangeovom pojatí už d'Alembertov princíp nespočíva vo výzve predstaviť si (t.j. v názore synteticky reprezentovať) pohyby zložené zo skutočných a myslených komponentov, ako to bolo ešte u d'Alemberta. Lagrange tento princíp zabudoval priamo do spôsobu opisu mechanického systému. Uvedieme aspoň základné kroky Lagrangeovho odvodenia, na ktorých možno jasne vidieť charakteristické črty explicitnej podoby kompozitívnej formy jazyka.

Uvažujme sústavu hmotných bodov s hmotnosťami $m_1, m_2, \dots m_n$. Označme súradnice k-teho bodu ako (x_k, y_k, z_k) a zložky vonkajšej sily, ktorá naň pôsobí, ako (X_k, Y_k, Z_k). Predpokladajme ďalej, že sústava spĺňa r väzieb, teda že polohy jednotlivých telies nie sú úplne ľubovoľné, ale spĺňajú vzťahy

$$F_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n), \quad \dots, \quad F_r(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n). \tag{2}$$

V dôsledku týchto väzieb pôsobia na teleso m_k okrem sily (X_k, Y_k, Z_k) ešte aj sily väzieb, ktorých zložky označíme (P_k, R_k, S_k). Na základe Newtonových rovníc platí[4]

---

[4] Bodka nad písmenom označuje časovú deriváciu príslušnej veličiny, dve bodky označujú druhú deriváciu, atď. Táto konvencia pochádza ešte od Newtona a kvôli jej

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + P_k, \qquad m_k \ddot{y}_k = Y_k + R_k, \qquad m_k \ddot{z}_k = Z_k + S_k. \quad (3)$$

Zrýchlenie určitého telesa v danom smere je výsledkom pôsobenia vonkajších a väzbových síl v danom smere. Zatiaľ sme plne v rámci koordinatívnej formy jazyka, keď zložitý systém telies opisujeme z hľadiska pevne zvolenej súradnej sústavy. Problém však spočíva v tom, že sily P_k, R_k a S_k nepoznáme. Sú to sily, ktoré vznikajú v dôsledku väzieb, a ako príklad si možno predstaviť sily, ktorými v Bernoulliho príklade rameno kyvadla pôsobilo na jednotlivé guličky.

D'Alembertov princíp hovorí, že sily väzieb sú pasívne, teda celková práca konaná silami väzieb je nulová. Preto keď si predstavíme, že k-te teleso vychýlime o malé posunutie (δx_k, δy_k, δz_k), práca, ktoré pritom vykonajú sily P_k, R_k a S_k, bude rovná nule. Teda

$$\sum_{k=1}^{n} P_k.\delta x_k + \sum_{k=1}^{n} R_k.\delta y_k + \sum_{k=1}^{n} S_k.\delta z_k = 0. \quad (4)$$

Vidíme, že táto podmienka sa týka systému ako celku, je to jediná rovnica, do ktorej vstupujú príspevky od všetkých síl väzieb. Lagrangeovým ***prvým krokom*** bolo z rovníc (3) vyjadriť sily väzieb ako

$$m_k \ddot{x}_k - X_k = P_k \qquad m_k \ddot{y}_k - Y_k = R_k \qquad m_k \ddot{z}_k - Z_k = S_k$$

a tieto vyjadrenia dosadiť do vzťahov (4). Tento krok možno považovať za ilustráciu Wittgensteinovej maximy *„O čom nemožno hovoriť, o tom treba mlčať."*[5] Keďže sily reakcie nepoznáme, tak nemajú čo figurovať v matematickom opise systému. Takto vzťah (4) nadobúda tvar

$$\sum_{k=1}^{n} \left(m_k \ddot{x}_k - X_k\right).\delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \left(m_k \ddot{y}_k - Y_k\right).\delta y_k + \sum_{k=1}^{n} \left(m_k \ddot{z}_k - Z_k\right).\delta z_k = 0. \quad (5)$$

Tento vzťah predstavuje ***zabudovanie d'Alembertovho princípu do jazyka***. Sily väzby zohľadňuje bez toho, že by ich spomenul. Sily väzby sa stávajú súčasťou formy. Vo vzťahu (5) už nevystupuje žiadna sila reakcie, a napriek tomu tento vzťah vyjadruje skutočnosť, že práca síl reakcie je rovná nule.

Lagrangeov ***druhý krok*** je vedený snahou rozložiť vzťah (5) na sústavu nezávislých rovníc, teda celkový pohyb systému vyjadriť ako ***kompozíciu nezávislých pohybov***. Problém spočíva v tom, že posunutia δx_k, δy_k, a δz_k nie sú nezávislé, ale sú zviazané sústavou väzieb (2). Z rovníc (2) dostávame pre posunutia

---

stručnosti sa vo fyzike podnes používa.

[5] Spomínanie Wittgensteina v spojitosti s Lagrangeom nie je až také anachronické, ako by sa na prvý pohľad mohlo zdať. Smer vplyvu je tu však pravdepodobne od Lagrangea k Witttgensteinovi. Všeobecne je známy vplyv Hertzovej *Mechaniky* na Wittgensteina a Hertzov program možno chápať ako radikalizáciu Lagrangeovho prístupu. Náš odkaz na Wittgensteina chcel len naznačiť, že mnohé aspekty Wittgensteinovho *Traktátu* sú príbuzné s duchom Lagrangeovho prístupu k mechanike.

δx_k, δy_k, a δz_k podmienky

$$\delta F_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial F_i}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Každú z týchto r rovníc Lagrange vynásobil tzv. Lagrangeovým súčiniteľom λ_i, sčítal ich a ich súčet pripočítal k rovnici (5). Dostal tak pomerne zložito vyzerajúci vzťah

$$\sum_{k=1}^{n}\left(m_k\ddot{x}_k - X_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right).\delta x_k + \sum_{k=1}^{n}\left(m_k\ddot{y}_k - Y_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial F}{\partial y_k}\right).\delta y_k + $$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left(m_k\ddot{z}_k - Z_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial z_k}\right).\delta z_k = 0. \qquad (6)$$

Zmysel tohto postupu je nasledovný. Vo vzťahu (5) boli posunutia δx_k, δy_k, a δz_k zviazané sústavou r väzieb, a preto nebolo možné prejsť od rovnice (5) k systému rovníc pre jednotlivé zložky (teda pohyb systému nebolo možné rozložiť na nezávislé komponenty). Naproti tomu v rovnici (6) vďaka tomu, že Lagrange pridal k systému r nových parametrov λ_i už takéto rozloženie možné je. Lagrangeovi sa tak podarilo pohyb systému rozložiť na $3n$ nezávislých pohybov.

