# EPISTEMOLOGICKÉ ASPEKTY DEJÍN KLASICKEJ ALGEBRY

LADISLAV KVASZ, Katedra humanistiky MFF-UK, Bratislava

KVASZ, L.: Epistemological Aspects of the History of Classical Algebra
FILOZOFIA 55, 2000, No 10, p. 788

The aim of the paper is to reconstruct the historical development of classical algebra from Al Chwárizmí to Lagrange and to analyse the fundamental epistemological shifts, which occurred in the understanding of basic algebraic concepts. The paper opens with a general characteristics of algebraic thought as conceptualization of motor schemes. That puts algebra into a contrast with geometry, which is based on conceptualization of the schemes of visual perception. From contrasting these two ways of conceptualization, the motor and the visual, the autohor tries to explain why the ancient Greeks did not develop algebraic thought. Further he uses his theory of *evolution of linguistic form* to interpret the changes of the language of algebra beginning with Al Chwárizmí's verbal rules, through Cardano's formulas, Cartesian polynomial forms, up to Lagrange's theory of resolvents.

Algebra a geometria sú z hľadiska svojho matematického významu rovno–cenné disciplíny. Z hľadiska ich miesta vo filozofii matematiky existuje však medzi nimi veľký rozdiel. Filozofické otázky geometrie predstavujú klasické témy vo filozofii matematiky; stačí spomenúť Platóna, Pascala, Kanta, Russella či Husserla. Naproti tomu filozofické otázky algebry ostávajú na okraji pozornosti a okrem kníh J. Kleina a J. Vuillemina prakticky neexistuje filozofická literatúra venovaná algebre. Toto ignorovanie algebry zo strany filozofie má mnoho príčin. Jednou z nich je dominantný vplyv antickej gréckej kultúry na formovanie európskej filozofickej tradície. Európska filozofia sa tak dostala na dlhú dobu do zajatia gréckeho spôsobu myslenia, ktoré sa zakladá na zrakovej skúsenosti.[1] Stačí spomenúť metafory, na

[1] Nasledujúce analýzy sa zakladajú na konfrontácii úlohy zrakovej a motorickej skúsenosti pri rozvoji kultúry. Keď tvrdíme, že pre antickú grécku civilizáciu bol dominantný zrak, nemáme tým na mysli zrak v čisto *fyziologickom* zmysle, lebo, samozrejme, ten je rovnaký u všetkých civilizácií. Je to biologická danosť spoločná všetkým ľuďom, zrakovo sa orientovať v prostredí, ktoré nás bezprostredne obklopuje. V tomto asi niet rozdielu medzi antickým Grékom a stredovekým Arabom. Zvláštnosťou človeka je však to, že sa orientuje aj v tom, čo ho bezprostredne neobklopuje, vo svete kultúrnych entít, ako sú napríklad bohovia, hrdinovia, minulosť, budúcnosť, hodnoty a podobne. Medzi tieto kultúrne entity patria aj matematické objekty, ako sú čísla, trojuholníky či algebraické rovnice. Jednou z úloh kultúry je transcendencia skutočnosti a tvorba koherentných súborov kultúrnych entít (pozri [9]). A tu sa znova stretáme so zrakom, ale tentoraz v *kultúrnom* zmysle, ako základnou metaforou pre

ktorých spočíva pojmové uchopenie myslenia (objasňovať, vysvetľovať, reflektovať, nadhľad, vhľad), aby sme pocítili dominanciu zraku. Algebra, ktorá je svojím pôvodom arabská a svojou povahou taktilno-motorická, nemala v európskej filozofickej tradícii adekvátny pojmový aparát na tematizáciu zmien, ktoré sa v nej odohrali. Preto základné zlomy v dejinách algebry ostali mimo poľa osvetleného filozofickou reflexiou.

Cieľom predkladanej state je opísať hlavné zlomy vo vývine algebraického myslenia a pokúsiť sa ich filozoficky reflektovať. Použijeme pri tom periodizáciu, ku ktorej sme dospeli pri analýzach vývinu geometrie ([8]; [10]; [11]). Čitateľa možno prekvapilo, že hneď potom, ako sme zdôraznili základný rozdiel medzi algebrou a geometriou, chceme preniesť periodizáciu dejín geometrie na vývin algebry. Ale tento rozpor je len zdanlivý, lebo už periodizáciu geometrie sme sa pokúšali založiť na analýze zmien jazyka. Geometria slúžila len ako materiál, analýzou ktorého sme sa snažili odhaliť zmeny hlbšej, epistemickej štruktúry. Voľba geometrie za východisko epistemologických analýz bola prirodzená, lebo v západnej tradícii je geometria najlepšie reflektovaná, jej zmenám najhlbšie rozumieme. Ale potom, ako sme v dejinách geometrie našli určité regularity, je prirodzené použiť ich pri výklade dejín najmenej pochopenej časti západnej matematiky, ktorou je algebra.

Takto treba chápať periodizáciu dejín algebry pomocou termínov ako perspektivistická či projektívna forma. Perspektíva a projekcia sú geometrické pojmy, ale my ich používame v širšom, epistemologickom zmysle na charakterizáciu formy jazyka. Pre perspektivistickú formu jazyka je typické považovať deskripcie jazyka za obrazy skutočnosti, kým projektívna forma prináša ako základnú inováciu výrazy predstavujúce obrazy obrazov. V geometrii je tento prechod zrejmý, ale ukážeme, že podobný posun sa odohral aj v dejinách algebry. Spočiatku považovali matematici za riešenie rovnice jedinú hodnotu neznámej, ktorá zodpovedala podmienkam úlohy (a bola verným „obrazom" skutočnej situácie). Až neskôr, keď rozvoj formálneho aparátu umožnil vznik *substitúcií*[2] (teda vkladania „obrazov" do „obrazu"), vzniklo presvedčenie, že za riešenie treba považovať všetky *korene rovnice*[3], a nielen ten

---

cestu k transcendentnu. Domnievame sa, že jeden z rozdielov medzi gréckou a arabskou kultúrou spočíval v tom, že kým antický Grék chápal transcendentno ako určitý paralelný svet, do ktorého možno preniknúť zrakom (spomeňme Platónovu metaforu o vyslobodení sa z jaskyne ako o získaní schopnosti ***vidieť*** pravú skutočnosť), pre Araba sa transcendentno nezakladalo dominantne na zrakovej metafore. V arabskej kultúre sa transcendentno otvára sluchu, ako výzva alebo ako zákaz ***konať***. Transcendentno nie je paralelný svet, ale skôr paralelný spôsob konania.

[2] Substitúciou sa v algebre rozumie dosadenie, pri ktorom za jednu neznámu, napríklad $x$, dosadíme výraz obsahujúci inú neznámu, napríklad $(y - 1)$. Takto môže rovnica, ktorá v starej premennej mala tvar $x^2 + 2x - 8 = 0$, nadobudnúť v premennej $y$ jednoduchšiu podobu $y^2 - 9 = 0$. Z riešenia $y = 3$ tejto zjednodušenej rovnice nie je ťažké nájsť riešenie pôvodnej rovnice $x = 2$, keď si uvedomíme, že sme použili substitúciu $x = y - 1$.

[3] Koreňom rovnice sa v algebre nazýva číslo, ktoré vyhovuje danej rovnici.

jediný, ktorý má priamy vzťah ku skutočnosti. Koreň prestáva byť „obrazom" mimojazykovej skutočnosti a stáva sa z neho prvok štruktúry vzťahov. Substitúcia v mnohom pripomína premietanie známe z projektívnej geometrie. Pritom podobne ako Desargues doplnil rovinu o nekonečne vzdialené body, aby projekcia bola jednoznačná ([8], 620-623; [11], 110-113), algebraici dopĺňajú číselný obor o záporné a komplexné čísla, aby sa algebraické úpravy stali ekvivalentnými. Takto existuje epistemologická príbuznosť medzi premietaním geometrického útvaru a úpravou algebraického výrazu. Pri premietaní rovnako ako pri algebraických úpravách ide o transformácie výrazov jazyka spojené so snahou zachovať referenciu.

Keď prenesieme do algebry pojem formy jazyka, na ktorom sme založili analýzu geometrie, ukazuje sa, že úlohu, akú v geometrii hral pojem horizontu, hrajú v algebre význačné objekty jazyka, akými sú 0 a 1. Úlohou formy jazyka je vzájomne prepojiť epistemický subjekt jazyka so svetom jazyka. V geometrii, kde sa svet rozprestiera pred nami a subjekt má podobu hľadiska, je jeho poloha voči svetu fixovaná zadaním horizontu. Horizont má teda za úlohu je fixovať polohu subjektu vo svete. V algebre je situácia v porovnaní s geometriou v mnohom opačná. Algebra konštruuje svoj svet zvecňovaním aktov subjektu. Číslo 3 alebo $\sqrt{5}$, to sú pomocou symbolov zvecnené úkony počítania či odmocňovania. Svet algebry nie je oblasť, ktorá by bola odkrytá nášmu pohľadu ako niečo, voči čomu potrebujeme fixovať našu polohu. Je to práve naopak niečo, čo je pôvodne súčasťou nás, súčasťou nášho konania, a my len postupne získavame od toho odstup, dostávame to pomocou symbolickej reprezentácie pred seba. Dejiny algebry tak pripomínajú zvliekanie kože, akoby sa niečo, čo bolo pôvodne súčasťou tela, čo sprevádzalo jeho pohyby, zrazu od tela oddelilo a zmenilo sa na určitý predmet. Na tomto predmete ešte stále badať stopy ohybov tela, tento predmet ešte stále nesie v sebe pamäť jeho gest.[4] Pritom zvlečením jednej vrstvy sa odhalí vrstva hlbšia, na ktorej práve zvlečená vrstva pôvodne spočívala.

