FILOZOFIA
Roč. 54, 1999, č. 7

MATICOVÁ LOGIKA

FRANTIŠEK SISKA, Katedra filozofie FF PU, Prešov

Dejiny jazyka sú nesmierne zaujímavé, ak skúmame spôsob, akým sa jazyk prispôsobuje rozvíjajúcej sa civilizácii, ako sa postupne mení, dopĺňa novými pojmami, aby tak reagoval na meniacu sa skutočnosť, reflektoval objavovanie nových poznatkov. Pritom akoby si strážil svoju zotrvačnosť v zachovávaní svojich starých foriem - jednak aby ľudia nezabúdali na svoju minulosť, aby dostatočne podrobne preskúmali a využili to, čo predtým objavili, a jednak pripúšťa v sebe zmeny umožňujúce pokrok poznania a rozvoj vedy. Jazyk je natoľko komplikovaný, že nie všetkým odhalí svoje tajomstvá, nie každému dovolí pridať doň nové slovo - pojem. To si treba zaslúžiť prácou s ním, prácou usilujúcou o jeho pochopenie, musíme najprv odôvodniť nutnosť doplniť jazyk, a až potom to smieme a môžeme urobiť.

Málokto si však uvedomí opačný smer pôsobenia, že totiž jazyk svojím rozvojom veľmi podstatne ovplyvňuje rozvoj spoločnosti najmä v oblasti vedy. Hlavne formálne vedy sú vo svojom rozvoji nevyhnutne viazané na jazyk, ktorý používajú. Použitie neprimeraného jazyka brzdí, ba aj znemožňuje rozvoj danej vednej disciplíny. Ako príklad môžeme uviesť rímsku symboliku v matematike, ktorá bola doslova brzdou jej formálneho rozvoja, aj keď išlo v podstate o formálny jazyk.

Chceme upozorniť na zavedenie - podľa nášho názoru nesprávne - pojmu *umelé jazyky* v súvislosti so skupinou formálnych jazykov v matematike, fyzike, chémii, logike a podobne, kde vlastne nejde o umelé jazyky, ale o prirodzene a veľmi pomaly sa vyvíjajúce jazyky týchto vied, ktoré sa uvádzajú len v písanej podobe a sú vlastne nutnou podmienkou rozvoja týchto vied v ich najprirodzenejšej a najpresnejšej podobe. Tieto jazyky sú bezprostredne viazané na prirodzený jazyk, ktorý pri ich používaní slúži ako prekladací jazyk, ale zároveň aj ako ich prirodzený metajazyk. Špeciálne jazyky formálnych a formalizujúcich sa vied sú ich prirodzenými jazykmi. Vznikali postupne pre potreby týchto vied a tvorili ich najgeniálnejší ľudia z týchto oblastí po celé stáročia, ba tisícročia. Tvorili ich na špeciálny účel príslušníci rôznych národov, ktorí však navzájom poznali svoje diela a výsledky, preto tieto jazyky nadobudli nadnárodný charakter. A to je aj ich obrovská výhoda. Ľudia, ktorí sa danou disciplínou zaoberajú, ich totiž môžu bez slovníkov preložiť do všetkých jazykov. Tým sa stávajú spojovníkmi medzi ľuďmi a ich skupinami, národnostne veľmi roztrieštenými. Musíme si uvedomiť, že z histórie poznáme prípad spájania a zjednocovania civilizácie v písanej čínštine, ktorá je zrozumiteľná v celej Číne napriek natoľko rozdielnym nárečiam, že hovorovým jazykom sa ľudia nedorozumejú. V tomto prípade znaky čínskeho jazyka, celá jeho písaná podoba nemá charakter formálneho, ale prirodzeného jazyka.

Pomocou jednoduchých úprav sa tzv. umelé jazyky dajú veľmi jednoducho formulovať ako metajazyky objektových jazykov, akými sú pre špeciálne formalizované oblasti vedy. Tým nám uľahčujú rozlišovať:

1. výpovede prirodzeného jazyka týkajúce sa objektového jazyka v podobe *prirodzeného národného jazyka*;
2. výrazy, ktoré sú *prekladmi formálneho jazyka* do rôznych národných jazykov;
3. výrazy metajazyka v zmysle *metajazyka vo formálnej medzinárodnej podobe*;
4. výrazy metajazyka *vo vzťahu k objektovým výrazom prirodzeného jazyka.*

Mnohí ľudia až v tomto procese chápania funkcie metajazyka vo formálnych jazykoch pochopia dvojjedinosť funkcie prirodzeného jazyka, vďaka ktorej si často vôbec neuvedomujeme, kedy vypovedáme v objektovom jazyku, a kedy v metajazyku.