Takto sa pred nami odkrýva zmysel kompozitívnej formy jazyka: zložitý problém vyjadriť ako kompozíciu čiastkových problémov. Presne o to isté sa Lagrange pokúšal aj v algebre, kde chcel rovnicu piateho stupňa rozložiť pomocou pomocných rovníc, tzv. rezolvent. Keďže však v algebre takéto rozloženie vo všeobecnosti možné nie je, Lagrangeove snahy tam ostali neúspešné. Naproti tomu v mechanike Lagrange uspel a rovnice opisujúce pohyb mechanickej sústavy podrobenej väzbám sa dodnes nazývajú ***Lagrangeovými rovnicami prvého druhu***. Ich tvar je:

$$m_k\ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k};\; m_k\ddot{y}_k = Y_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial y_k};\; m_k\ddot{z}_k = Z_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial z_k}.$$

Z epistemologického hľadiska sú tieto rovnice pozoruhodné tým, že v nich vedľa veličín, ktoré majú priamy fyzikálny zmysel, vystupujú aj parametre λ_i, ktoré boli zavedené čisto formálne, ako parametre umožňujúce rozložiť systém na nezávislé komponenty. Dá sa ukázať, že tieto parametre súvisia so silami väzieb. Dôležité však je to, že nepredstavujú veličiny, ktoré by sme získali meraním. Ich zdrojom nie je skúsenosť, ale formalizmus. Nie sú to empiricky určené veličiny, ale kompozitívne parametre.

5. Interpretatívna forma jazyka klasickej mechaniky: Lagrange 1788. Interpretatívna forma jazyka klasickej mechaniky sa prvýkrát objavila v Lagrangeovej *Mécanique Analytique* (Lagrange 1788). Táto skutočnosť poukazuje na zvláštnosť symbolických jazykov, kde sa fragmenty prislúchajúce k rôznym formám jazyka vyskytujú často vedľa seba v jednom texte. V prvej časti svojej *Analytickej mechaniky* Lagrange uviedol metódu neurčitých súčiniteľov, ktorá umožňuje rozložiť opis mechanického systému s väzbami na súbor nezávislých úloh. Lagrangeov prístup spočíval na idei doplniť formuláciu úlohy o dodatočné parametre tak, aby sa jednotlivé premenné stali nezávislými a aby pôvodnú úlohu bolo možné rozložiť na súbor samostatných problémov. Tento postup je síce po technickej stránke dôvtipný, ale je vlastne zbytočný. Celá nutnosť zavádzať dodatočné súčinitele je vyvolaná tým, že na začiatku sme zvolili príliš mnoho parametrov na opis úlohy. Zvolili sme $3n$ parametrov, po jednom pre x-ovú, y-ovú a z-ovú súradnicu každého z n telies tvoriacich systém, aj keď samotná úloha mala iba $3n-r$ stupňov voľnosti (r je počet väzieb). Plytvanie s parametrami pri formulácii úlohy sa vypomstilo v tom, že v dôsledku väzieb parametre stratili nezávislosť. Stratenú nezávislosť sme potom museli obnovovať pomocou dômyselnej techniky Lagrangeových súčiniteľov. Táto okolnosť jasne odhaľuje základný nedostatok kompozitívnej formy jazyka spočívajúci v tom, že súradná sústava sa volí nezávisle od špecifických daností riešenej úlohy. Tri súradné osi (x, y, z) sú pevne fixované v priestore, a každé teleso tak automaticky dostáva svoje tri súradnice, či už sú potrebné na opis systému telies, alebo nie. Lagrange pochopil, že technika neurčitých súčiniteľov je iba nástrojom na kompenzáciu prvotnej nedôslednosti pri voľbe parametrov. Keby sme hneď na začiatku zvolili na opis systému toľko parametrov, koľko má systém stupňov voľnosti, tak by sme žiadne väzby ani žiadne väzbové súčinitele uvažovať nemuseli. Jednotlivé parametre by boli nezávislé a dekompozícia problému by tak bola automaticky zabezpečená.

Základná idea pri tvorbe interpretatívnej formy jazyka spočíva v ***prechode od reprezentačného ku konfiguračnému priestoru*** - od $3n$-rozmerného priestoru, v ktorom každému telesu daného systému prislúchajú tri súradnice, reprezentujúce jeho polohu v priestore, prejsť k $3n-r$ rozmernému priestoru, v ktorom bod zadáva konfiguráciu systému ako celku bez ohľadu na jednotlivé telesá. Prechod od reprezentačného priestoru ku konfiguračnému priestoru možno ilustrovať na Bernoulliho kyvadle, ktoré sme opísali v kapitole 4. 1. Poloha kyvadla je jednoznačne určená uhlom φ, ktorý udáva vychýlenie ramena kyvadla zo zvislého smeru. Súradnice jednotlivých telies sú potom dané vzťahmi

$$x_1 = l_1.\sin(\varphi), \quad y_1 = l_1.(1-\cos(\varphi)), \quad x_2 = l_2.\sin(\varphi), \quad y_2 = l_2.(1-\cos(\varphi)).$$

V rámci kompozitívnej formy jazyka sme namiesto toho, aby sme kyvadlo opísali použijúc súradnicu φ, zaviedli štyri parametre (x_1, y_1, x_2, y_2). Tieto parametre sú zviazané tromi podmienkami:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2, \qquad x_2^2 + y_2^2 = l_2^2, \qquad x_1 : y_1 = x_2 : y_2.$$

Potom, čo sme si problém zbytočne skomplikovali, bolo treba nájsť metódu, ako sa zbaviť troch nadbytočných parametrov. Prvým princípom interpretatívnej formy jazyka je preto prechod do ***konfiguračného priestoru***, ktorý má presne toľko rozmerov, koľko parametrov treba na jednoznačné zadanie konfigurácie danej úlohy. V prípade nášho kyvadla by to bol priestor s jediným rozmerom zodpovedajúcim parametru φ.