Svet algebry teda nie je vonkajším svetom, odkrytým zraku, a preto sa vymyká gréckemu duchu, ktorý chápe pravdu ako to, čo už nie je skryté pohľadu. Svet algebry je svetom, ktorý sa zrodil zvecnením určitej vrstvy jazyka. Preto nie je

---

Napríklad vyššie uvedená rovnica $x^2 + 2x - 8 = 0$ má dva korene, $x = 2$ a $x = -4$, o čom sa čitateľ môže ľahko presvedčiť dosadením. Termín koreň sa zaviedol pravdepodobne preto, lebo, ako ukazuje už aj náš jednoduchý príklad, rovnici môže vyhovovať viac čísel. V raných štádiách algebry bola tendencia rezervovať termín *riešenie rovnice* pre číslo, ktoré vyhovuje reálnej situácii opísanej rovnicou, kým záporné čísla, ktoré rovnici tiež vyhovujú, boli nazývané falošnými riešeniami alebo jednoducho koreňmi. Keď sa však neskôr kladné a záporné riešenia zrovnoprávnili, termíny riešenie a koreň sa stali prakticky synonymami.

[4] V tejto metafore jazyk nepovažujeme za pevnú štruktúru, ale za pohybujúci sa organizmus. Metafora sa zakladá na skutočnosti, že jazyk má aj performatívnu stránku, ktorú možno prirovnať k pohybom tela. Písaný prejav prináša zvecnenie performácie, jej vytrhnutie z času. Písmo pripomína stopy v piesku a algebraickú symboliku možno prirovnať k zvlečenej koži hada, ktorá nesie na sebe stopy jeho pohybov. Prvotná je performácia, pohyb, tok reči či sled algebraických úkonov. Stopa, znak či symbol sa rodia z tohto pohybu, sú jeho zvecnením.

náhoda, že algebru nevytvorili Gréci, ale Arabi. Svet algebry je plodom arabského ducha a dejiny algebry sú drámou, v ktorej sa západná kultúra postupne tohto sveta zmocňuje. Keď budeme opisovať dejiny algebry, budeme hovoriť o dejinách algebry v rámci západnej civilizácie. Budeme sledovať, ako v rámci dejín západnej kultúry, kultúry „geometrického ducha", kultúry, pre ktorú rozumieť znamená získať vhľad, prebiehal vývin algebry, teda disciplíny, ktorej svet je zraku neprístupný, disciplíny, ktorá vychádza z motorickej skúsenosti, z manipulácie, z činnosti. Na rozdiel od gréckeho teoretika, ktorý nezasahuje do diania sveta a len sa mu prizerá, algebraik koná, počíta, upravuje rovnice, transformuje výrazy. Vhľad je v algebre možný vždy až dodatočne, až potom, ako sa podaril určitý trik. Okrem takejto pozitívnej skúsenosti je však v algebre častá aj skúsenosť negatívna, skúsenosť s tým, že trik nevyšiel, že úprava sa nepodarila, že rovnicu sa nepodarilo vyriešiť. Negatívna skúsenosť vedie ku konceptualizácii, k snahe porozumieť, prečo sme neuspeli. Jedna z ústredných línií vo vývine algebry bola motivovaná snahou porozumieť, prečo sa nikomu nedarí riešiť niektoré rovnice piateho stupňa, prečo napriek tomu, že sa daným problémom zaoberali najlepší matematici po dobu troch storočí, sa nikomu nepodarilo pohnúť s takou jednoduchou rovnicou ako napríklad $x^5 - 6x + 3 = 0$.

V problémoch tohto typu nejde o to, získať do niečoho vhľad, lebo spočiatku tu niet ničoho, na čom by mohol náš pohľad spočinúť. Je tu len neúspech, neúspech tiahnuci sa staročiami. Existujú len haldy papiera zapĺňajúce smetné koše najlepších matematikov. Nie je tu nič pevné, len pohyb – rozbeh, postupnosť úprav, narazenie na neprekonateľné ťažkosti a nakoniec rezignácia. Dráma dejín algebry spočíva v tom, že sa podarilo nahmatať tvar neviditeľného múru, o ktorý sa rozbili všetky pokusy o riešenie rovnice piateho stupňa, podarilo sa uchopiť ho, vyniesť na svetlo, uvidieť a porozumieť. Tento múr sa volá *alternujúca grupa piatich prvkov*. Matematici, ktorým sa podarilo nahmatať jeho obrysy, sú Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel a Evariste Galois. Od zrodu algebry po Galoisove práce uplynulo desať storočí. V sérii dvoch článkov, ktorej prvým pokračovaním je táto stať, chceme prejsť týmito storočiami a ukázať, ako sa odlišujú jednotlivé vrstvy algebraického myslenia.

**0. Prehistória algebry alebo prečo Gréci neobjavili algebru.**[5] Algebra

[5] Vysvetlenie skutočnosti, prečo Gréci neobjavili algebru, podané v tejto kapitole, je pomerne technické. Zakladáme ho na dominancii vizuálneho aspektu geometrie a takmer úplnom ignorovaní kalkulatívneho aspektu aritmetiky v gréckej matematike. Hlbšie porozumenie tohto problému získame, keď sa naň pozrieme v spojitosti s ostatnými aspektmi novovekej vedy, ktoré nemali paralelu v antike. Vedľa zrodu algebry sa v novoveku rodí projektívna geometria, teória pravdepodobnosti, infinitezimálny počet a mechanika. Preto paralelne s otázkou, prečo Gréci neobjavili algebru, možno položiť otázky, prečo neobjavili projektívnu geometriu, teóriu pravdepodobnosti, infinitezimálny počet a mechaniku. Až v tomto širšom kontexte je oneskorenie zrodu algebry pochopiteľné. Keď si totiž položíme otázku, čo spája uvedené disciplíny a kladie ich do opozície k antickej *epistéme*, nie je ťažké nájsť ich spoločnú črtu, a tak prehĺbiť porozumenie toho, prečo Gréci neobjavili algebru. Algebra spočíva na pojme **neznámej**, projektívna geometria na pojme **prázdneho priestoru**,

pochádza od Arabov. Gréci nepoznali algebraický spôsob uvažovania. To neznamená, že by nepoznali matematické úlohy, ktoré dnes považujeme za algebraické. Takéto úlohy sú známe od nepamäti. Už v starovekom Babylone dosiahli učenci majstrovstvo v riešení úloh, ktoré sú ekvivalentné našej *kvadratickej rovnici*[6]. Babylonskí učenci však boli v zajatí počtárskeho umenia a nikdy neprešli k symbolickým manipuláciám. Na druhej strane Gréci počty úplne vylúčili z matematiky a takmer celú matematiku redukovali na geometriu. Tým stratili kontakt so všetkým kalkulatívnym, s celým svetom formálnych úprav. Tak pre Euklida to, čo dnes chápeme ako kvadratickú rovnicu a zapisujeme ako $x^2 + bx = C$, bola úloha čisto geometrická. Bolo treba nájsť úsečku $x$ tak, aby štvorec nad ňou a obdĺžnik, ktorého jedna strana je $b$, spolu mali obsah $C$. Euklides uvádza konštrukciu, pomocou ktorej možno úsečku $x$ zostrojiť ([4], Kniha VI., úloha 28). Snaha založiť riešenie podobných problémov na geometrických konštrukciách má však nevýhodu v tom, že veličina $x^2$ je plocha štvorca so stranou $x$, veličina $x^3$ je objem kocky s hranou $x$, ale tvorbe mocnín vyšších stupňov bráni priestor. Takto Grékom geometrický jazyk umožnil zachytiť len malý fragment sveta algebraických rovníc, fragment, ktorý bol asi príliš chudobný na to, aby sa z neho mohla vyvinúť samostatná matematická disciplína. Gréci poznali zo sveta algebry len kvadratické rovnice a zvyšok im ostal skrytý.

---

teória pravdepodobnosti na pojme **náhodnej udalosti**, infinitezimálny počet na pojme **nekonečne malej veličiny** a mechanika na pojme **pohybu**. Čo tieto pojmy spája a kladie ich do opozície s antickým spôsobom myslenia, je ich neurčitosť. Keď zoberieme klasický antický protiklad *peras/apeiron*, zistíme, že podľa Grékov sa veda môže zaoberať len *peras*, tým, čo je určité, dané, vymedzené, stále. Naproti tomu tým, čo je neurčité, nevymedzené a nestále, sa veda zaoberať nemôže. Teda Gréci si nevedeli predstaviť, že by niečo mohlo byť neznáme, a pritom určité, ako je to s neznámou v algebre. Podobne priestor je niečo, čo síce nie je aktuálne existujúce, ale predsa je presne určené. Náhodná udalosť je niečo, o čom síce nevieme, ako to dopadne, ale predsa má určitú pravdepodobnosť nastatia. Pojem nekonečna predpokladá niečo, čo je síce neukončené, ale pritom jednoznačne vymedzené. A nakoniec matematický opis pohybu predpokladá, že niečo, čo je premenlivé, je napriek tomu jednoznačne determinované. Zdá sa teda, že základná zmena, ktorá oddeľuje antickú *epistéme* od novovekej vedy spočíva v nasledovnom: z určitého javu, ktorý Gréci zahŕňali pod spoločný termín *apeirón* a chápali ho ako niečo neurčité a nevymedzené, sa vyčlení istý **aspekt**, ktorý sa upresní a zrodí sa preň špeciálna vedecká disciplíny. V rámci tejto disciplíny je potom príslušný aspekt uchopený s úplnou určitosťou. Tak algebra vytvára techniky umožňujúce pracovať s tým, čo je neznáme, tak, akoby to bolo určité, podobne ako novoveká mechanika uchopuje pohyb ako niečo síce premenlivé, ale jednoznačne determinované, či podobne, ako novoveká geometria uchopuje priestor ako niečo, čo síce aktuálne neexistuje, ale napriek tomu má celkom určité a jednoznačné vlastnosti. Otázka, čo umožnilo západnej civilizácii uskutočniť také radikálne vytesnenie apeirónu, ukazuje smerom k vševedúcemu Bohu. Ale to je už námet na celkom inú stať.