Podľa nášho názoru jazyk nevznikal len ako prostriedok dorozumievania ľudí, ale aj preto, že ľudia pociťovali potrebu oboznámiť ostatných so svojím stupňom poznania sveta. Jazyk pritom vystupoval ako obraz poznávaného sveta, kopírujúc a zobrazujúc svet na primeranom stupni poznania. Ako sa rozširovalo poznanie, pribúdali v jazyku nové pojmy na označenie nových predmetov, ale hlavne novoobjavovaných vlastností týchto predmetov. Tým sa prehlbovalo aj poznanie v oblasti pochopenia štrukturálnych vlastností sveta, lebo predmety, ich vlastnosti a vzťahy medzi nimi tvoria štruktúry, bez poznania ktorých by sme nikdy nemohli pochopiť podstatu skúmaných javov a podstatu sveta ako celku. Svet totiž nie je vec, svet je štruktúra a to platí o všetkých jeho súčastiach, aj tých najmenších a aj tých abstraktných, ktorých podstata nemá fyzikálnu povahu. Máme na mysli abstraktné predmety ako vlastnosť, číslo, pravdivostná hodnota, kvantita, kvalita a pod.

Veľmi názorným a vhodným príkladom je rozvoj jazyka fyziky, kde sa stráca absolútnosť aj takých predmetov, ako sú priestor a čas, ale aj atóm a jeho časti, ktoré vôbec nie sú jednoduchými predmetmi, ale štruktúrami, ktoré ako izolované predmety vôbec nemôžeme opísať ani pochopiť. Podobne je to však aj v matematike, kde sa dištinkcia vlastností jej predmetu skúmania prehlbuje práve objavovaním nových matematických štruktúr, a teda aj odhaľovaním ich nových vlastností. Táto štrukturalizácia jazyka matematiky významne prispela k tomu, že práve jazyk matematiky je najprimeranejším prostriedkom na vyjadrenie zákonitostí vo fyzike. Jazyk matematiky je prirodzeným jazykom fyziky. Prirodzený jazyk je len prekladovým jazykom na pochopenie a pojmové vyjadrenie obsahu, o ktorom hovoria rovnice opisujúce vlastnosti fyzikálnych predmetov. Často pritom plní funkciu metajazyka objektového, formálneho jazyka rovníc opisujúcich skúmané predmety a javy vo fyzike. Prirodzený jazyk nedokáže presne opísať skúmané javy, aj keď je stále najuniverzálnejším prostriedkom dorozumievania a odovzdávania informácie medzi ľuďmi. Vlastnosti skúmaných predmetov vyjadrené v preklade do prirodzeného jazyka môžu dokonca signifikovať groteskný obsah, keď napríklad hovoria o farbe kvarkov, pričom neexistuje rozmer elektromagnetického žiarenia patriaci do rozmedzia vlnovej oblasti pre svetlo, ktorým by sme mohli opísať farbu kvarku. Možno tým chceli fyzici naznačiť, že ide o vlastnosť kvarku podobnú funkcii svetla pri poznávaní makropredmetov.

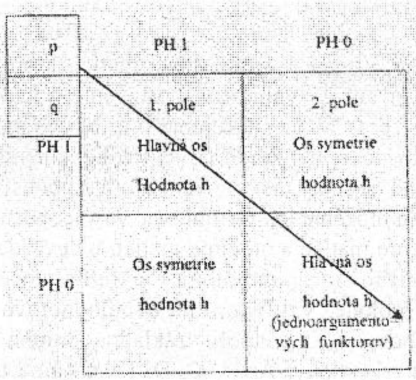
Tento spôsob označovania vlastností subatomárnych predmetov však nie je jediný. Je to problém prekladu z objektového jazyka fyziky (rovnice a ich dôkaz), jednoznačne a presne popisujúceho skúmaný jav, do prirodzeného jazyka, kde sa v preklade použije nepresný a možno aj neprimeraný pojem. V prirodzenom jazyku sa totiž dôkazy rovníc, ktoré sú opisom skúmaného javu nedajú vyjadriť presne. Problém **prekladu textov** teda vzniká aj v tomto prípade.

V našom príspevku však nechceme riešiť tento problém. Chceme poukázať na to, že aj logické konštanty môžeme považovať za štruktúrované, ak nájdeme primeraný jazyk, ktorý dokáže túto štruktúru opísať. Zdá sa nám, že takýmto jazykom sú **označené logické matice,** ktoré nielen jednoznačne opisujú doteraz známe vlastnosti konštánt výrokovej logiky, ale umožňujú vyjadriť sa aj o iných a nových vlastnostiach, ktoré sa doteraz nedali opísať takým jednoduchým spôsobom.

Niektoré dôležité poznatky o vlastnostiach funktorov a zároveň kalkulov, ktoré vzniknú ich použitím, môžeme opísať pomocou výrazov, ktoré nazývame označené matice a ktoré veľmi efektívne charakterizujú jednotlivé dvojargumentové funktory logiky. V dvojhodnotovej logike je táto činnosť jednoduchá a prináša mnoho informácií.