Pojatie mechaniky založené na kompozitívnej forme jazyka malo však jednu nespornú výhodu. V dôsledku toho, že sa pohyb opisoval v euklidovskom priestore, pohybové rovnice boli jednoduché. Zrýchlenie pohybu častice je úmerné sile, ktorá na ňu pôsobí. Ak silu zadáme pomocou potenciálnej energie V, Newtonove pohybové rovnice nadobudnú tvar

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i}. \tag{8}$$

Lagrangeovo rozhodnutie opisovať mechanickú úlohu pomocou jej prirodzených premenných naráža na problém. Pohyb, ktorý zodpovedá rovnomernému narastaniu parametra, nemusí byť zotrvačný. Stačí sa pozrieť na naše kyvadlo. Keď uhol φ rovnomerne narastá, guličky sa pohybujú po kružnici. Pohyb po kružnici je však pohyb zrýchlený, a teda je dôsledkom pôsobenia sily. Preto silové pôsobenie je nutné nielen na zrýchlenie pohybu v smere φ, ale už aj na jeho udržanie. Teda zjednodušenie reprezentácie problému (t.j. vynechanie zbytočných súradníc) vedie ku komplikácii rovníc opisujúcich pohyb. Keď pripustíme, aby súradnice, ktorými opisujeme problém, boli krivočiare, musíme do pohybovej rovnice zahrnúť dodatočné členy, ktoré kompenzujú zakrivenie súradných osí. Zotrvačnosť pohybu už nie je ekvivalentná rovnomernosti narastania parametrov, t.j. konštantnosti rýchlosti. V krivočiarych súradniciach tak neplatí bežná formulácia prvého Newtonovho zákona. Teleso, na ktoré nepôsobia žiadne *sily, nebude meniť svoje krivočiare súradnice* konštantnou rýchlosťou. Lagrangeova zásluha spočíva v tom, že našiel spôsob, ako možno pohybové rovnice prepísať do krivočiarych súradníc.

Situácia tu pripomína Gaussovu ideu prechodu k vnútorným súradniciam pri opise geometrie na ploche. Pred Gaussom sa plochy opisovali ako vnorené do trojrozmerného priestoru. To malo za následok, že pri výpočte dĺžky krivky ležiacej na ploche (čo je z hľadiska plochy dvojparametrická úloha) vystupovali tri priestorové súradnice (x, y, z). Jedna z nich je zjavne zbytočná, a preto Gauss zaviedol na ploche tzv. *indukovanú metriku*, ktorá používa len dve súradnice (u, v). Problém sa tým zjednodušil čo do počtu parametrov, ale skomplikovalo sa vyjadrenie dĺžky. Kým v trojrozmernom euklidovskom priestore je dĺžka daná vzťahom

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{9}$$

čo je vlastne trojrozmerný analóg Pytagorovej vety hovoriaci, že keď sa v smere súradných osí posunieme o malé elementy *dx*, *dy*, *dz*, tak sa od počiatočnej polohy vzdialime o vzdialenosť *ds* danú vzťahom (9). V krivočiarych súradniciach je už vzťah vyjadrujúci narastanie vzdialenosti *ds* v dôsledku posunutia o malé vzdialenosti *du* a *dv* zložitejší. Gauss ukázal, že vo všeobecnosti má tvar

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

kde *E*, *F*, *G* sú tzv. Gaussove koeficienty. Podobne ako Gaussa zmenšenie počtu parametrov opisujúcich daný problém prinútilo prejsť k zložitejšiemu vzťahu pre vzdialenosť, Lagrangea prinútilo zmenšenie počtu parametrov prejsť od jednoduchých pohybových rovníc ku komplikovanejším rovniciam. Možno povedať, že Lagrange zavádza „*indukovanú dynamiku*" analogickú Gaussovej indukovanej metrike.

Tu sa dostávame k druhej ústrednej myšlienke nového spôsobu opisu pohybu, ktorou je ***preklad pohybových rovníc do jazyka konfiguračného priestoru***. Z epistemologického hľadiska je preklad medzi vonkajším a vnútorným opisom pohybu čímsi, čo stavia jazyk Lagrangeovej mechaniky do paralely s Beltramiho modelom neeuklidovskej geometrie, Gaussovou vnútornou geometriou plôch, ako aj s teóriou rozširovania polí v algebre. Pozrime sa, ako tento preklad vyzerá v prípade prechodu k polárnym súradniciam v rovine, čo je asi najjednoduchší príklad krivočiarych súradníc: V polárnych súradniciach v rovine je poloha bodu určená jeho vzdialenosťou *r* od počiatku (pólu) a uhlom φ, ktorý zviera jeho spojnica s počiatkom so zvoleným smerom. Keď zavedieme v danom bode lokálne osi v smere narastania súradníc r a φ, tak ich jednotkové vektory môžeme označiť ako e_r a e_φ. Polohový vektor daného bodu potom má vyjadrenie

$$\vec{r} = r.e_r\,,$$

ktoré hovorí, že daný bod sa nachádza vo vzdialenosti *r* v smere e_r. Keď chceme určiť rýchlosť daného bodu, musíme derivovať tento vzťah. Dostávame vzťah

$$\vec{v} = \dot{r}.e_r + r\dot{\varphi}.e_\varphi\,,$$

ktorý hovorí, že rýchlosť pohybu bodu má dve zložky. Prvá, ktorú nazývame radiálnou, vyjadruje vzďaľovanie sa bodu od počiatku v smere vektora e_r a spočíva v narastaní parametra *r*. Druhá, ktorú nazývame tangenciálnou, vyjadruje otáčavý pohyb bodu spojený s narastaním parametra φ. Celková rýchlosť je súčtom týchto dvoch zložiek. Ďalším derivovaním dostaneme zrýchlenie

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2).e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}).e_\varphi\,.$$

Interpretácia jednotlivých členov je nasledovná:

$\ddot{r}.e_r$ — zrýchlenie radiálneho pohybu spočívajúce v narastaní radiálnej rýchlosti;

$r\ddot{\varphi}.e_\varphi$ — zrýchlenie rotačného pohybu spočívajúce v narastaní uhlovej rýchlosti;

$-r\dot{\varphi}^2.e_r$ — dostredivé zrýchlenie pri pohybe po kružnici s konštantnou uhlovou rýchlosťou;

$2\dot{r}\dot{\varphi}.e_\varphi$ — Coriolisovo zrýchlenie pri pohybe po špirále s konštantnou radiálnou a uhlovou rýchlosťou.