[6] Kvadratickou rovnicou sa rozumie rovnica druhého stupňa, teda napríklad rovnica $x^2 + 2x - 8 = 0$. Podobne rovnica tretieho stupňa, napríklad $x^3 - 7x^2 + 5x - 3 = 0$, sa nazýva kubickou rovnicou. Táto terminológia je veľmi stará, pochádza ešte z antickej geometrie, keď $x^2$ znázorňovali štvorcom (*kvadrát*) a $x^3$ kockou (*kubus*).

Keď sa pozrieme na algebru u Arabov, zistíme, že z hľadiska náročnosti neprevyšuje úroveň Euklidových *Základov*. Práve naopak, v porovnaní so zložitým spôsobom Euklidovej argumentácie je arabská algebra omnoho jednoduchšia. To, že Gréci neobjavili algebru, teda nebolo spôsobené nedostatkom abstraktnosti myslenia. Situácia pôsobí dojmom, akoby Grékom čosi bránilo vniknúť do sveta algebry. Do tohto nového sveta prenikla až islamská matematika, stojaca mimo duchovného okruhu gréckej civilizácie. Samozrejme, Arabi boli v matematike žiakmi Grékov, od Grékov sa naučili, čo je to dôkaz, čo sú to axiómy, čo je to definícia. Ale ich kultúra bola iná. Jej stredom bol islam, náboženstvo, ktoré odmietlo založiť transcendenciu na metafore zraku. Tým zaniká prepojenie kultúry so zrakovou odkrytosťou, ktoré tvorilo jadro gréckej *epistéme*. Grécke slovo *teória* pochádza z termínu *teoros*, čo bol pôvodne vyslanec obce, ktorý mal dozerať na priebeh náboženského obradu, ale bez toho, že by sa obradu zúčastnil. Teória je teda to, čo vidí *teoros*, je to vec, ktorú vidíme vtedy, keď nemáme aktívnu účasť na dianí. Základná metafora, ktorá stojí za gréckym teoretickým poznaním, je **pohľad z odstupu**. Aby človek mohol získať vhľad do určitej problematiky, musí si utvoriť odstup, musí sa oslobodiť od všetkého, čo ho k príslušnej problematike viaže a čo by mohlo narušiť nestrannosť jeho pohľadu. Až z odstupu zahliadne pravdu (αληθεια – to, čo nie je skryté pohľadu). Tento sklon vidno aj na Euklidových *Základoch*, kde je konštrukcia oddelená od dôkazu. Pri dôkaze už nesmieme manipulovať, smieme sa iba pozerať, až kým nezahliadneme pravdu.

Z toho je zrejmé, že Gréckemu duchu je algebra, v ktorej ide o manipulácie s formulami, úplne cudzia. Algebraické manipulácie sa totiž nezakladajú na teoretickom vhľade, ale na kalkulatívnom cite. Nejde o to, uvidieť výsledok, ale skôr získať cit pre to, ako k nemu dospieť, získať cit pre rôzne úpravy a triky, získať cit pre možnosti, ktoré ponúka jazyk. Tieto možnosti však nie sú aktualizované, nie sú odkryté pohľadu. V jazyku algebry je vždy vyzdvihnutý len jeden výraz, ten, ktorý práve upravujeme. Samozrejme, pamätáme si mnohé výpočty a úpravy a na ich pozadí vnímame postup, ktorý práve uskutočňujeme. Cítime analógie, podobnosti, vnímame poukazy, ktoré nás vedú cez húštinu možných úprav, cez nepreberné množstvo možných substitúcií až k výsledku. Ale algebra je vždy v procese, jej úpravy stále plynú. Keď arabská algebra prenikla cez Španielsko do Európy, začal sa dialóg západného ducha s týmto jemu bytostne cudzím, ale nepopierateľne hlbokým duchom algebry. Tento dialóg je vedený snahou vizualizovať, snahou dostať triky, úpravy a manipulácie pred oči, získať do nich vhľad. Ale vždy potom, ako sa podarí zvecniť jednu vrstvu algebraického myslenia, objaví sa pod ňou ďalšia, hlbšia rovina. V našej rekonštrukcii ukážeme, ako sa pod regulami objavili formuly, pod formulami formy, pod formami polia, pod poľami grupy, pod grupami ideály. Dejiny algebry sú dejinami postupného zvecňovania performácie, postupnou premenou algebraických úkonov na objekty.

**1. Perspektivistická forma jazyka algebry: riešenie rovnice ako hľadanie reguly (od Al Chwárizmího po Cardana).** Arabský matematik Abú Abdalláh

Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí (780-850) je autorom diela *Krátka kniha o počte algebry a al-muqábaly* (Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr wa-l-muqábala) venovaného riešeniu rovníc. Slovo *al-džabr*, ktoré je v titule, sa onedlho začalo používať na označenie náuky o rovniciach a z neho pochádza aj náš termín algebra. Al Chwárizmího kniha je pozoruhodná nielen tým, že nepoužíva žiadnu symboliku, ale dokonca nepoužíva ani znaky na označenie čísel a úplne všetko vyjadruje slovne. Pre mocniny neznámej používa zvláštne termíny: pre $x$ – *šai* (vec), $x^2$ – *mál* (majetok), $x^3$ – *káb* (kocka), $x^4$ – *málmál*, $x^5$ – *kábmál*... Pri preklade boli arabské názvy pre mocniny neznámej nahradené latinskými ekvivalentmi, teda *res* pre *šai*, *census* pre *mál* a *cubus* pre *káb*. V talianskom prostredí sa presadilo talianske slovo *cosa* namiesto latinského *res*, a tak sa algebra v 15. a 16. storočí označovala ako *regula della cosa* – pravidlo veci. Išlo o súbor pravidiel, ktoré pomocou manipulácií s vecou (t.j. s neznámou) hľadali riešenie určitej úlohy.

Al Chwárizmí prv, než sa pustil do riešenia nejakej „rovnice", najprv ju upravil na tvar, v ktorom vystupovali len kladné koeficienty a pri najvyššej mocnine bola jednotka.[7] Aby dosiahol túto formu, používal tri operácie: **al-džabr** - ak na jednej strane „rovnice" vystupujú členy, ktoré treba ubrať, tak sa k obom stranám pripočíta zodpovedajúca hodnota; **al-muqábala** - ak vystupujú na oboch stranách rovnaké mocniny, odčíta sa menší člen na jednej strane od väčšieho na druhej, a **al-rad** - ak je koeficient pri najvyššej mocnine rôzny od jednotky, tak sa ním vydelí celá „rovnica". Slovo rovnica sme písali v úvodzovkách, lebo, prísne vzaté, Al Chwárizmí žiadne rovnice nepoznal. Riešil vzťahy medzi veličinami, ktoré zapisoval pomocou viet prirodzeného jazyka. Jeho postup si ukážeme na príklade rovnice $x^2 + 10x = 39$, ktorú vyslovil v tvare: „*Majetok a desať vecí sa rovná tridsaťdeväť*". Jeho riešenie je nasledovné: „*Zober polovicu počtu vecí, to jest päť, a vynásob ju samu sebou, dostaneš dvadsaťpäť. Pridaj to k tridsiatim deviatim, dostaneš šesťdesiatštyri. Zober druhú odmocninu alebo osem a odčítaj od nej polovicu počtu vecí, čo je päť. Výsledok tri je hľadaná vec*". Tento postup je blízky babylonskej tradícii. Je to konkrétny návod na riešenie. Je tu však jeden zásadný rozdiel. Na rozdiel od babylonskej matematiky má al Chwárizmí **pojem neznámej** (*šai*), a preto jeho postup „*zober polovicu počtu vecí, vynásob ju samu sebou, pridaj k nej číslo, odmocni a od výsledku odčítaj polovicu počtu vecí*" je úplne všeobecný postup, použiteľný v prípade ľubovoľnej kvadratickej rovnice tohto tvaru. Teda kým babylonskí matematici počítali s konkrétnymi hodnotami koeficientov, al Chwárizmí uchopuje postup riešenia v jeho úplnej všeobecnosti. Pomocou pojmov *šai*, *mál* a *káb* uchopuje všeobecný postup, a tým zakladá novú matematická disciplínu, ktorá raz dostane názov algebra.

Európa nadväzuje na arabskú matematiku v 12. storočí. Zvyk formulovať riešenia úloh v podobe verbálnych pravidiel sa udržal až do 16. storočia. Tak prvý výsledok európskej matematiky, ktorý zásadne prekračuje rámec znalostí antiky, bol sformulovaný v tomto tvare. Išlo o riešenie rovnice tretieho stupňa, uverejnené roku

[7] Napríklad rovnicu $2x^2 - 4x + 8 = 0$ upravil na tvar $x^2 + 4 = 2x$.

1545 v knihe *Artis Magnae Sive de Regulis Algebracis*[8] talianskeho matematika Girolama Cardana (1501-1576). Cardano formuluje rovnicu slovami: „***Cubus a veci sú rovné číslu***" a jeho riešenie má tvar: „*Umocni na tretiu jednu tretinu počtu vecí, pridaj k tomu štvorec polovice čísla rovnice a vypočítaj druhú odmocninu z tohto celku. Toto zduplikuj a k jednej z dvoch pridaj polovicu čísla rovnice a od druhej odčítaj polovicu toho istého. Potom budeš mať binomium a jeho apotome.*[9] *Potom odčítaj tretiu odmocninu apotome od tretej odmocniny binomia, **zvyšok, ktorý ostane, je vec.***" Aby čitateľ lepšie **videl**, čo Cardano **robí**, uvedieme rovnicu v dnešnom **tvare** $x^3 + bx = c$ a jej riešenie zapíšeme pomocou dnešnej symboliky:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Cardano nikdy takýto vzorec nenapísal. V jeho dobe ešte žiadne vzorce neexistovali a algebra bola, aspoň na povrchu, ešte stále *regula della cosa*, súbor verbálnych pravidiel na nájdenie veci. Pod týmto povrchom však už dlhšiu dobu dochádza k zásadným premenám.