Matice môžeme vytvárať aj pre ľubovoľnú viachodnotovú extenzionálnu logiku. Základné vlastnosti matíc opíšeme na **základnej matici** pre dojhodnotovú logiku. Základná matica je zároveň **ohodnotenou maticou,** a to počtom hodnôt, ktoré sme zvolili pre skúmanú n-hodnotovú logiku. V našom prípade ide o hodnoty 1 a 0 ako základné hodnoty dvojhodnotovej klasickej logiky. Hodnoty riadkov matice sú hodnotami pre prvý argument a hodnoty stĺpcov sú hodnotami pre druhý argument. Priesečníky hodnôt sú potom výslednými hodnotami nejakej výrokovej operácie pre skúmaný funktor.

Základná matica



Základná matica pre dvojhodnotovú logiku nám poskytuje o všetkých dvojhodnotových kalkuloch isté veľmi podstatné informácie a príslušným spôsobom skonštruované matice pre viachodnotové extenzionálne logiky budú mať podobné vlastnosti, ale s oveľa väčším počtom informácií.

Usporiadanie vonkajšieho ohodnotenia matice musíme zachovávať, lebo jeho zmena spôsobuje aj zmenu jej vlastností.

Pravdivostné hodnoty **prvého výroku** skúmanej formuly pre argument ***p*** budeme písať vždy vľavo smerom dole vedľa matice.

Pravdivostné hodnoty **druhého výroku** skúmanej formuly pre argument *q* budeme písať **vždy** v smere zľava doprava nad poliami matice.

Dvojhodnotová matica má štyri polia, ako sme ich vyznačili. Prvé pole je priesečníkom hodnôt 1 a zodpovedá hodnote funktora v prvom riadku jeho tabuľkového popisu vlastností. Druhé pole je priesečníkom hodnôt 1 a 0 a zodpovedá popisu z druhého riadku tabuľky. Tretie pole je priesečníkom 0 a 1 a zodpovedá popisu tretieho riadku tabuľky a štvrté pole priesečníkom hodnôt 0 a zodpovedá popisu hodnôt štvrtého riadku tabuľkového opisu.

V tabuľke to zodpovedá nasledujúcim veličinám:

Stĺpec hodnôt pod premennou **p** zodpovedá zvislému označeniu matice a stĺpec pod premennou **q** zodpovedá vodorovnému označeniu matice. Premenné **h** predstavujú hodnoty priesečníkov matice podľa voľby pre jednotlivé funktory, a ● je znakom funktora.

p	q	p ● q
1	1	h
1	0	h
0	1	h
0	0	h

Tabuľka pre dvojargumentový funktor

Veľmi dôležité sú polia 1 a 4 v dvojhodotovej matici, ktoré nazývame **hlavná os matice**. Hlavná os matice si svoje výnimočné postavenie a funkciu zachováva aj vo viachodnotových logikách. Teraz ju špecifikujeme pre dvojhodnotovú klasickú logiku. Ak by sme uvažovali o neklasickej dvojhodnotovej logike, zmenili by sa vlastnosti matice len vzhľadom na zvolené hodnoty, ale nie vzhľadom na podstatné vlastnosti matice, ktoré sú dané jej štruktúrou a môžeme ich formulovať vo všeobecnej podobe.

Ak zachováme označenie matice a otočíme maticu o deväťdesiat stupňov doprava, dostaneme jej polohu B, ďalším otočením polohu C a tretím otočením polohu D. Ďalšie otočenie vedie k základnej polohe. Vzhľadom na dvojhodnotovosť logiky o ktorej hovoríme, máme šesť spôsobov, ako ohodnotiť základnú polohu matice, nazveme ich **mody**. Každý modus má štyri polohy: A, B, C, D. Dostávame tak 24 matíc, ktoré sú však v niektorých polohách totožné. Ak vylúčime 8 totožností, dostávame šestnásť rôznych matíc, ktoré predstavujú všetky možné matice dvojhodnotovej logiky. Každý modus má svoje charakteristické vlastnosti, ktoré si zachováva aj pri svojich obratoch, a preto ich môžeme pomenovať ako veratívny, konjunktívny, implikatívny, ekvivalenčný, asertívny a falzitívny modus. Pri veratívnom a falzitívnom mode vypadáva 6 matíc, lebo sú totožné, a pri asertívnych vypadávajú dve z toho istého dôvodu.

Usudzovanie je pre človeka azda najtypickejšou činnosťou a vlastnosťou, ktorou sa jednoznačne odlišuje od iných živých tvorov. Človek jediný dokáže schopný rozširovať svoje vedomosti bezskúsenostne, teda úsudkom. Zákonitosti tohto formálneho, jazykovo vyjadreného procesu skúma veda, ktorú nazývame **logika**.