Interpretácia príslušných členov je zatiaľ robená z hľadiska ***vonkajšieho jazyka***, t.j. z hľadiska priamočiarych súradníc. Z hľadiska krivočiarych súradníc tretí člen nezodpovedá pohybu po žiadnej kružnici, ale je to jednoducho pohyb pozdĺž súradnej osi φ. Podobne štvrtý člen nie je pohybom po špirále, ale po priamke ležiacej šikmo medzi osami r a φ. Tieto dva pohyby sú krivočiare len z vonkajšieho hľadiska, z hľadiska priamočiarych súradníc. Z vnútorného hľadiska sú to priamočiare pohyby, lebo ich opisuje lineárny vzťah medzi súradnicami r a φ. Preto keď chceme pri opise pohybu prejsť do vnútorného jazyka, musíme napred pochopiť, čo znamenajú tieto členy z hľadiska krivočiarych súradníc. Avšak napred zapíšme vo vonkajšom jazyku Newtonove pohybové zákony:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r} \tag{9}$$

$$2m\dot{r}\dot{\varphi} + mr\ddot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}.\frac{1}{r}. \tag{10}$$

Prvá rovnica hovorí, že ak chceme telesu dať radiálne zrýchlenie alebo ho chceme udržať na kruhovej dráhe, potrebujeme na to radiálnu silu. Podobne druhá rovnica hovorí, že ak chceme zrýchliť rotáciu telesa alebo ho chceme udržať na špirálovitej dráhe, potrebujeme na to tangenciálnu silu. To ešte nie je preklad, ale len obyčajný prepis vzťahu (8) pomocou parametrov r a φ. Aj keď je kinematika pohybu už zapísaná pomocou nových parametrov, dynamika, teda spojenie síl a zrýchlení, sa uskutočňuje ešte vo vonkajšom jazyku. Prejavuje sa to napríklad v tom, že člen $mr\dot{\varphi}^2$ vystupuje na ľavej strane rovnice ako dôsledok pôsobenia síl. Z vnútorného hľadiska však člen $mr\dot{\varphi}^2$ zodpovedá rovnomernému priamočiaremu pohybu po osi φ, a preto nemá čo hľadať na ľavej strane rovnice. Tu máme do činenia s podobnou možnosťou dvojakej inerpretácie, aká je charakteristická aj pre Beltramiho model neeuklidovskej geometrie. V Beltramiho modeli bola určitá čiara z vonkajšieho (euklidovského) hľadiska tetivou euklidovského kruhu, kým z vnútorného (neeuklidovského) hľadiska bola tá istá čiara priamkou neeuklidovskej roviny. Tu analogicky určitý pohyb je z vonkajšieho hľadiska rovnomerným pohybom po kružnici (teda po krivke roviny x, y) a ako pohyb po krivke je zrýchleným pohybom, ktorý je výsledkom pôsobenia síl. Ale ten istý pohyb je z vnútorného hľadiska rovnomerným pohybom pozdĺž súradnej osi φ, a teda jeho zrýchlenie je nulové. Preto keď chceme prepísať pohybové rovnice do vnútorného jazyka, musíme predovšetkým preniesť člen s dostredivým zrýchlením na pravú stranu prvej rovnice, čím dostaneme sústavu

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}. \qquad (11)$$

To znamená, že ***z hľadiska vnútorného jazyka sa tu objavuje nová sila***, ktorú môžeme nazvať odstredivou silou. Teleso, ktoré sa pohybuje po „priamke rovnobežnej s osou φ" (my vieme, že v skutočnosti je to kružnica), pociťuje pôsobenie sily.

Tým sa tu však objavuje určitá asymetria. „Skutočná" newtonovská sila je daná pomocou potenciálnej energie V, kým odstredivá sila je zadaná pomocou obyčajného vzorca. Ukazuje sa, že aj odstredivú silu možno dostať pomocou potenciálu. ***Jej potenciálom je kinetická energia***. Naozaj

$$mr\dot{\varphi}^2 = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2) = \frac{\partial T}{\partial r}. \qquad (12)$$

Keď si kinetickú energiu $\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ označíme T, možno rovnicu (11) zapísať v tvare

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2) - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(T - V), \qquad (13)$$

čo znamená, že zrýchlenie pohybu je spôsobené silou, ktorej potenciál je rozdielom kinetickej energie T a pôvodnej potenciálnej energie V.

Teraz by sme sa mohli pokúsiť zaviesť analogickú korekciu aj pre Coriolisove zrýchlenie. Mohli by sme sa pokúsiť preniesť aj Coriolisovo zrýchlenie, ktoré existuje z hľadiska vonkajšieho jazyka, do vnútorného jazyka ako Coriolisovu silu a potom skúsiť nájsť potenciál pre túto novú silu. Toto hľadanie si však môžeme ušetriť, lebo aj Coriolisovu silu dostaneme z kinetickej energie T, podobne ako silu odstredivú. Aby sme ukázali, ako, skúsme napred vyjadriť pomocou kinetickej energie radiálnu zložku zrýchlenia. Platí, že

$$m\ddot{r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) \qquad (14)$$

Člen zodpovedajúci zrýchleniu v radiálnom smere, teda môžeme dostať z kinetickej energie, keď ju derivujeme napred podľa radiálnej rýchlosti a potom podľa času. Keď sa pokúsime ten istý trik (teda derivovať kinetickú energiu T napred podľa rýchlosti v určitom smere a výsledok derivovať podľa času) urobiť aj pre smer $\dot{\varphi}$,dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}. \qquad (15)$$