**2. Projektívna forma jazyka algebry: riešenie rovnice ako hľadanie formuly (od Regiomontana po Descarta).** V predošlej kapitole sme uviedli Cardanovu regulu na riešenie rovnice tretieho stupňa. Aj keď samotná regula nevybočuje z rámca al Chwárizmího pojatia algebry, nie je jasné, ako možno čosi tak zložité vôbec objaviť. Aby sme to pochopili, musíme sa vrátiť zhruba o storočie pred Cardana a opísať prvú etapu zvecňovania jazyka algebry, etapu spojenú so zrodom algebraickej symboliky. Potom, ako sa arabská matematika dostala na západ, vzniká snaha zapísať algebraické operácie pomocou symbolov, priviesť algebraické operácie pred oči. Tento proces trval dlho a spočiatku pravdepodobne nebol uvedomelý. Tak Regiomontanus (1436-1476) zavádza symbolické označenie pre odmocňovanie. Operáciu odmocňovania označuje veľkým písmenom *R*, po–chádzajúcim od slova *radix*, takže napríklad tretiu odmocninu z ôsmich píše ako *R cubica de 8*. Tým odmocňovanie premieňa na odmocninu, operáciu nahrádza jej výsledkom. Michael

[8] Tri diela, ktorými sa novoveká veda rozchádza s antickým dedičstvom, vyšli takmer súčasne. Roku 1543 vyšlo Kopernikovo dielo *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, ktoré predstavuje prevrat v chápaní vesmíru, a Vesaliovo dielo *De Fabrica Humani Corporis*, ktoré prináša zásadný obrat v anatómii. O dva roky neskôr, roku 1545, vydáva Cardano svoje dielo *Artis Magnae Sive de Regulis Algebracis*, ktoré prináša zlom v algebre.

[9] Cardano nazýva $\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ binomiom a $-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}$ apotome. Tieto termíny vytvoril *ad hoc*. Cardano formuly nikdy nenapísal. To, čo sme uviedli, je prepis jeho verbálneho opisu do modernej algebraickej symboliky.

Stifel (1487-1567) nahrádza veľké *R* malým, takže spomínanú tretiu odmocninu píše ako $\sqrt{c}8$. Hornú „nožičku" písmena r trocha predĺžil a na–písal pod ňu prvé písmeno slova *cubica*, ktoré udáva, že ide o tretiu odmocninu. Číslo, ktoré sa odmocňuje, písal za tento znak. Naša konvencia písať pod predĺženú hornú „nožičku" písmena r samotné odmocňované číslo a to, ktorú odmocninu počítame, udať pomocou ľavého horného indexu, teda tretiu odmocninu z ôsmich zapísať ako $\sqrt[3]{8}$, pochádza až od Descarta (1594-1650).

Snáď najvýznamnejším krokom pre rozvoj algebry bolo zavedenie symbolov na označenie mocnín neznámej. Prekladom arabských termínov *šai*, *mal* a *kab* vznikli európske *res*, *zensus* a *cubus* a postupne sa namiesto vypisovania celých slov začali používať prvé písmená, teda *r* pre *res*, *z* pre *zensus* a *c* pre *cubus*. Samozrejme, podobne ako Arabi ani kosisti (ako nazývali predstaviteľov tejto novej algebry, považujúcich algebru za *regula della cosa*) sa nezastavili pri tretej mocnine. Slobodne vytvárali mocniny vyššie, napríklad *zz* (*zenso di zensi*), *zc* (*zenso di cubo*) atď. Postupnou premenou algebraických úkonov na výrazy sa zrodila algebraická symbolika. Z odmocňovania sa stala odmocnina, z umocňovania sa stala mocnina a postupne sa zvecňuje celá vrstva jazyka. Tento proces prebiehal pomaly a spočiatku asi nešlo o viac než o uľahčenie zápisu. Keď sa však nové symboly nahromadili v dostatočnom množstve, umožnili zásadný prelom v algebraickom myslení – vyriešenie rovnice tretieho stupňa. Cardanovu regulu sme uviedli v kapitole, opisujúcej algebru regulí, lebo svojím jazykom tam bezpochyby patrí. Pri jej objave je však už nutné použiť symboliku, a teda prekročiť rámec algebry regulí. Uvedieme racionálnu rekonštrukciu tohto objavu, ktorú kvôli prehľadnosti zapíšeme v modernej symbolike. Historické okolnosti tohto objavu sú spletité a dramatické ([12], 42-88; 12, 482-497). Uvažujme teda rovnicu tretieho stupňa

$$x^3 + bx = c,$$

teda Cardanove „*cubus a veci sú rovné číslu*"[10]. Rozhodujúcim krokom procesu riešenia je predpoklad, že výsledok bude mať tvar rozdielu dvoch tretích odmocnín. Ako k tomuto predpokladu matematici dospeli, to netušíme, je to jeden zo záhadných okamihov dejín matematiky, veľký krok do neznáma. Ak ho urobíme, ďalej sú už veci viac-menej jasné. Ale urobiť tento prvý krok, natrafiť na tú správnu kombináciu symbolov, to prináša obrat v dejinách algebry. Teda nech

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}\,. \qquad (1)$$

Umocnením tohto výrazu na tretiu a následným porovnaním s pôvodnou

[10] Zvyšné druhy rovníc $x^3 = bx + c$, teda „*cubus je rovný veci a číslu*" a $x^3 + c = bx$, teda „*cubus a číslo je rovné veci*", sa dajú riešiť analogicky. Rovnice tvaru $x^3 + bx + c = 0$ sa v Cardanovej dobe ešte neuvažovali, lebo všetky čísla v rovniciach sa považovali za kladné.

rovnicou dostaneme vzťahy medzi neznámymi $u$ a $v$ a koeficientmi $b$ a $c$:

$$b = 3\sqrt[3]{uv} \qquad c = u - v. \tag{2}$$

Keď z druhého vzťahu vyjadríme $v$ a toto vyjadrenie dosadíme do prvého, získame rovnicu

$$u^2 - uc - \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0, \tag{3}$$

ktorej koreň dostaneme podľa známeho vzťahu pre koreň kvadratickej rovnice v tvare

$$u = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}\,. \tag{4}$$

Neznámu $v$ dostaneme pomocou druhého vzťahu v riadku (2). Výsledné riešenie je

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Na tomto odvodení vidieť výhodu algebraickej symboliky, výhodu symbolického zvecnenia jazyka arabskej algebry. Hneď v prvom kroku sme predpokladali, že výsledok bude mať tvar rozdielu dvoch tretích odmocnín. V arabskej algebre neexistovali výrazy, ale len reguly. A regula nemá tvar, na regulu sa nepozeráme, ale načúvame jej, vykonávame jednotlivé úkony presne tak, ako nám hovorí. Až keď úpravy, ktoré regula predpisuje, zapíšeme pomocou symbolov, až keď sa proces počítania dostane pred oči, až vtedy sa vynorí tvar. **Z reguly sa tak stáva formula**. Až formulu možno hľadať v určitom tvare, napríklad v tvare rozdielu dvoch tretích odmocnín. Regula žiadny tvar nemá. Pozoruhodný je aj krok (3). Dostali sme rovnicu pre $u$. Ale čo je to $u$? To už nie je vec, to už nie je neznáma, ktorá označuje niečo skutočné. Keď proces riešenia rovnice prirovnáme k obrazu, tak sa tu zrazu vynára obraz v obraze. V procese riešenia rovnice pre neznámu $x$ sme dospeli k **rovnici pre pomocnú neznámu** $\boldsymbol{u}$. Z technického hľadiska je to rozhodujúci krok v procese riešenia, lebo namiesto pôvodnej rovnice, ktorá je tretieho stupňa, dostávame pomocnú rovnicu, ktorá je len stupňa druhého, a teda ju vieme riešiť. Z epistemologického hľadiska tu ide o zásadný posun. Premennú $x$, o ktorej zo zadania úlohy presne vieme, čo označuje, nahrádzame nejakým $u$, o ktorom nevieme, čo to vlastne je. Jeho význam je určený len pomocou vzťahu (1). Teda premenná $u$ nemá samostatnú denotáciu. Denotuje len sprostredkovane, pomocou denotácie premennej $x$. Preto túto vrstvu jazyka algebry označujeme termínom *projektívna forma*.