D1 **Logika je veda o metódach a formách správneho usudzovania.**

Logika skúma formálne procesy pri usudzovaní v ich abstraktnej jazykovej podobe a vyjadruje ich ako formy úsudkov istým zaužívaným spôsobom.

Aby sme mohli o nejakom úsudku rozhodnúť, či je platný, alebo neplatný, musíme mať jasne definované pojmy, ktoré na to potrebujeme. Tu zohráva kľúčovú úlohu vzťah **logického vyplývania.** V nasledujúcej časti budeme preto venovať pozornosť pojmom, ktoré s pochopením tohto vzťahu súvisia.

Človek nadobúda svoje vedomosti mnohorakými spôsobmi: vlastnou skúsenosťou, teda bezprostredným stykom s okolitým svetom, získavaním vedomostí predchádzajúcich generácií, teda štúdiom, učením a **usudzovaním**.

D1.2. **Usudzovanie je myšlienkový proces, pomocou ktorého na základe spracovania predchádzajúcich vedomostí v našom rozume získame nový poznatok bez toho, aby sme sa museli odvolať na nejakú novú skúsenosť.**

Logika sa nezaoberá procesom usudzovania, lebo v ňom ide o fyziologické a psychologické činnosti. Logika sa zaoberá len jazykovou podobou úsudkov, presnejšie ich písomnou podobou a formou. Ich vlastnosti sú závislé vo väčšine prípadov práve od ich formy, a to niekedy veľmi podivným spôsobom.

D1.2.1. **Výsledkom usudzovania je úsudok.**

D1.2.2. **Jednou z vlastností úsudkov je ich platnosť alebo neplatnosť.**

D1.2.3. **Každý úsudok sa skladá z predpokladov a záveru.**

D1.2.4. **Predpoklady sú vety, ktorých platnosť uznávame alebo poznáme, a záver je veta, ktorá z predpokladov logicky vyplýva.**

Proces logického vyplývania môžeme definovať na niekoľkých úrovniach.

Klasická forma:

D1.3.1 Veta **Z** (záver) logicky vyplýva z predpokladov A_1, A_2 ... A_k práve vtedy, ak vždy vtedy, keď všetky predpoklady majú PH 1 (pravda), má túto hodnotu aj **Z**.

Klasická rozšírená forma:

D1.3.2 Veta **Z** (záver) logicky vyplýva z predpokladov A_1, A_2 ,..., A_k práve vtedy, ak vždy, keď všetky predpoklady majú jednu z charakteristických hodnôt kalkulu, má túto hodnotu aj **Z**.

Klasické induktívne vyplývanie:

D1.3.3 Veta **Z** (záver) klasicky induktívne vyplýva z predpokladov A_1, A_2 ,..., A_k práve vtedy, ak vždy, keď všetky predpoklady majú PH 1 (pravda), má **Z** nejakú hodnotu z množiny možných PH (PH záveru > 0 a < 1), ktorá sa blíži k hodnote 1.

Neklasické induktívne vyplývanie:

D1.3.4 Veta **Z** (záver) neklasicky induktívne vyplýva z predpokladov $A_1, A_2, ..., A_k$ práve vtedy, ak vždy, keď všetky predpoklady majú tú istú jednu z charakteristických hodnôt, **Z** nadobúda hodnotu približujúcu sa k PH predpokladov v smere od hodnoty 0 (**zužujúca neklasická indukcia**) alebo od hodnoty 1 (**rozširujúca neklasická indukcia**).

Úsudky môžeme písať v riadkoch, potom je záver oddelený od predpokladov zvislou čiarou, ktorá označuje vzťah logického vyplývania, ide o výraz tvaru:

$$A_1, A_2, \ldots A_k \mid Z,$$

kde vety A_1, A_2, ... Ak sú predpoklady a Z je záver úsudku. Výraz čítame takto: Z predpokladov A_1, A_2 ... Ak logicky vyplýva záver Z.

Úsudky môžeme zapisovať aj formou stĺpcov:

A_1	
A_2	Ú
A_3	s
.Predpoklady	u
.	d
.	o
A_k	k
Z Záver	

Vodorovná čiara pod výrazom A_k je čiara označujúca vzťah logického vyplývania.

Priestorovo náročnejší, ale oveľa prehľadnejší je zápis vo forme stĺpcov, preto mu dáme v našich ďalších úvahách prednosť.