Vidíme, že sme automaticky dostali Coriolisovu silu (vynásobenú faktorom r). Keď za ľavú stranu rovnice (10) dosadíme vyjadrenie zo vzťahu (15), vidíme, že faktor r sa vykráti a pre pohyb v smere φ dostaneme pohybovú rovnicu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \tag{16}$$

Analogické dosadenie vyjadrenia zo vzťahu (14) namiesto ľavej strany rovnice (13) vedie k rovnici

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial}{\partial r}(T - V). \tag{17}$$

Rovnice (16) a (17) predstavuju preklad vzťahov (9) a (10) do vnútorného jazyka. Už v nich niet žiadnej zmienky o dostredivých zrýchleniach, lebo vo vnútornom jazyku niet žiadneho stredu. Všetky termíny, ktoré v týchto rovniciach vystupujú, sú pre obyvateľov sveta krivočiarych súradníc plne zrozumiteľné. Je tu ešte malá chyba krásy spočívajúca v tom, že tieto rovnice majú rozličné pravé strany, ale to sa dá ľahko odstrániť. Keď si uvedomíme, že potenciálna energia V nezávisí od rýchlosti $\dot{\varphi}$ a $\dot{r}$, možno v rovniciach (16) a (17) čisto formálne na ľavej strane namiesto T dosadiť rozdiel $T - V$. Podobne, keďže kinetická energia nezávisí od uhla φ, možno na pravej strane rovnice (16) nahradiť $-V$ veličinou $T - V$. Preto keď označíme $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r,\varphi)$, možno obidve rovnice zapísať v jednotnom tvare

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

Jednotný tvar rovníc ukazuje, že nemusíme rozlišovať, či určitá súradnica vyjadruje vzdialenosť alebo uhol, a tak môžeme namiesto r a φ zaviesť tzv. ***zovšeobecnené súradnice*** q_i. Pomocou nich nadobúdajú Lagrangeove rovnice pre systém opísaný pomocou l súradníc $q_1, q_2, \ldots, q_l$ tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, l \tag{18}$$

Prechod k Lagrangeovým rovniciam sme ilustrovali na najjednoduchšom prípade krivočiarych súradníc, ktorými sú polárne súradnice. Základná schéma tohto prechodu je však rovnaká aj vo všeobecnom prípade ([18], 22-24). Newtonove rovnice sú špeciálnym prípadom Lagrangeových rovníc pre prípad priamočiarych súradníc. V prípade priamočiarych súradníc totiž kinetická energia nezávisí od polohy, ale len od rýchlosti, a preto vo vzťahoch (18) nevzniká žiaden člen typu odstredivej alebo Coriolisovej sily. Z Lagrangeových rovníc dostaneme priamo rovnice Newtonove. Helmholtz nazval funkciu L ***kinetickým potenciálom***, čo túto veličinu dobre vystihuje, ale viac sa vžilo označenie ***Lagrangeova funkcia***.

6. Integratívna forma jazyka klasickej mechaniky: Hamilton 1834. Integratívnu formu jazyka klasickej mechaniky vytvoril William Rovan Hamilton (1805-1865) vo svojej práci ***On a General Method in Dynamics*** [8]. Základom

Hamiltonovho systému bolo nahradenie Lagrangeových rovníc (18), ktoré sú rovnicami druhého rádu, sústavou rovníc prvého rádu. S týmto cieľom Hamilton zmenil parametre, pomocou ktorých opisujeme mechanickú sústavu. Lagrange opisoval mechanickú sústavu pomocou ***konfiguračného priestoru***; pre sústavu s l stupňami voľnosti použil l rozmerný priestor zovšeobecnených súradníc (q_1, q_2, ..., q_l). Na zadanie stavu systému bol nútený k súradniciam pripojiť aj rýchlosti, teda zadať $2l$ parametrov $\left(q_1, q_2 \ldots q_l; \dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_l\right)$. To znamená, že u Lagrangea stav nie je geometricky reprezentovaný. V konfiguračnom priestore je zachytených iba l súradníc, kým l rýchlostiam chýba geometrická reprezentácia.

Hamilton pri opise mechanickej sústavy prešiel k ***fázovému priestoru***. Napred definoval tzv. zovšeobecnené hybnosti $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, pričom fázový priestor je potom $2l$-rozmerný priestor parametrov $\left(q_1, q_2 \ldots q_l; p_1, p_2 \ldots p_l\right)$. To znamená, že v porovnaní s konfiguračným priestorom má fázový priestor dvojnásobný počet dimenzií. Táto zmena má zásadný význam, lebo takto bod fázového priestoru jednoznačne zadáva ***dynamický stav*** mechanickej sústavy, a nie len jej ***geometrickú konfiguráciu***, ako to je v prípade konfiguračného priestoru. Hamiltonov fázový priestor je pozoruhodná matematická konštrukcia. Jeho prvých l dimenzií zadáva konfiguráciu daného systému, a teda je to geometrický priestor ako všetky ostatné priestory, priestor, ktorého body reprezentujú polohy telies. Avšak druhých l dimenzií zadáva hybnosti, teda pohybový stav. Preto možno povedať, že Hamilton geometrizuje dynamiku. Hybnosť, teda čosi, čo sa viaže s intenzitou pohybu, premieňa na priestorovú súradnicu, teda na extenziu. Telesu pohybujúcemu sa v trojrozmernom priestore tak Hamilton priradil bod v šesťrozmernom fázovom priestore, ktorého prvé tri súradnice hovoria, kde sa teleso nachádza, kým zvyšné tri súradnice udávajú, ako rýchlo sa pohybuje. Rýchlosť je tak zadaná polohou, to, ako rýchlo sa teleso pohybuje, zistíme z toho, kde sa nachádza. Hýbať sa určitou rýchlosťou znamená byť na určitom mieste fázového priestoru. Pohyb sa externalizuje, mení sa na polohu. To, ako rýchlo sa teleso pohybuje, je určené miestom, kde sa nachádza. Descartova téza, že pohyb je stav, nadobúda doslovný význam.