Paradigmatickým príkladom projektívnej formy jazyka je Dürerova rytina ([11], 110), ktorá obsahuje presne tento posun, stratu priamej referencie jazyka, a jej nahradenie referenciou nepriamou. Na Dürerovej rytine sa nachádza obraz v obraze, v algebre zasa vystupuje rovnica v rovnici. Algebra tak prestáva byť *regula della cosa* a stáva sa z nej analytické umenie, umenie upravovať výrazy, umenie uhádnuť tvar výsledku, umenie nájsť šikovnú substitúciu. Toto umenie, ktoré tvorí jadro Cardanovho *Artis magna*, pripomína premietanie, ktoré tvorí jadro projektívnej formy jazyka geometrie. V oboch prípadoch ide o transformáciu výrazov jazyka pri zachovávaní referencie. Dôležité je však uvedomiť si, že tým, že sa zvecnila jedna vrstva jazyka, tým, že reguly nadobudli podobu formúl, tým, že z „umocni vec na druhú a pridaj päť vecí" sa stalo „$x^2 + 5x$", otvára sa možnosť manipulovať nielen s jednotlivými vecami, ale s celými formulami. Al Chwárizmí poznal tri operácie, *al-džabr*, *al-muqábala* a *al-rad*, nepoznal však **substitúciu**. Teda jeho operácie predstavujú len premiestňovania členov rovnice pri zachovaní ich „tvaru". V tomto al Chwárizmí pripomína euklidovskú geometriu, ktorá tiež skúmala len transformácie zachovávajúce tvar (posunutie, otočenie, rovnoľahlosť). Stredové premietanie, čo je transformácia, ktorá môže zmeniť tvar útvaru (napríklad kružnicu môže premietnuť na hyperbolu), sa začína skúmať až v projektívnej geometrii, teda až vtedy, keď už geometria dosiahla projektívnu formu jazyka. V tom sa premietanie podobá substitúcii. Substitúcia je transformácia rovnice, ktorá môže zásadným spôsobom zmeniť jej tvar, keď od rovnice tretieho stupňa pre $x$ prejdeme ku kvadratickej rovnici pre $u$. V algebre sa nástup projektívnej formy vyznačuje objavením sa substitúcií, transformácií, ktoré menia „tvar" výrazov. Pri týchto transformáciách sa už jednotlivé členy rovnice neprenášajú na druhú stranu rovnice ako celky – podobne, ako pri premietaní sa geometrický útvar neposúva po rovine ako jeden celok. Transformácie prislúchajúce k projektívnej forme jazyka rozkladajú objekty na časti a menia vzájomné usporiadanie týchto častí. Akoby sa prechodom k projektívnej forme ontologická báza posúvala hlbšie. Už nejde o to, „chytiť vec do ruky a niekam ju preniesť" (nech už je vecou neznáma a ide o to, preniesť ju na druhú stranu rovnice, alebo je ňou geometrický útvar a ide o to, premiestniť ho v rovine), ale mení sa forma samotnej veci. Z $x$ sa stáva $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, z kružnice sa stáva hyperbola. Pre projektívnu formu jazyka sú charakteristické určité posuny - vznik nepriamej referencie (v jazyku algebry sú to pomocné premenné), vznik reprezentácie v reprezentácii (v jazyku algebry sú to pomocné rovnice) a vznik transformácií meniacich formu (v jazyku algebry sú to substitúcie). Tieto zmeny sú navzájom podmienené, každá z nich predpokladá všetky ostatné. Preto hovoríme o zmene formy jazyka. Tieto zmeny sme objavili pri analýze zrodu projektívnej geometrie, ale ukazuje sa, že ide o hlbšie zmeny, majúce svoju paralelu aj v algebre.[11]

---

[11] Zásadné zmeny, ktoré sa odohrali na prelome 15. a 16. storočia, v mnohom súvisia. Kopernikov objav, že Zem sa pohybuje, sa zakladá na schopnosti zdvojenia pohľadu, na schopnosti vedľa toho, ako vnímame svet tu na Zemi, pozrieť sa na svet akoby zvonka, z hľadiska umiestneného niekde mimo slnečnej sústavy. Z tohto vonkajšieho hľadiska vidíme, že to, čo sa nám z vnútorného hľadiska javí ako otáčanie oblohy, je v skutočnosti (teda

Ďalším aspektom, ktorý prináša používanie pomocných rovníc, je zmena v tom, čo treba považovať za riešenie algebraickej úlohy. Pôvodne, v rámci algebry chápanej ako *regula della cosa*, bolo za riešenie úlohy považované len kladné riešenie, veď predsa vec nemôže byť záporná. Preto ešte aj Cardano pri riešení rovníc tretieho stupňa považuje za riešenie len kladné číslo. Ak neznáma označuje určitú skutočnú veličinu, tá nemôže byť „menej ako nič". Akonáhle však začíname používať pomocné rovnice, ktorých premenné referujú len nepriamo, vďaka určitým substitúciám, môže sa stať, že práve zápornému riešeniu pomocnej rovnice zodpovedá kladné riešenie pôvodnej rovnice. Preto u pomocných rovníc musíme brať do úvahy ako kladné, tak aj záporné riešenia. Cardano v tejto súvislosti hovorí o „skutočných" a „falošných" riešeniach. Pojem riešenia rovnice sa tak postupne oslobodzuje od závislosti na priamej referencii. Za riešenie rovnice sa už považuje nielen to číslo, ktoré vyjadruje skutočný počet vecí, ale aj všetky ostatné čísla, ktoré spĺňajú rovnicu. Pridať ku „skutočným" aj „falošné" riešenia je nevyhnutné preto, aby sa úpravy rovníc stali ekvivalentnými úpravami. To opäť pripomína projektívnu geometriu, kde Desargues dopĺňa rovinu o nevlastné body, aby sa stredové premietanie stalo jednoznačným zobrazením. Teda ďalším aspektom projektívnej formy je dopĺňanie jazyka o výrazy, ktoré síce nemajú priamu denotáciu (nekonečne vzdialené body, záporné riešenia), ale ktoré umožňujú hladké fungovanie jazyka.

Hlavným nedostatkom kosistickej symboliky však bolo to, že používala rôzne písmená (*r*, *z*, *c*, ...) na označenie jednotlivých mocnín tej istej neznámej. Preto vlastne to, že písmená *r*, *z* a *c* sa týkajú toho istého, teda, že ak *r* je 7, tak *z* je nutne 49, bolo prítomné len implicitne. Keď však vstúpili do hry substitúcie, stáva sa táto symbolika nedostatočnou. Pri substitúcii vystupujú vždy aspoň dve neznáme, stará a nová. Označovať ich obe tým istým písmenom je síce v istom zmysle na mieste, lebo obe koniec koncov referujú na tú istú vec, ale na druhej strane to vyvoláva zmätok. Druhým závažným nedostatkom kosistickej symboliky bolo to, že nemala symboly pre koeficienty rovnice, a teda aj keď samotná regula obsahoval termíny ako „počet vecí", čo je zrejme koeficient pri prvej mocnine neznámej, symbolika to nevedela adekvátne vyjadriť, a tak sa pri symbolických manipuláciách pracovalo vždy len s konkrétnymi hodnotami.

Roku 1591 vychádza dielo *In Artem Analyticam Isagoge* (Úvod do analytického umenia) francúzskeho matematika Françoisa Viéta (1540-1603), v ktorom Viéte zaviedol symbolické rozlíšenie neznámej a parametra. Viéte bol prvý, kto koeficienty rovníc zapisoval pomocou písmen. Preto vlastne až od Viéta je možné hovoriť o formule, o všeobecnom vzorci, ktorý vyjadruje riešenie úlohy pomocou jej koeficientov. Pre ***neznáme*** používal Viéte veľké samohlásky *A*, *E*, *I*, *O*, *U*, na označenie ***koeficientov*** rovnice používal spoluhlásky *B*, *C*, *D*, *F*. Pritom ale každá veličina mala ešte rozmer: 1-*longitudo*, 2-*planum*, 3-*solidum*, 4-*plano-planum*, ...

---

z vonkajšieho hľadiska) spôsobené rotáciou Zeme. Na podobnom rozdvojení hľadiska je založený aj objav riešenia rovnice tretieho stupňa, lebo substitúcia vlastne znamená zmenu pohľadu a prechod k akémusi druhu vonkajšieho hľadiska.

Rozmer každej veličiny písal slovne za jej symbolom, napríklad *A planum* je druhá mocnina neznámej *A*. Teda písmeno drží identitu veličiny, kým slovo udáva jej rozmer. Takto môže pracovať s rôznymi veličinami, môže ich substituovať, lebo písmeno označuje, ktorá veličina je v hre. Viéte chápal veličiny ako dimenzionálne objekty, a preto dodržiaval princíp homogenity. Sčítať a odčítať bolo možné iba veličiny rovnakej dimenzie, pričom výsledok bola veličina rovnakého rozmeru ako súčinitele. To je vplyv geometrických predstáv, kde tiež nemožno sčítať objem s dĺžkou. Aj keď je Viétova symbolika pomerne komplikovaná, predstavuje kvalitatívny krok vpred. Je to prvý univerzálny symbolický jazyk na manipuláciu s výrazmi. Viéte si bol významu svojho objavu plne vedomý. Hovorí, že umožní vytvoriť „*všeobecnú metódu na riešenie všetkých problémov*". Táto metóda pozostávala z troch krokov: **1**. všetky veličiny treba označiť písmenami a ich vzťahy treba vyjadriť pomocou rovníc; **2**. overiť správnosť vyjadrenia úlohy pomocou rovníc; **3**. príslušné rovnice vyriešiť a nájsť vyjadrenie neznámej.

Viéte končí svoju knihu vyhlásením: „*Analytické umenie si osobuje plným právom problém všetkých problémov, ktorým je: NENECHAŤ ŽIADNY PROBLÉM NEROZRIEŠENÝ*". Verí, že analytické umenie umožní vyriešiť všetky problémy. Ukázalo sa, že Viéte sa hlboko mýlil. Pochopenie Viétovho omylu tvorí jeden z hlavných výdobytkov dejín algebry. Poznatok, že rovnice piateho stupňa sú neriešiteľné, je z epistemologického hľadiska jedným z najzaujímavejších poznatkov, ku ktorému matematika dospela. Ale na to, aby algebra mohla dokázať neriešiteľnosť rovníc piateho stupňa, muselo dôjsť k mnohým premenám jej jazyka.