Výroky

Možné, zvolené, charakteristické a vybrané hodnoty

D2 Vyberme si uzavretý interval **<0 ... 1>** z množiny racionálnych čísel, usporiadajme ho lineárne a označme ho ako **usporiadanú množinu možných pravdivostných hodnôt extenzionálnej logiky.**

D2.1 **Výrok je oznamovacia veta, na ktorú sa môžeme opýtať, či jej môžeme priradiť jednu z možných pravdivostných hodnôt.**

D2.2 **Výrok je pravdivostne ohodnotený, ak mu pri jeho pravdivostnom hodnotení môžeme priradiť práve jednu a len jednu z možných pravdivostných hodnôt.**

D2.3 **Paradox je oznamovacia veta, ktorej možno priradiť pri jednom pravdivostnom hodnotení viac ako jednu pravdivostnú hodnotu.**

Tv.1 **Paradox nie je výrok.**

Pri priraďovaní pravdivostných hodnôt výrokom spravidla nepredpokladáme, že použijeme všetky možné hodnoty z množiny možných pravdivostných hodnôt, ale ich počet podstatne obmedzujeme a vyberáme len tie hodnoty, ktoré mienime v našom jazyku používať. Podľa toho, koľko hodnôt z možných hodnôt si vyberieme, môžeme potom hovoriť o logikách dvojhodnotových, trojhodnotových ..., viachodnotových, n-hodnotových.

V nekonečnom počte dvojhodnotových logík, ktoré môžeme takto vytvoriť, zaujíma neotrasiteľné postavenie tzv. **klasická dvojhodnotová logika,** ktorá volí ako pravdivostné hodnoty svojich výrokov krajné hodnoty z množiny možných hodnôt, to znamená hodnotu **0**, ktorú interpretuje ako pravdivostnú hodnotu **nepravda** a hodnotu **1**, ktorú interpretuje ako pravdivostnú hodnotu **pravda.**

Pojmy pravda a nepravda sa zvyčajne prijímajú podľa Aristotelovej definície takto.

D3.1 **Ak o niečom, čo je, hovoríme, že je, a o niečom, čo nie je, že nie je, potom tvrdíme pravdu.**

D3.2 **Ak o niečom, čo je, hovoríme, že nie je, a o niečom, čo nie je, že je, potom tvrdíme nepravdu.**

Terminologicky sú pojmy "**pravda**" a "**nepravda**" v slovenčine aj v češtine nepresné. Pravdivostná hodnota výroku je totiž jeho vlastnosťou a ak má dve rôzne vlastnosti, ktoré nemôže mať výrok súčasne, neznamená to, že jedna je negáciou druhej. To platí len v klasickej extenzionálnej dvojhodnotovej logike v prípade slovenčiny a v češtiny. Pri viacerých zvolených pravdivostných hodnotách, teda vo viachodnotových klasických či neklasických logikách, to tak nie je.

Iné jazyky majú rozdielne pojmy, ktoré nie sú navzájom negáciami ako v slovenčine. Napríklad angličtina má "true" a "false", poľština "pravda" a "falsz" ruština "pravda" a "ložnosť" ... Negácia hodnoty výroku nemusí byť jeho absolútnym protikladom, môže byť len jeho čiastočným protikladom. Napr. v trojhodnotovej logike môže byť negácia pravdy polopravdou a až dvojnásobná negácia nepravdou či skôr inou vlastnosťou, nie popretím.

Logiky, ktoré budú používať dve zvolené hodnoty, pričom aspoň jedna z nich bude iná ako niektorá z krajných pravdivostných hodnôt usporiadanej množiny všetkých možných pravdivostných hodnôt, teda aspoň jedna bude iná ako 1 alebo 0, budú dvojhodnotovými extenzionálnymi <u>neklasickými logikami.</u>

D4 **Hodnotám, ktoré vyberieme z množiny možných hodnôt logiky a ktoré priradíme ako hodnoty oznamovacím vetám nejakého jazyka, budeme hovoriť <u>zvolené pravdivostné hodnoty</u> z množiny možných pravdivostných hodnôt príslušnej logiky.**

Počet zvolených pravdivostných hodnôt **h** pre jednu logiku je [**h** ≥ **2**>].

Pri počte hodnôt h = 1 by všetky výroky mali len jednu hodnotu a boli by vzhľadom na jedinú vybranú hodnotu málo informatívne, každá forma úsudku by bola platná, každý výrok pravdivý (nepravdivý), aj keby vlastne bol - vzhľadom na jedinú pravdivostnú hodnotu - ideálny, pretože by nemohol vzniknúť paradox. Neexistoval by spor, lebo by neexistovala ani negácia. Ak by sme ju aj vytvorili, negovaný výrok by mal rovnakú hodnotu ako výrok pôvodný. Aj všetky zložené výroky by mali jedinú pravdivostnú hodnotu, fakticky by nejestvoval žiadny logický funktor. Bol by to jazyk neorganizovaný logikou, a teda by to ani nebol jazyk. Mať logiku ako svoju súčasť je jednou z podstatných vlastností jazyka. Logika je totiž naozaj jednou z podstatných vlastností jazyka. Každý jazyk okrem **logiky** musí mať svoj **slovník** a **gramatiku.**