Hamiltonove rovnice opisujúce pohyb majú tvar

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, l, \tag{19}$$

kde $H = \sum_{i=1}^{l} p_i \dot{q}_i - L$ je tzv. Hamiltonova funkcia. Každej rovnici systému (18) tu zodpovedá dvojica rovníc. Teda namiesto l rovníc druhého rádu má Hamilton $2l$ prvého rádu. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že táto zmena je triviálna, jednoducho rýchlosti (presnejšie hybnosti) vyhlásime za nové súradnice, a tak sa každá z rovníc druhého rádu rozpadne na dve rovnice prvého rádu. Ale zmena, ktorú tým Hamilton dosiahol, je ďalekosiahla. To, že Lagrangeove rovnice sú rovnicami druhého rádu, znamená, že na zadanie stavu systému je okrem súradníc nutné udať aj rýchlosti. Preto tým istým bodom konfiguračného priestoru prechádza nespočetné množstvo rôznych trajektórií. Poznáme to z bežnej skúsenosti, keď tým istým bodom priestoru môžeme prejsť rôznymi rýchlosťami v rôznych smeroch. Teda to, že pohybové rovnice sú druhého rádu, nám dáva v priestore slobodu voľby rýchlostí, a teda možnosť rozhodnúť sa o smere a rýchlosti ďalšieho pohybu, lebo tieto parametre našou polohou nie sú určené. Úplne inak vyzerá situácia v prípade, keď pohybové rovnice sú rovnicami prvého rádu. Vtedy poloha jednoznačne určuje celý budúci pohyb systému; keby sme sa teda ocitli v určitom bode fázového priestoru, existoval by jediný smer a jediná rýchlosť, akými by bolo možné tento bod opustiť. Všetka sloboda voľby tak zaniká. Keby Boh stvoril svet nie v reprezentačnom, ale vo fázovom priestore, zanikla by sloboda pohybu. V ľubovoľnom bode, v ktorom by sme sa ocitli, by sme si pozreli posledné tri súradnice a tie by nám oznámili rýchlosť a smer, v ktorom by sme sa pohli ďalej. Hamiltonov pojem fázového priestoru tak zviditeľňuje determinizmus klasickej mechaniky.

Vzhľadom na to, že konfiguračný priestor nereprezentuje dynamický stav systému, jedným bodom konfiguračného priestoru môže prechádzať celý rad trajektórií. Naproti tomu vo fázovom priestore Hamiltonovej mechaniky bod priestoru jednoznačne zadáva stav systému, t.j. okrem informácie o jeho konfigurácii jednoznačne zachytáva aj informáciu o jeho hybnostiach, takže z každého bodu fázového priestoru vychádza jedna jediná trajektória. Takto sa časový vývin systému plne geometrizuje. To umožňuje zásadný konceptuálny posun v opise pohybu, menovite zavedenie pojmu ***fázového toku***. Keďže krivky zobrazujúce pohyb mechanického systému vo fázovom priestore sa navzájom nepretínajú, lebo daným bodom fázového priestoru prechádza jediná krivka, namiesto toho, aby sme vyšetrovali priebeh jedinej takejto krivky, môžeme sa pozrieť na všetky možné pohyby systému naraz. Keď Lagrange skúmal kyvadlo, musel si zvoliť určitú konkrétnu počiatočnú výchylku a potom mohol sledovať pomocou svojich rovníc ďalší priebeh pohybu. Keď chcel porovnať pohyby zodpovedajúce rôznym výchylkám, musel každý pohyb opísať osobitne a porovnať až výsledky. Naproti tomu Hamilton môže nekonečný súbor kyvadiel, z ktorých každé predstavuje pohyb daného kyvadla pri rôznych počiatočných podmienkach, zobraziť naraz, v tom istom fázovom priestore. Rôznym počiatočným stavom totiž prislúchajú rôzne body fázového priestoru a krivky prechádzajúce týmito bodmi ležia pekne vedľa seba. Preto vo fázovom priestore môžeme sledovať všetky možné pohyby daného kyvadla súčasne. Keď to urobíme, dostávame fázový tok. Fázový tok je teda čosi ako synchrónne sledovaný pohyb daného systému pri všetkých možných počiatočných výchylkách. Je to akoby sa človek na rázcestí súčasne vybral všetkými možnými smermi. V našom priestore to je nemožné, lebo by sa mu mohlo pritrafiť, že by sa zrazil sám so sebou, čo je absurdné. Vo fázovom priestore však k takejto zrážke s vlastným dvojníkom dôjsť nemôže, lebo každým bodom prechádza jediná trajektória. Preto vo fázovom priestore môžeme bez akýchkoľvek inkonzistentností zobraziť súčasný pohyb rôznych verzií toho istého systému. A práve takéto zobrazenie pohybu (tzv. fázový tok) tvorí základný prínos Hamiltonovej mechaniky.

O hamiltonovskom fázovom toku dokázal Lioville, že sa pri ňom zachováva fázový objem. To znamená, že keď si vyfarbíme malý kúsok fázového priestoru, z každého jeho bodu necháme vychádzať trajektóriu a pozrieme sa, kam sa príslušné pohyby dostali za určitý čas, tak množina koncových bodov týchto všemožných pohybov vytvorí oblasť vo fázovom priestore, ktorá bude mať rovnaký objem ako oblasť, z ktorej sme štartovali. Táto veta má mnohé dôležité dôsledky pre samotnú mechaniku, nás tu však zaujíma skôr jej novosť z epistemologického hľadiska. Je to totiž veta, ktorej formulácia sa stala možnou až prechodom na ***integratívnu*** formu jazyka. Až v jazyku, ktorý dokáže pomocou fázového toku ***uchopiť súčasne všetky možné pohyby*** daného systému, je možné takúto vetu vôbec sformulovať. Pokiaľ je možné v jazyku uchopiť a sledovať časový vývin iba jednej jedinej trajektórie, leží Liouvillova veta ďaleko za horizontom vyjadriteľného.