**3. Koordinatívna forma jazyka algebry: riešenie rovnice ako rozklad formy (od Stifela po Eulera).**[12] Jednou z Cardanových predností bola jeho systematickosť. Preto vedľa typu rovnice „*cubus a veci sú rovné číslu*", ktorej riešenie sme vyššie rekonštruovali, uvádza aj riešenie zvyšných dvoch typov rovníc tretieho stupňa. Formuly vyjadrujúce riešenie týchto rovníc sú podobné formulám pre prípad, ktorý sme podrobne rekonštruovali, preto ich tu nebudeme analyzovať.[13] Uvedieme len pozoruhodný jav, ktorý Cardano objavil, keď sa pokúsil riešiť pomerne nevinne vyzerajúcu rovnicu $x^3 = 7x + 6$. Keď pre túto rovnicu použil osvedčený postup,

[12] Koordinatívna a kompozitívna forma jazyka sú nové formy, ktoré sa nám podarilo identifikovať až pri skúmaní dejín algebry. Koordinatívnaj forme jazyka zodpovedá v geometrii Saccheri a kompozitívnej Lambert.

[13] Kvôli úplnosti uvedieme len to, že riešenie rovnice tvaru $x^3 = bx + c$, o ktorý tu pôjde, má tvar $\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$. Zdanlivo ide o nepatrné zmeny, niekoľko znamienok sa zmenilo na opačné. Ale tieto nepatrné zmeny majú ďalekosiahle následky, lebo pod druhú odmocninu sa namiesto sčítania dostalo odčítanie.

dostal nepochopiteľný výsledok

$$x = \sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}\,.$$

Pod druhou odmocninou sa objavilo záporné číslo. Mali by sme vypočítať $\sqrt{-\frac{100}{27}}$, čo sa nedá urobiť. Umocnením žiadneho čísla nemôžeme dostať $-\frac{100}{27}$. Jazyk tu záhadným spôsobom zlyháva. Cardano je tak objaviteľom čohosi, z čoho sa neskôr stanú *komplexné čísla*[14], a $\sqrt{-\frac{100}{27}}$ je vlastne prvým komplexným číslom v dejinách matematiky. Pre celý ďalší vývin algebry sa stáva rozhodujúcim porozumieť tomuto problému, pochopiť, čo sa deje, keď sa pod druhou odmocninou začnú objavovať záporné čísla. Cardano tu narazil na hranice analytického umenia. Manipulácie s formálnymi výrazmi ho priviedli do situácie, ktorej nerozumie, do situácie, kde ho regula vyzýva, aby urobil niečo, čo sa urobiť nedá. Z hľadiska projektívnej formy jazyka je odmocnina zo záporného čísla nezmysel.

Prvý krok na ceste k pochopeniu komplexných čísel bol umožnený určitým oslobodením jazyka algebry od bezprostrednej naviazanosti na realitu a v osamostatnení úprav algebraických výrazov od ich zviazanosti s denotátmi. Tento proces prebiehal spočiatku len pozvoľne a opieral sa o narastanie dôvery k formálnym úpravám, ktoré síce nevieme priamo interpretovať, ale v podstate im rozumieme. Algebraické výrazy sa tak postupne prestávajú chápať ako formuly, ako vzorce vyjadrujúce určitú reálne existujúcu veličinu, a stále viac sa do popredia dostáva chápanie, podľa ktorého sú algebraické výrazy skôr určité **formy**[15], formálne objekty vytvorené zo symbolov. Významným motívom tejto zmeny bola neprehľadnosť teórie rovníc tak, ako ju prezentoval Cardano. Cardano považoval rovnice $x^3 + bx = c$ a $x^3 = bx + c$ za rôzne problémy. Príčina spočívala v tom, že za riešenia i za koeficienty rovníc prijímal len kladné čísla. V prípade rovnice tretieho stupňa to ešte nepredstavuje až taký závažný problém, ale v prípade rovnice štvrtého stupňa je už

---

[14] Komplexnými číslami sa v matematike nazývajú čísla tvaru $3 + 7\sqrt{-1}$. Nazývajú sa tak preto, lebo sú zložené z dvoch častí, z reálneho čísla 3 a z imaginárneho čísla $7\sqrt{-1}$. Veličina $\sqrt{-1}$ sa nazýva imaginárnou jednotkou a zvykne sa označovať písmenom i.

[15] Slovo forma sa tu vyskytuje v dvoch významoch. Dúfame, že pre čitateľa nebude problémom ich odlíšiť. Termín forma používame jednak v zmysle „*forma jazyka algebry*", teda v spojeniach „*perspektivistická forma, projektívna forma*", ako termín epistemologického diskurzu, a jednak ho používame v zmysle „*polynomiálna forma, kvadratická forma*", ako termín diskurzu algebry.

jednotlivých typov sedem a u rovníc piateho stupňa, ktoré nás zaujímajú, ide už o pätnásť rôznych druhov. Pokúsiť sa zorientovať v takejto spleti príkladov nie je jednoduché. Preto je prirodzené pokúsiť sa zložitosť situácie redukovať. Myšlienka, ako to urobiť, pochádza od Michaela Stifela, ktorého sme spomenuli v súvislosti so zavedením symbolu pre odmocninu. Vo svojej knihe *Arithmetica integra* (Úplná aritmetika) z roku 1544 Stifel zavádza pravidlá na počítanie so zápornými číslami, pričom záporné čísla interpretuje ako čísla menšie než nula. To je v rámci projektívnej formy jazyka algebry prirodzený krok, lebo záporné veličiny tu začínajú vystupovať ako hodnoty pomocných premenných. Stifel však išiel ďalej a záporné veličiny začal používať aj v úlohe koeficientov rovníc. Teda nielen neznáme, nielen veličiny označujúce, či už priamo, alebo nepriamo, počet vecí, ale aj parametre úlohy, teda koeficienty rovníc, môžu byť podľa neho záporné. To umožnilo Stifelovi spojiť všetkých pätnásť typov rovníc piateho stupňa do jedinej všeobecnej formy $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Rôzne typy vznikajú tak, že niektoré koeficienty tejto formy sú kladné a niektoré záporné, pričom záporné prenesieme na druhú stranu.

Stifel predtým, ako sa pustil do riešenia určitej rovnice, najpr všetky členy preniesol na jednu stranu rovnice, čím dostal rovnicu tvaru $p(x) = 0$. Tento krok prekračuje hranice Viétovho analytického umenia. U Viéta museli mať všetky členy rovnice rovnakú dimenziu, a teda na pravej strane rozhodne nesmela byť nula. To, čím Stifel začína riešenie ľubovoľného problému, je teda z hľadiska projektívnej formy jazyka algebry nezmysel. U Stifela sa tak rodí pojem polynómu. *Polynómom* v algebre nazývame výraz tvaru $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + dx + e$, kde $n$ je prirodzené číslo, udávajúce stupeň polynómu, a $a$, $b$, $c$, $d$, .... sú čísla, ktoré môžu byť ako kladné, tak aj záporné a nazývajú sa jeho koeficientami. Polynóm je teda výraz, ktorý v sebe zjednocuje celý rad rôznych rovníc. Na prvý pohľad sa môže zdať tento posun ako malý, ale bol to nevyhnutný krok na ceste k pochopeniu neriešiteľnosti rovníc piateho stupňa. Stifel odstránil podružné detaily, v ktorých sa pätnásť druhov rovníc piateho stupňa od seba líši, a umožnil matematikom sústrediť sa na ich podstatné spoločné aspekty. Takto sa dostávame k jednému zmyslu, v akom používame termín ***koordinovať***, ktorým sme označili toto štádium vývinu jazyka algebry. Ide o koordináciu rôznych typov rovníc do jednotného tvaru polynómu. Možno povedať, že koordináciou jednotlivých **formúl** sa rodí všeobecná **forma** – polynóm. Je to spoločný tvar všetkých rovníc daného stupňa, ktorý ostáva skrytý, ak sa usilujeme ukotviť jazyk v skutočnosti. Až keď Stifel prestal robiť rozdiely medzi kladnými a zápornými číslami, vynára sa jednota, ktorá sa na predošlom štádiu stratila v neprehľadnom množstve jednotlivostí.

Keď sa oslobodíme od chápania algebraických výrazov ako obrazov skutočnosti, ako tieto výrazy interpretovala projektívna forma jazyka, a začneme ich považovať za viac-menej samostatné formálne objekty, otvorí sa možnosť akceptovať odmocniny so záporných čísel jednoducho ako určitý typ výrazov. Týmto výrazom síce nemôžeme priradiť bezprostrednú denotáciu, nemôžeme povedať, čo vlastne označujú, predsa im však rozumieme, vieme s nimi formálne manipulovať. Toto chápanie je v pozadí knihy *Algebra* od Rafaela Bombelliho z roku 1572, ktorý uviedol pravidlá na sčítanie, odčítanie a násobenie týchto nových výrazov, ale nekládol si otázku, čo vlastne označujú. Ale asi najkrajšie vyjadrenie tohto prístupu možno nájsť u Leonarda Eulera, ktorý vo svojej knihe *Vollständige Anleitung zur Algebra* z roku 1770 imaginárne veličiny nazýva nemožnými číslami (*numeri impossibile*), lebo nie sú ani menšie ako nula, ani rovné nule, ani väčšie ako nula, a píše: „*Nanucujú sa nášmu duchu, existujú v našej predstave a máme o nich dostatočný pojem, lebo vieme, že* $\sqrt{-4}$ *znamená číslo, ktoré násobené samé sebou dá -4*". Teda aj keď v skutočnosti žiadna taká veličina, ktorá by po umocnení na druhú bola záporná, existovať nemôže, jasne rozumieme, čo výraz $\sqrt{-4}$ znamená.