D 4.1 **Ak zvolíme viac hodnôt ako dve z množiny možných hodnôt logiky, dostávame trojhodnotové, štvorhodnotové a viachodnotové logiky.**

Pokiaľ budeme hovoriť o viachodnotových logikách, pôjde hlavne o logiky, v ktorých sa vždy vyskytujú hodnoty 1 a 0 ako krajné hodnoty a medzi nimi aj iné hodnoty zo spomínanej množiny hodnôt. V trojhodnotovej logike to budú hodnoty [1, 1/2, 0]. V štvorhodnotovej logike pôjde o hodnoty [1, 2/3, 1/3, 0] a pod. Pri použití prirodzených čísel pre tie isté logiky to bude vyzerať takto: [1, 2, 3]; [1, 2, 3, 4] a pod. Množinu hodnôt budeme pre každý prípad zvlášť zavádzať. V niektorých takto budovaných logikách môže byť klasická logika obsiahnutá ako nejaká špeciálna časť, v iných nemôže byť obsiahnutá vôbec, a to vtedy, keď hodnoty 1 a 0 nebudú medzi vybranými hodnotami. Také logiky môžeme predpokladať, aj keď im budeme venovať v tejto práci len málo pozornosti.

Je ešte jedna vlastnosť pravdivostých hodnôt, ktorou sme sa nezaoberali, a to vlastnosť, ktorej význam sme neopísali a ktorú nazveme **charakteristická hodnota.**

D4.2 **<u>Charakteristická hodnota</u> logiky je tá hodnota z množiny zvolených hodnôt úsudku, ktorú musí nadobudnúť každý záver úsudku, ktorý je odvoditeľný z predpokladov na základe pravidiel logiky.**

(V klasickej dvojhodnotovej logike je charakteristickou hodnotou vždy hodnota pravda (1) a úsudky tam považujeme za platné práve vtedy, ak vždy, keď sú pravdivé všetky predpoklady, sú pravdivé aj závery úsudkov a závery sú odvoditeľné z predpokladov úsudku.)

Úsudky môžeme za platné uznať alebo ich platnosť musíme nejakým spôsobom overiť. Logika nám poskytuje pravidlá a postupy, ktoré nám umožňujú overovať platnosť úsudku na základe platnosti iných úsudkov. Niektoré úsudky sú veľmi jednoduché, ich platnosť často uznávame a pomocou nich dokazujeme potom platnosť ostatných úsudkov, ktoré budú platné na základe platnosti uznaných úsudkov. Uznané úsudky nazývame potom **prvotné** alebo **základné úsudkové pravidlá**. Sú garantmi platnosti všetkých pravidiel, ktoré pomocou nich dokážeme. Všetky dokázané pravidlá budeme nazývať **druhotné pravidlá**.

Vráťme sa po týchto úvahách k vlastnostiam základnej matice.

Podľa narysovanej matice je jasné, že hlavná os prebieha v smere zľava doprava dolu. Pre nás je podstatné definovať základné hodnoty pre hlavnú os. Naše úvahy sa budú týkať zatiaľ len dvojhodnotovej logiky.

D5 **Hlavná os má hodnoty v <u>základnej polohe</u>**, ak v príslušnom poli je výsledná hodnota totožná s hodnotami, ktorých je priesečníkom.

Túto os môžeme nazvať aj **osou úplnosti**, lebo práve od priradenia hodnôt na tejto osi závisia vlastnosti logického kalkulu, ktorý sa buduje pomocou zvoleného funktora ako jediného základného termínu, charakterizovaného danou maticou, a ďalej to, či kalkul budovaný daným funktorom bude **shefferovský** (úplný, môže vytvárať tautológie, kontradikcie aj splniteľné formuly), **pozitívny** (môže vytvárať formuly v tvare tautológie a splniteľné formuly), **negatívny** (môže vytvárať formuly kontradiktorické a splniteľné) alebo **neutrálny** (môže vytvárať len **splniteľné** formuly).

D5 **Kalkuly, ktoré sú shefferovské, pozitívne a negatívne, majú vybranú hodnotu.**

D5.1 **Neutrálne kalkuly nemajú vybranú hodnotu.**

Mať vybranú hodnotu znamená, ako to vyplýva z definícií D5 a D5.1, že v danom kalkule sa dajú konštruovať formuly, ktorých výslednou pravdivostnou hodnotou pri tabuľkovom vyhodnocovaní je jediná z možných pravdivostných hodnôt. Vo viachodnotových logikách môžeme tak nazývať všetky formuly s jedinou výslednou hodnotou, lebo slovo tautos znamená <u>*to isté*</u>, teda ide o prenesenie významu v tom, že záver hovorí to isté o všetkých kombináciách pravdivostných hodnôt skúmanej formuly.