Takto sa stáva jasnejším, prečo sme formu jazyka Hamiltonovej mechaniky označili termínom ***integratívna forma jazyka***. Jeho epistemologická štruktúra totiž pripomína jazyk Kleinovho *Erlangenského programu* v geometrii či Galoisovej teórie v algebre. Rovnako ako v týchto teóriách aj v hamiltonovskej mechanike existuje určitá neutrálna báza (v podobe fázového priestoru) umožňujúca integrovať štruktúry, ktoré jazyk na predošlých vývinových štádiách od seba ostro oddeľoval. U Kleina projektívna rovina umožňovala integrovať rôzne geometrické štruktúry, ktoré sa prv navzájom vylučovali. Kým matematici chápali geometriu ako formu nazerania priestoru, bolo absurdné, aby bol priestor súčasne euklidovský aj neeuklidovský. Až keď Cayley prišiel s myšlienkou, že geometria priestoru nie je formou nazerania, ale je to abstraktná metrická štruktúra, stalo sa možným uvažovať rôzne geometrie vedľa seba. Domnievame sa, že z epistemologického hľadiska je táto situácia paralelná so situáciou v mechanike. Pokiaľ sa mechanický systém vníma ako čosi konkrétne dané, ako určitý fyzický objekt, je absurdné, aby sa ten istý systém pohyboval súčasne dvoma rôznymi spôsobmi. Až keď sa mechanika oslobodí od záväznosti daného a začne mechanický systém vnímať ako abstraktnú dynamickú štruktúru, stáva sa možný krok, ktorý urobil Hamilton, keď nechal súčasne vedľa seba plynúť rôzne pohyby toho istého systému. Podobne ako Cayley a Klein boli schopní vedľa seba uvažovať rôzne geometrie, ktoré sú reálne nezlučiteľné, sú Hamilton a Liouville schopní naraz uvažovať rôzne pohyby toho istého mechanického systému, ktoré sa reálne vylučujú. Liovillova veta je tak možná až vďaka prechodu na integratívnu formu jazyka. V predošlých štádiách vývinu mechaniky je táto veta jednoducho nevyjadriteľná.

7. Konštitutívna forma jazyka klasickej mechaniky: Poincaré 1881. V priebehu rokov 1833 až 1841, teda približne v rovnakom čase ako Hamilton rozpracovával svoj formalizmus predstavujúci vrchol analytickej mechaniky, predložil Joseph Lioville (1809-1882) sériu článkov, v ktorých dokázal pozoruhodnú skutočnosť. Prostriedkami klasickej analýzy možno vyjadriť riešenie iba veľmi úzkej triedy diferenciálnych rovníc. Prevažná väčšina diferenciálnych rovníc je prostriedkami diferenciálneho a integrálneho počtu neriešiteľná. Ich riešenia možno nájsť len približne, rozvojom do nekonečných radov, ale exaktné riešenie v uzavretom tvare možné nie je. Liouvillova teória je v mnohom paralelná s Galoisovými výsledkami z algebry, podľa ktorých algebraickými prostriedkami je možné riešiť len nepatrný zlomok algebraických rovníc. Galoisove a Liovillove výsledky poukazujú na hranice jazyka, na ktoré v 30-tych rokoch 19. storočia matematika narazila. Keďže pohybové rovnice mechanických sústav (v Eulerovom, Lagrangeovom alebo Hamiltonovom pojatí) sú zadané pomocou diferenciálnych rovníc, majú Liouvillove výsledky zásadný význam pre celú mechaniku.

Z Liovillových výsledkov vyvodil radikálne dôsledky Henri Jules Poincaré (1854-1912). V sérii článkov pod spoločným názvom *O krivkách definovaných diferenciálnymi rovnicami* [21] sa postavil na radikálne nové geometrické stanovisko. Ak analytickými prostriedkami možno riešiť len malý počet diferenciálnych rovníc, tak na vybudovanie všeobecnej teórie diferenciálnych rovníc treba napred vytvoriť úplne nový jazyk. Tento jazyk by mal uvažovať o riešení určitej diferenciálnej rovnice nezávisle od toho, či nám analytický aparát umožňuje toto riešenie explicitne vyjadriť alebo nie. Poincaré sa tak v teórii diferenciálnych rovníc postavil na stanovisko pripomínajúce Riemannov postoj k existencii geometrických objektov. Keď Riemann zistil, že trojrozmerný priestor pripúšťa existenciu iba nepatrného zlomku geometrických objektov, rozpracoval jazyk algebraickej topológie, ktorý umožňuje hovoriť o geometrickom objekte nezávisle od toho, či je jeho reprezentácia v priestore možná alebo nie. Podobne Poincaré rozpracoval jazyk, ktorý umožňuje hovoriť o riešení diferenciálnych rovníc nezávisle od toho, či nám analytický aparát umožňuje toto riešenie explicitne vyjadriť alebo nie. Týmto novým jazykom je jazyk ***geometrickej teórie dynamických systémov***.[6]

Poincaré rozpracoval úplne nové matematické metódy. V prvom rade preložil samotný pojem diferenciálnej rovnice do geometrického jazyka v podobe vektorového poľa vo fázovom priestore. Namiesto toho, aby diferenciálnu rovnicu chápal analyticky ako rovnicu, v ktorej vystupuje neznáma funkcia spolu s jej

[6] V matematike sa koncom 19. storočia rodí zaujímavé rozštiepenie. V oblasti základov matematiky (Dedekind, Frege, Weierstrass, Peano a Hilbert) dochádza k odmietnutiu geometrického názoru a geometria je nahradená aritmetikou, v oblasti diferenciálnych rovníc (Poincaré, Cartan, Siegel, Kolmogorov, Moser, Smale a Arnoľd) nastupuje zásadná geometrizácia.

deriváciami, pričom našou úlohou je nájsť vyjadrenie tejto neznámej funkcie, Poincaré chápe diferenciálnu rovnicu geometricky, ako predpis, ktorý v každom bode fázového priestoru zadáva vektor rýchlostí. Riešením takto pojatej diferenciálnej rovnice je potom jednoducho krivka, ktorá sa v každom bode dotýka príslušného vektora zadaného príslušnou rovnicou. Namiesto pojatia diferenciálnej rovnice ako určitého vzťahu medzi analytickými výrazmi (funkcie a jej derivácií) tu teda máme pojatie diferenciálnej rovnice ako určitého vzťahu medzi geometrickými objektami (krivkou a jej dotykovými vektorami). Táto dôsledná geometrizácia umožňuje formulovať mnohé otázky ohľadom charakteru riešení diferenciálnej rovnice nezávisle od toho, či nám jazyk umožňuje príslušnú rovnicu explicitne vyriešiť alebo nie. Asi najvýznamnejším objavom, ktorý vďaka konštitutívnej forme jazyka Poincaré urobil, bol objav deterministického chaosu. V tejto stati niet miesta na podrobný výklad tohto fascinujúceho objavu, chceme iba upozorniť na skutočnosť, že tak ako mnohé iné zásadné objavy, aj tento bol umožnený prechodom k novej forme jazyka. Objav chaosu sa tak z epistemologického hľadiska viaže na konštitutívnu formu jazyka klasickej mechaniky - rovnako, ako sa objav Liouvillovej vety spája s integratívnou formou jazyka.