Prechod od formúl k formám je dôležitý aj z iného dôvodu. Ide o to, že ak za základné objekty algebry považujeme formuly, ostáva nám jeden z ústredných aspektov jazyka algebry skrytý. Týmto aspektom je to, že určitý polynóm má viacero koreňov, teda existuje viac čísel, ktoré vyhovujú zadaniu úlohy. V rámci perspektivistickej formy jazyka sa táto skutočnosť ignorovala, pretože v skutočnosti je, samozrejme, počet vecí, ktorý hľadáme, jednoznačne určený. Preto matematici ignorovali ďalšie riešenia a ako jediné riešenie úlohy uvádzali to z riešení rovnice, ktoré vyhovovalo okolnostiam úlohy. Pritom si ani neuvedomovali, že určité riešenia ignorujú, lebo väčšinou išlo o záporné riešenia a tie boli z hľadiska perspektivistickej formy tak či tak neprijateľné. Vecí predsa nemôže byť menej ako nič. V rámci projektívnej formy jazyka (napríklad u Viéta) sa situácia zlepšila. V prípade pomocných rovníc už bolo treba brať do úvahy aj záporné riešenia, lebo sa mohlo stať, že práve zápornej hodnote pomocnej neznámej zodpovedá „skutočné" riešenie pôvodnej rovnice. Ale za riešenie úlohy matematici väčšinou akceptovali aj tak len číslo, ktoré udávalo hľadaný „počet vecí". Až keď snaha zakotviť jazyk algebry priamo v skutočnosti oslabla, odhalilo sa, že rovnice majú viac riešení. Pre pochopenie tejto skutočnosti bol prechod od algebraických formúl k algebraickým formám zásadný.

Od **formuly** očakávame, že nám „povie" výsledok, a teda dá jednoznačnú „odpoveď" na otázku, ktorá nás zaujíma. Formula vyjadruje určité číslo, ktoré chceme vedieť, odpoveď na určitú otázku, ktorá nás zaujíma. **Forma** je naopak niečo, do čoho keď dosadíme určité číslo, dostaneme výsledok – hodnotu formy v danom čísle. Preto aj keď je ťažko prijateľné, že by určitá úloha mohla mať viac riešení (veď skutočnosť je jednoznačná), keď rovnicu vyjadrujúcu príslušnú úlohu pochopíme ako polynomiálnu formu, stane sa pochopiteľným, že tú istú hodnotu nadobúda pre viaceré argumenty. Preto po prechode od formúl k formám je prijateľné, že určitá rovnica má viac riešení. V istej podobe si túto skutočnosť uvedomil už aj Viéte, ktorý našiel vzťahy medzi koreňmi a koeficientami rovnice. Ale všetky korene, ktoré uvádza vo svojich príkladoch, sú kladné, lebo jazyk algebry ešte stále spája priamo so skutočnosťou. Až keď sa presadí chápanie rovnice ako formy, odhalí sa v úplnej všeobecnosti skutočnosť, ktorú objavili nezávisle Albert Girard (1595-1632) a René Descartes, že totiž polynóm $n$-tého stupňa má práve $n$ koreňov. To znamená, že rovnica tretieho stupňa má tri korene, rovnica piateho stupňa päť koreňov atď.

Formula nás zaujímala len pre určité špeciálne hodnoty svojich parametrov, hodnoty, ktoré zodpovedajú zadaniu riešenej úlohy. Forma naopak priraďuje hodnotu každému číslu číselného oboru nezávisle od toho, či ide o číslo, ktoré nás zaujíma, lebo zodpovedá nejakej úlohe, alebo o číslo, ktoré je nám ľahostajné. Forma tak ***koordinuje*** všetky čísla, podriaďuje ich svojim operáciám.

Osamostatnením formy nadobúda relatívnu samostatnosť aj druhý pól jazyka algebry, a to súbor veličín, ktoré do formy dosadzujeme. Od Euklida až po Descarta bol súčin dvoch veličín vždy veličinou nového druhu. Tak súčinom dvoch úsečiek bol obdĺžnik, teda plocha. Súčinom obdĺžnika a úsečky bol hranol, teda objem. Kosisti síce prelomili bariéru trojrozmernosti, ktorá Euklida nepustila ďalej, ale v princípe sa pridŕžali jeho interpretácie algebraických operácií. Tak napríklad súčinom *res* a *cubus* je *zenso di zensi*, teda veličina vyššej dimenzie ako súčinitele. Descartes opúšťa túto tradíciu a prináša zásadne novú interpretáciu algebraických operácií. Preňho po prvýkrát súčinom dvoch úsečiek $x$ a $y$ nie je obdĺžnik s plochou $xy$ centimetrov štvorcových, ale úsečka dlhá $xy$ centimetrov. To je možno na prvý pohľad maličkosť, ale predstavuje to jeden z najvýznamnejších zlomov v dejinách algebry. Keď Descartes interpretuje súčin dvoch úsečiek opäť ako úsečku, vytvára systém veličín uzavretý na algebraické operácie. Preto s miernou dávkou ahistorizmu možno povedať, že od Descarta pochádza prvý príklad poľa. *Poľom* v algebre rozumieme súbor veličín, obsahujúci 0 a 1 a uzavretý na štyri základné algebraické operácie (+, –, x, :). Z epistemologického hľadiska uzavretosť na operácie znamená uchopenie celku sveta. Descartes je asi prvý matematik, ktorý sa zaujíma nielen o jednotlivé algebraické výrazy, nielen o úpravu izolovaných algebraických formúl, ako je to typické pre predstaviteľov projektívnej formy jazyka algebry. Descarta zaujíma celok.

Jazyk tak nadobúda zásadne novú úlohu, úlohu uchopiť jednotu sveta, uchopiť spôsob ***koordinácie*** jeho jednotlivých aspektov. Táto koordinácia pritom existuje paralelne na dvoch úrovniach. Jednak ide o koordináciu rôznych typov rovníc (Cardanových *cubus a veci sú rovné číslu, cubus a číslo sa rovná veci* atď.) do jednotnej formy polynómu a paralelne s tým o koordináciu rôznych druhov veličín (Viétových *longitudo*, *planum*, *solidum*, *plano-planum* atď.) do jednotného poľa. Na úrovni koordintívnej formy teda nadobúda jazyk algebry novú úlohu. Stáva sa prostriedkom, ktorý za roztriešteným súborom rôznych typov rovníc odkryje jednotnú polynomiálnu formu. To umožní pochopiť mnohoznačnosť riešení algebraických úloh, ktorá je v rámci projektívnej formy jazyka nepochopiteľná. Pokiaľ sa snažíme význam každého výrazu jazyka zakotviť v skutočnosti, zásadná nejednoznačnosť algebraických úloh ostáva záhadou. Až v jazyku foriem sa stáva nejednoznačnosť prirodzenou vecou.

Akonáhle si uvedomíme, že každý polynóm $n$-tého stupňa má práve $n$ koreňov, dostáva problém riešenia rovníc nový obsah. Na miesto úlohy nájsť formulu, ktorá by udávala hľadanú hodnotu neznámej, sa dostáva úloha nájsť všetky čísla, ktoré vyhovujú danej forme. Inak povedané, ide o to, nájsť čísla, pomocou ktorých sa príslušná forma dá rozložiť na lineárne činitele. Ako príklad môže poslúžiť rozklad

$$x^3 - 8x^2 - 13x + 42 \;=\; (x-7).(x-3).(x+2),$$

ktorý ukazuje, že čísla 7, 3 a –2 sú koreňmi polynómu $x^3 - 8x^2 - 13x + 42$. Teda riešiť rovnicu $x^3 - 8x^2 - 13x + 42 = 0$ znamená nájsť jej všetky korene. Ak sme tieto korene našli, vieme príslušnú formu $x^3 - 8x^2 - 13x + 42$ rozložiť na lineárne súčinitele $(x - 7)$, $(x - 3)$ a $(x + 2)$. Preto riešiť rovnicu znamená vlastne **rozkladať formu na lineárne členy**.

**4. Kompozitívna forma jazyka algebry: riešenie rovnice ako hľadanie rezolventy (od Huddeho po Lagranga).** Potom, ako Albert Girard a René Descartes objavili, že polynóm $n$-tého stupňa má presne $n$ koreňov, stalo sa nevyhnutným opraviť Cardanove formuly, ktoré, ako to už u formúl býva, dávajú len jedno jediné riešenie pre rovnicu tretieho stupňa. Rovnica tretieho stupňa má tri korene, a teda musíme pochopiť, ako dostať zvyšné dva, ktoré v Cardanovej formule nefigurujú. Holandský matematik Johann Hudde (1628-1704) našiel postup umožňujúci nájsť všetky korene rovnice tretieho stupňa. Uvažujme rovnicu:

$$x^3 + px - q = 0$$

Hudde ju pomocou substitúcie $x = y - \dfrac{p}{3y}$ previedol na rovnicu

$$y^6 - qy^3 - (p/3)^3 = 0,$$

ktorá bola neskôr nazvaná **Huddeho rezolventou**. Napriek tomu, že ide o rovnicu šiesteho stupňa, je jednoduchšia než pôvodná rovnica, lebo keď označíme $y^3 = V$, dostaneme rovnicu druhého stupňa

$$V^2 - qV - (p/3)^3 = 0,$$

ktorej dva korene dostaneme zo známeho vzorca pre riešenie kvadratickej rovnice

$$V_1 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{a} \qquad V_2 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Keď sa chceme dostať od neznámej $V$ späť k neznámej $y$, môžeme jednoducho zobrať z $V$ tretiu odmocninu. Ale to nesmieme, lebo tak by sme mali len dva korene $y$, jeden ako tretiu odmocninu $V_1$ a druhý ako tretia odmocnina $V_2$. Ale $y$ je koreňom rovnice šiesteho stupňa a rovnica šiesteho stupňa má šesť koreňov. Hudde si uvedomil, že odmocňovanie je krokom, pri ktorom strácame korene. Totiž keď vo vzťahu $y^3 = V$ zoberieme namiesto $V$ konkrétne číslo, napríklad 1, rovnica $y^3 = 1$

musí mať tri korene, lebo to je rovnica tretieho stupňa. Teda vedľa koreňa $y = 1$, ktorý každý vidí, musia existovať ešte dve ďalšie čísla, ktoré umocnené na tretiu dávajú 1. Sú to takzvané komplexné tretie odmocniny z 1. Ich hodnoty sú