Dôležitou vlastnosťou, ktorú môžeme jednoducho a jednoznačne určiť u ľubovoľnej matice, je jej symetrickosť podľa hlavnej osi a tá je daná tým, že hodnoty uvedené v zrkadlovo rozmiestnených poliach matice sú totožné čiže jej hodnoty sú symetricky umiestené podľa hlavnej osi. Matica je potom symetrická a funktor ňou charakterizovaný je komutatívny. (To platí v plnej miere aj vo viachodnotových kalkuloch.) Teraz naznačíme zákonitosti, ktoré hovoria o tom, ako sa prejavia zmeny na hlavnej osi matice na vlastnostiach matice.

Ak hodnoty na hlavnej osi ostanú nezmenené vzhľadom na základnú polohu, potom funktor, ktorý vznikne dodaním ľubovoľných hodnôt do polí na osi

symetrie, ak ho zvolíme za prvotný termín nejakého jednofunktorového kalkulu, **vytvorí kalkul bez vybranej hodnoty, teda kalkul neutrálny.**

Ak zmeníme len jednu hodnotu na hlavnej osi, potom zmenená hodnota sa stáva **vybranou hodnotou kalkulu.**

Ak je takto zmenená matica asymetrická, potom funktor ňou vytvorený umožňuje uskutočňovať **rozklad formúl** (podobný implikačnému rozkladu v systéme prirodzenej dedukcie, napr. podľa učebnice **Słupeckého a Borkowského,** a implikačný rozklad tam bude patriť tiež), ale iba jednostranný. Pri symetrii matice to bude rozklad obojstranný (ako v prípade ekvivalencie).

Ak zmeníme obe hodnoty na hlavnej osi a daná matica je aj symetrická, potom je takto vytvorený **funktor shefferovský.**

D5 **Logický funktor je shefferovský**, ak pri jeho stanovení za jediný **zakladný termín** logického kalkulu dostaneme **funkčne (definitoricky) úplný logický kalkul.**

Ak je takto upravená matica asymetrická, potom ide o nejakú **neaserciu** a môžeme pomocou nej definovať negáciu.

Zmena oboch hodnôt na hlavnej osi označuje totiž možnosť definovať v príslušnom kalkule úplnú negáciu.

Hlavná os je zároveň osou **jednoargumentových funktorov** a to nie je vôbec náhodný jav, ale závažný faktor, hlavne **vo viachodnotových logikách**, lebo tam nám poskytne množstvo informácií. Jej hodnoty totiž určujú hodnotu určite definovateľného jednoargumentového funktora, ktorý je prirodzenou negáciou pre daný kalkul. Pomocou matice si teda každý jednofunktorovy kalkul stanovuje svoju negáciu. Ak teda na hlavnej osi nie je žiadna zmena (zostáva prirodzené usporiadanie hlavnej osi), kalkul budovaný len na základe takejto matice nemá negáciu. Z funktorov budú **dokonalými negáciami** len tie, ktoré majú voči základnému usporiadaniu hodnôt na hlavnej osi všetky hodnoty posunuté a vyskytujú sa tam všetky zvolené hodnoty kalkulu. Len pomocou takýchto negácií možno bez problémov vytvárať príslušné zákony vylúčenia: zákon vylúčenia tretieho pre dvojhodnotovú logiku, zákon vylúčenia štvrtého pre trojhodnotovú logiku atď. Pre každú takto upravenú hlavnú os matice zároveň možno vytvárať aj príslušné skupiny **shefferovských** viachodnotových funktorov, ktorých je vo viachodnotových kalkulov logiky nad očakávanie mnoho. Pri spomínaných zmenách so všetkými zvolenými hodnotami prakticky všetky vytvárané matice reprezentujú shefferovské funktory a pri zmenách na všetkých poliach hlavnej osi, ale nie so všetkými PH, ich nazveme **úplné negácie** - je to vyše 50 % shefferovských funktorov. Tieto dáta však reprezentujú už naše poznatky z trojhodnotových logík, lebo v dvojhodnotovej logike sú len dva shefferovské funktory, a to funktor charakterizovaný maticou

	1	0
1	0	1
0	1	1

a maticou

$$\begin{array}{c|c|c|} & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Dôkladné poznanie maticovej podoby funktorov nám skutočne poskytuje mnoho užitočných znalostí o ich použiteľnosti pri budovaní kalkulov dvojhodnotovej logiky. O to viac prekvapujúcich poznatkov získavame vo viachodnotových logikách. Matice nám umožňujú využívať pri tejto práci aj počítačovú techniku, čo nám pomáha vytvárať sústavy definícií a presne formulovať definície nových vlastností logických viachodnotových funktorov.

Rýchlosť počítačov sa tak mení na kvalitu, lebo môžeme poznávať a definovať nové vlastnosti jazyka vôbec.