Poďakovanie

Ďakujem Vladovi Balekovi, Pavlovi Bónovi a Martinovi Klimovi za cenné rady a pripomienky, ktorými prispeli ku skvalitneniu predkladanej state. Moja vďaka patrí tiež nadácii ***Alexandra von Humboldta*** za udelenie štipendijného pobytu na Technickej univerzite v Berlíne, v rámci ktorého vznikla táto stať.

LITERATÚRA

[1] ABRAHAM, R. a MARSDEN J. E. (1967): *Foundations of Mechanics*. Reading, Benjamin Cummings 1978.

[2] ARNOĽD, V. I. (1974): *Matematičeskije metody klassičeskoj mechaniky*. Moskva, Nauka 1989.

[3] D'ALEMBERT, J. (1743): *Traité de Dynamique*. Paris. Ruský preklad: *Dinamika*. Moskva, GITTL 1950.

[4] DUGAS, R. (1955): *A History of Mechanics*. New York, Dover 1988.

[5] EULER, L. (1736): *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. Petropoli. Ruský preklad: *Osnovy dinamiki točky*. Leningrad, GRTTL 1938, s. 29-262.

[6] EULER, L. (1765): *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata*, Rostochii 1736. Ruský preklad: *Osnovy dinamiki točky*. Leningrad, GRTTL 1938, s. 263-467.

[7] GANTMACHER, F. R.: *Lekcii po analitičeskoj mechanike*. Moskva, GIFML 1960.

[8] HAMILTON, W. R.: "On a General Method in Dynamics;by which the Study of the Motions of all Free Systems of Attracting and Repelling Points is Reduced to the

Search and Differentiation of one Central Relation or Characteristic Function". In: *Phil. Trans. Roy. Soc.* London 1835. Ruský preklad in: ([22], 175-233).

[9] KVASZ, L.: "Náčrt analytickej teórie subjektu". In: *Filosofický časopis* 1996/4, s. 617-640.

[10] KVASZ, L.: "Topológia versus teória množín". In: *Obzory matematiky, fyziky a informatiky* 50/1997, s. 1-15.

[11] KVASZ, L.: *Gramatika zmeny*. Bratislava, Chronos 1999.

[12] KVASZ, L.: "Prolegomena k formálnej epistemológii". In: *Organon F*, 1999/3, s. 223-239.

[13] KVASZ, L.: "Epistemologické aspekty klasickej mechaniky". In: V. Havlík (ed.): *Mezi jazykem a vědomím*. Praha, Filosofia 1999, s. 105-129.

[14] KVASZ, L.: "Epistemologické aspekty dejín klasickej algebry". In: *Filozofia* 2000/8, s. 601-619.

[15] KVASZ, L.: Epistemologické aspekty dejín modernej algebry. In: *Filozofia* 2001/5, s. 309-331.

[16] LAGRANGE, J. L.: *Mécanique analytique*. Paríž 1788. Ruský preklad: *Analitičeskaja mechanika*. Moskva, GITTL 1950.

[17] LANDAU, L. D. a LIFŠIC, E. M. (1957): *Mechanika*. Moskva, Nauka 1973.

[18] LEECH, J. W. (1958): *Klasická mechanika*. Praha, SNTL 1970.

[19] MACH, E. (1883): *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Leipzig, Brockhaus 1897.

[20] NEWTON, I.: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. 1686. Ruský preklad: *Matematičeskije načala naturaľnoj filosofii*. Moskva, Nauka 1989.

[21] POINCARÉ, H. (1881-1886): "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle". In: *Journal de Mat. pures et appliquées*, Sér. 3, Vol. 7, s. 375-422; Vol. 8, s. 251-296; Sér. 4, Vol. 1 s. 167-244; Vol. 2, s. 151-217. Ruský preklad *O krivych opredeljaemych diff. Uravnenijami*. Moskva, GITTL 1947.

[22] POLAK, L. S. (ed.): *Variacionnyje principy mechaniky*. Moskva, GIFML 1959.

[23] POLAK, L. S.: *Variacionnyje principy mechaniky*. Moskva, GIFML 1960.

[24] SOMMERFELD, A.: *Vorlesungen über theoretische Physik I, Mechanik*. Leipzig, Becker und Erlern 1943. Ruský preklad: *Mechanika*, GIIL, 1947.

[25] SZABÓ, I (1977): *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Baseel, Birkhäuser 1996.

[26] THIRRING, W.: *Lehrbuch der Mathematischen Physik I, Klassische Dynamische Systeme*. Wien, Springer 1988.

[27] ŤULINA, I., A.: *Istorija i metodologija mechaniky*. Izdateľstvo Moskovskogo Universiteta 1979.

[28] WITTGENSTEIN, L. (1921): *Tractatus Logico-philosophicus*. Frankfurt a. M., Suhrkamp 1989. Čiastočný slovenský preklad in: *Logický empirizmus a filozofia prírodných vied*. Ed.: J. Bodnár, Vydavateľstvo politickej literatúry, Bratislava 1968.

[29] ZAJAC, R. a ŠEBESTA, J. (1990): *Historické pramene súčasnej fyziky I. Od Aristotela po Boltzmanna*. Bratislava, Alfa 1990.

---

doc. Dr. Ladislav Kvasz
Katedra humanistiky FMFI-UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
SR
e-mail: kvasz@fmph.uniba.sk