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{a} \quad \omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

kde sme písmenom i označili imaginárnu jednotku, teda $\sqrt{-1}$. Pomocou čísel $\omega$ a $\omega^2$ možno vyjadriť všetkých šesť koreňov Huddeho rezolventy:

$$y_1 = \sqrt[3]{V_1}, \quad y_2 = \omega.\sqrt[3]{V_1}, \quad y_3 = \omega^2.\sqrt[3]{V_1}$$

$$y_4 = \sqrt[3]{V_2}, \quad y_5 = \omega.\sqrt[3]{V_2}, \quad y_6 = \omega^2.\sqrt[3]{V_2}.$$

Riešenia pôvodnej rovnice tretieho stupňa potom budú

$$x_1 = y_1 + y_4 = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2}$$

$$x_2 = y_3 + y_5 = \omega^2.\sqrt[3]{V_1} + \omega.\sqrt[3]{V_2}$$

$$x_3 = y_2 + y_6 = \omega.\sqrt[3]{V_1} + \omega^2.\sqrt[3]{V_2}.$$

Riešenia kubickej rovnice dostávame ako kombinácie dvoch tretích odmocnín, rovnako, ako tomu bolo u Cardana. Celkový postup je však omnoho symetrickejší, lebo kvadratická rovnica, ktorá určuje hodnoty výrazov pod príslušnými tretími odmocninami, je priamo zabudovaná do rovnice. Leonard Euler (1707-1783) sa pokúsil zovšeobecniť Huddeho postup prípad všeobecného polynómu

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Chcel nájsť pomocnú rovnicu, tzv. **Eulerovu rezolventu**, ktorej korene $y_i$ by boli zviazané s koreňmi príslušného polynómu podobnými vzťahmi, ako to bolo v prípade Huddeho rezolventy. Euler sa však nedostal ďalej, lebo rezolventa bola príliš vysokého stupňa. Pre rovnicu tretieho stupňa vychádza rezolventa 6-teho stup–ňa, pre rovnicu štvrtého stupňa dostaneme rezolventu 24-tého stupňa a pre prípad rovnice piateho stupňa, ktorý nás zaujíma, vyjde Eulerova rezolventa dokonca 120-teho stupňa. Eulerovi sa nepodarilo nájsť žiadny trik analogický substitúcii $y^3 = V$, pomocou ktorej Hudde znížil stupeň svojej rezolventy zo 6 na 2.

V tomto bode vstupuje do diskusie Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), ktorý zovšeobecnil Eulerov postup a zaviedol nový typ rezolventy, ktorá dnes nesie jeho meno. **Lagrangova rezolventa** pre rovnicu štvrtého stupňa nie je polynóm 24-tého stupňa, ako to bolo v prípade Eulerovej rezolventy, ale je len 3. stupňa. To je dôležitý krok vpred, lebo tak umožňuje nahradiť úlohu riešenia rovnice štvrtého stupňa úlohou riešenia jej rezolventy, ktorá je len tretieho stupňa. Lagrangovi sa podarilo ukázať, že postupy na riešenie rovníc tretieho a štvrtého stupňa, ktoré boli uvedené v Cardanovej *Artis Magnae*, sa zakladajú vlastne tiež na rezolventách. Stačí sa pozrieť na odvodenie riešenia rovnice tretieho stupňa, v ktorom sa objavila pomocná rovnica druhého stupňa (ako vzťah (3)). Ale kým u Cardana sme dospeli k tejto pomocnej rovnici len vďaka triku a vlastne sme ani nechápali, že tento krok predstavuje jadro celého postupu, u Lagranga sa rezolventa objavuje úplne explicitne a s plným pochopením jej významu. Teda to, čo bolo prv len „šťastnou náhodou", sa u Lagranga mení na konceptuálne pochopenú metódu. Všetky doteraz úspešné postupy riešenia algebraických rovníc spočívali v prevode problému na rezolventu, ktorá bola nižšieho stupňa. Lagrange preto očakával, že podobne sa mu podarí nájsť pre rovnicu piateho stupňa rezolventu, ktorá bude stupňa štvrtého. Ale tu čakalo La–granga sklamanie. V prípade rovnice piateho stupňa je Lagrangova rezolventa 6-teho stupňa. Šesť je síce podstatne menej ako 120, čo bol stupeň Eulerovej rezolventy, ale Lagrangova rezolventa je rovnako nepoužiteľná ako Eulerova, lebo je vyššieho stupňa ako riešená rovnica. To znamená, že na to, aby sme mohli pomocou Lagrangovej rezolventy vyriešiť rovnicu piateho stupňa, musíme vedieť riešiť rovnice šiesteho stupňa. To, že Lagrangov postup, ktorý pre rovnice tretieho a štvrtého stupňa dáva pekné výsledky, pri rovnici piateho stupňa zlyháva, naznačuje, že problém s rovnicami piateho stupňa je podstatne hlbší.

Ale nech už je to s úspechom Huddeho, Eulerovej a Lagrangovej rezolventy akokoľvek, jednu vec majú spoločné. Všetky tri sa snažia riešenie $x$ pôvodnej rovnice poskladať, *skomponovať* z riešení $y$ pomocnej rovnice a komplexných odmocnín z jednotky $\omega$. Kompozitívna forma sa teda usiluje riešenie určitého problému skomponovať z riešení problémov iných. Namiesto plurality alternatív–nych pohľadov na ten istý problém, ktorú priniesla projektívna forma, kompozitívna forma kladie pluralitu príbuzných problémov. Nejde jej o nejaký jednotný postup, podriadený univerzálnej metóde, ako to bolo v rámci koordinatívnej formy, ktorá sa usilovala nájsť spoločnú štruktúru v spleti partikulárnych postupov. Kompozitívnej forme vyhovuje pluralita. Za rovnicou určujúcou veličinu $x$, jej rezolventou zadávajúcou veličinu $y$ a za rovnicou delenia kruhu, určujúcou komplexnú odmoc–ninu z jednotky $\omega$, kompozitívna forma nehľadá hlbšiu jednotu, analogickú tej, ktorú koordinatívna forma našla za rovnicami $x^3 + bx = c$; $x^3 = bx + c$ a $x^3 + c = bx$ v tvare všeobecného polynómu v tvare $x^3 + bx + c = 0$. Kompozitívna forma nechce rôzne prípady podriadiť jednotnému poriadku. Ide jej len o to, skomponovať z riešení individuálnych problémov, v tomto konkrétnom prípade z koreňov rezolventy a komplexných odmocnín jednotky, riešenie pôvodného problému.

**6. Záver.** Ukázali sme štyri etapy vo vývine klasickej algebry od Al Chwárizmího po Lagranga. Sledovali sme postupné zmeny v chápaní toho, čo znamená riešiť algebraickú rovnicu, idúce od verbálnych pravidiel cez hľadanie formúl, rozklad polynómu na lineárne členy až po hľadanie rezolvent. Napriek tomu, že tieto zmeny sú z epistemologického hľadiska nepochybne hlboké, nie sú dostatočné na to, aby bolo možné porozumieť neriešiteľnosti rovnice piateho stupňa. Pochopenie tejto skutočnosti si vyžiadalo ešte zásadnejšiu premenu jazyka algebry, spočívajúcu v zrode teórie grúp a následnom vzniku modernej štrukturálnej algebry. Ale opis vývinu modernej algebry je už námetom na inú stať.

## LITERATÚRA


[1] AL-CHWÁRIZMÍ, M. I. M. (850?): Matematíčeskije traktaty. Taškent, FAN 1983.
[2] CARDANO, G. (1545): Ars Magna, or the Rules of Algebra. MIT Press 1968.
[3] DESCARTES, R. (1637): Rassuždenie o metode. Izdateľstvo Akademii Nauk SSSR, 1953.
[4] EUCLID: The Thirteen Books of the Elements. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Dover, New York 1956.
[5] EULER, L. (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra. Leipzig, Reclam 1911.
[6] HRIC, R.: Vývinové štádiá v dejinách algebry. In: J. Rybár a kol.: Kapitoly z epistemológie II. Bratislava, Univerzita Komenského 1994.
[7] KLEIN, J. (1934): Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra. MIT Press 1968.
[8] KVASZ, L.: Náčrt analytickej teórie subjektu. In: Filosofický časopis 1996/4, s. 617-640.
[9] KVASZ, L.: Dejiny náboženstva a matematika. In: Hieron 1997/II, s. 115-129.
[10] KVASZ, L.: Epistemologické aspekty dejín maliarstva. In: Filozofia 1998/10, s. 658-681.
[11] KVASZ, L.: Gramatika zmeny. Bratislava, Chronos 1999.
[12] NIKOFOROVSKIJ, V. A.: Iz istorii algebry XVI-XVII vv. Moskva, Nauka 1979.
[13] SAIN, M.: Nincs királyi út. Budapest, Gondolat 1986.
[14] SCHOLZ, E. (ed.): Geschichte der Algebra. Mannheim, Wissenschaftsverlag 1990.
[15] VIETE, F. (1591): Introduction to the Analytical Art. In: ([7], 313-353).
[16] VUILLEMIN, J.: La Philosophie de l'Algébre. Paris, PUF 1962.
[17] WAERDEN, B. L.: A History of Algebra, from al-Khwarizmí to Emmy Noether. Berlin, Springer 1980.



Ďakujem Pavlovi Bónovi, Táni Jajcayovej a Pavlovi Zlatošovi za pripomienky, ktoré prispeli k spresneniu niektorých argumentov a formulácií textu.

Stať vznikla za podpory Vedeckej grantovej agentúry MŠ SR a SAV v rámci grantovej úlohy č. 1/7164/20.



Doc. dr. Ladislav Kvasz
Katedra humanistiky MFF UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
SR
e-mail: kvasz@fmph.uniba.sk