Ako sme už naznačili, matice sú veľmi užitočné aj pri formulovaní pravidiel pre zavádzanie nových riadkov do dôkazu. Vieme, že ak matica má len jednu vybranú hodnotu, potom je zbytočne sa snažiť len pomocou nej vytvoriť pravidlo pre inú vybranú hodnotu. Z matice tiež vieme, že ak má matica len jednu hodnotu ako vybranú a je asymetrická, potom môže rozkladať formuly v jednom smere, ak je symetrická, potom rozkladá formuly v oboch smeroch.

Ak má matica sama obe hodnoty vybrané, nemôže robiť sama rozklad.

Matica, ktorá má všetky hodnoty na hlavnej osi zmenené, je kandidátom na shefferovský funktor, aj keď je to len jedna z podmienok.

Táto stať je svojím rozsahom limitovaná, preto nemôžeme rozvádzať ďalšie zaujímavé poznatky, aj keď ich máme k dispozícii. Aspoň s jedným zaujímavým výsledkom však chceme ešte čitateľa oboznámiť.

V extenzionálnych viac ako dvojhodnotových logikách vstupujú do hry aj iné faktory. Potom je určenie pravidiel zložitejšie, dvojhodnotové označené matice sú však výborným východiskom pre ďalšie úvahy a výskumy. Nesmierne prekvapujúce sú v trojhodnotovej logike možnosti vytvárania pomerne malých neúplných logických kalkulov, ale so všetkými zvolenými hodnotami ako vybranými alebo s dvoma vybranými hodnotami, obsahujúcimi dvojhodnotovú logiku ako vnorenie.

Sústavou, ktorá vznikla definovaním pomocou počítača zo základnej matice tvaru

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

alebo

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array},$$

dostávame sústavu presne šestnástich matíc; pri oboch uvádzaných maticiach je zostávajúca definovaná, teda pätnásť je definovaných a jedna je základná. Zaujímavosťou týchto matíc je to, že v štyroch políčkach na rohoch matíc sa vyskytujú hodnoty 1 a 3, čo v dvojhodnotovej logike predstavuje hodnoty 1 a 0. Hodnoty v týchto poliach presne zodpovedajú hodnotám šestnástich dvojargumentových matíc dvojhodnotovej logiky. V takejto neúplnej a veľmi malej sústave matíc tvoriacej jeden kalkul (resp. dva kalkuly) trojhodnotovej logiky vidíme priamo vnorenie celej dvojhodnotovej logiky do trojhodnotovej logiky.

Na základe týchto faktov môžeme tvrdiť, že každá sústava definovaných funktorov trojhodnotovej logiky, ktorá obsahuje aspoň jednu z uvedených základných matíc, má vnorenú v sebe celú dvojhodnotovú logiku. A to je len jedno z mnohých a mnohých vnorení. Rôzne iné spôsoby nám priestor state nedovoľuje opísať.

Uvádzame definovanú sústavu trojhodnotového nadefinovaného kalkulu so základnými aj definovanými termínmi a dvojhodnotovými maticami zapísanými pod nimi v jazyku dvojhodnotovej logiky. Názornosť príkladu sa takto zvyšuje.

1.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 1&1\\\hline\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&3&3\\\hline 1&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3&1&1\\\hline 3&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&0\\\hline\end{array}$$

5.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array}$$

6.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 1&3&3\\\hline 1&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&0\\\hline\end{array}$$

7.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 3&1&1\\\hline 3&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}$$

8.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&0\\\hline\end{array}$$

9.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&1\\\hline\end{array}$$

10.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&1\\\hline 1&3&3\\\hline 1&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array}$$

11.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&1\\\hline 3&1&1\\\hline 3&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array}$$

12.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&1\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&0\\\hline\end{array}$$

13.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array}$$

14.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 1&3&3\\\hline 1&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1&0\\\hline\end{array}$$

15.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 3&1&1\\\hline 3&1&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}$$

16.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline 3&3&3\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&0\\\hline\end{array}$$

Otázkami obsiahnutosti klasického kalkulu v kalkuloch neklasických sa zaoberal **M. Mleziva** vo svojej práci [5]. Aj čítanie tejto práce nás podnietilo k úvahám nad týmito nevšednými a zaujímavými problémami.

LITERATÚRA

[1] ARISTOTELES: První analytiky. Praha, ČSAV 1961.
[2] TARSKI, A.: Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd. Praha 1966.
[3] ZLATOŠ, P.: Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. Bratislava, Iris 1995
[4] SŁUPECKI, J. - BORKOWSKI, L.: Elementy logiky matematycznej. Warszawa, PWN 1966.
[5] MLEZIVA, M.: Über das Enthaltensein des klassischen Aussagenkalküls in den nicht - klassischen Aussagenkalkülen.. Praha, Academia 1966.
[6] WITTGENSTEIN, L.: Tractatus logico-philosophicus. Praha 1993.

PhDr. František Siska
Katedra filozofie FF PU
ul. 17. novembra 1
080 01 Prešov
SR