

O POVAHE SVETA MATEMATIKY

LADISLAV KVASZ, Katedra humanistiky MFF-UK, Bratislava

KVASZ, L.: On the Nature of the World of Mathematics.
FILOZOFIA 50, 1995, No 3, p. 131

The paper is concerned with the epistemological analysis of mathematical language. Together with symbolic languages of arithmetics, algebra and of predicate calculus it describes also the iconic languages of synthetic, analytical and fractal geometry. Explaining geometric figures as terms and Euclid's axioms as formative rules of the iconic language makes conceiving of the geometric intuition, as precise as the formal symbolism of algebra or arithmetics, possible. The historical variations of mathematics, in which intuitive, resp. calculative moments prevailed, thus could be seen as the development of language. An interesting regularity was revealed by this approach, showing that the higher form of symbolic or iconic language has always been achieved through a mediating stage of a language of the opposite kind.

Martin Heidegger v knihe *Grundprobleme der Phenomenologie* [4] upozorňuje na pozoruhodnú skutočnosť. Kresťanská teológia, založená na dogme creatio ex nihilo, bola schopná prijať a integrovať pohanskú aristotelovskú filozofiu, ktorá chápe vesmír ako večný a každé tvorenie vysvetľuje ako tvorenie z niečoho. Heidegger tento pozoruhodný fakt vysvetľuje tým, že tieto odlišné spôsoby výkladu súcna – kresťanský výklad súcna ako súcna stvoreného a antický výklad súcna ako súcna pretvoreného – sú zakotvené v spoločnom predporozumení.

Spoločné predporozumenie, spájajúce kresťanský a antický svet, pochádza zo zhotovujúcej činnosti, v ktorej sa človek stavia k predmetu ako tvorca. Ako ilustráciu uvádza Heidegger zhotovenie džbánu hrnčiarom. Zo základného predporozumenia sa vytvára výklad súcna ako súcna stvoreného či pretvoreného – podľa toho, ktoré aspekty zhotovujúcej činnosti vystúpia do popredia. Ak vystúpi do popredia invenčná činnosť, t.j. proces rozvažovania, v priebehu ktorého sa v mysli tvorcu zrodí forma budúceho džbánu, tak to bude creatio ex nihilo, lebo táto forma sa naozaj zrodila z ničoho. Ak naopak vystúpi do popredia manuálna činnosť, tak táto je vždy činnosťou pretvárajúcou, a teda jej zodpovedajúcim výkladom bytia bude tvorenie z niečoho. Podľa Heideggera teda kresťanstvo mohlo prirodzene integrovať antické dedičstvo aj napriek značným koncepčným odlišnostiam, lebo ich predporozumenie súcnu je rovnaké.

Zdrojom predporozumenia svetu je teda činnosť. Činnosť vytvára pole samozrejmostí, konštituuje pole významov, v ktorých je zasadený každý výklad. Preto keď chceme porozumieť svetu matematiky, nesmieme sa nechať viesť výkladmi tohto sveta, ktoré ponúkajú jednotlivé filozofické školy. Nesmieme sa nechať vtiahnuť do sporov týchto škôl o povahe priestoru či nekonečna, o existencii syntetických súdov a priori alebo o vyvoditeľnosti aritmetiky z logiky. V týchto sporoch sa o povahe matematiky veľa nedozvieme.

Každá škola háji svoje legitímne a viacmenej korektné poňatie matematiky. Tieto stanoviská sú však zväčša len rozvinutím určitých apriórnych filozofických téz či princípov. Ich zástancovia k nim v prevažnej väčšine prípadov nedospeli skúmaním samotnej matematiky, analýzou jej najdôležitejších výsledkov, porovnávaním jej rôznych oblastí. Namiesto toho matematiku používajú len ako ilustráciu svojich filozofických koncepcií. (To sa prejavuje najmä v tom, že príklady, ktoré rozoberajú, sú zväčša z matematického hľadiska triviálne a nezaujímavé. Koľko sa len filozofi nadiskutovali o tom, či „ $7+5 = 12$ “ je syntetický, alebo analytický súd, ale komplexné čísla, diferenciálny počet či eliptické funkcie nechávajú nepovšimnuté.) V lepšom prípade prehlásia tézy platné v určitej, pomerne úzkej oblasti matematiky za univerzálne a fundamentálne. (To sa prejaví v rozpore medzi veľkou všeobecnosťou proklamovaných téz a veľmi úzkym a špecifickým spektrom ich ilustrácií. Klasickým príkladom je téza o tautologickej povahe matematiky, ktorá platí pre niektoré časti algebry a analýzy, ale je pomerne problematické riadiť sa ňou v globálnej diferenciálnej geometrii alebo v algebraickej topológii.)

Keď sa chceme o povahe matematiky dozvedieť niečo skutočne nové, treba sa pokúsiť nájsť predporozumenie, ktoré je spoločným základom logicizmu, formalizmu, intuicionizmu a konštruktivizmu. Keď totiž spolu vedú spor, musí existovať spoločný priestor, v ktorom tento spor prebieha, spoločné pole významov a samozrejmostí, ktoré umožňuje navzájom si rozumieť a nesúhlasiť. Produktívna filozofia matematiky by mala vychádzať z analýzy práve takýchto predporozumení.

Domnievam sa, že spoločným predporozumením logicizmu, formalizmu, intuicionizmu a konštruktivizmu je kríza základov matematiky, povedomie, že matematika potrebuje revíziu svojich východísk. Toto predporozumenie usmerňuje pozornosť na určité problémy a stráca zo zreteľa problémy iné. Tak napríklad stúpa význam zdôvodnenia určitej teórie, kým otázky spojené s jej rozvojom sa dostávajú na perifériu filozofie vedy. Podobne sa do centra pozornosti dostáva aritmetika či teória množín, ktorých logická štruktúra je ľahko sledovateľná, kým algebraická geometria či teória parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré využívajú ťažko formalizovateľný geometrický alebo fyzikálny názor, sú vo filozofii matematiky marginalizované.

Takto sa obraz o význame jednotlivých disciplín matematiky, ktorý predkladá filozofia matematiky, značne líši od toho, čo sami matematici považujú za najdôležitejšie. Disciplíny, ktorým sú na svetových matematických kongresoch venované hlavné referáty či výsledky, za ktoré boli udelené v poslednej dobe Fieldsove medaily, sa v literatúre z filozofie matematiky temer nevyskytujú.

To ale znamená, že filozofia matematiky nereflektuje matematiku v jej súčasnom stave, ale zotráva vo významovom poli zo začiatku storočia. Čiastočne je to pochopiteľné, veď voči najnovším výdobytkom matematiky ešte nemáme dostatočný časový odstup, ktorý by ich umožňoval plne filozoficky reflektovať. Ale neplatí to úplne. Od vzniku algebraickej topológie či globálnej diferenciálnej geometrie už uplynulo dostatočne dlhé obdobie, aby sme sa mohli pokúsiť o ich filozofické spracovanie. To, že sa filozofia matematiky sústreďuje ešte stále na matematiku základov, nie je iba otázkou časového odstupu.

Mojim cieľom je predovšetkým zbaviť sa zúženého pohľadu na samotný predmet a úlohy filozofie matematiky, ktorý sa vytvoril počas krízy základov matematiky na začiatku storočia.

Vtedy takéto zúženie pohľadu, spojené s temer úplným ignorovaním geometrie, bolo plne oprávnené. Domnievam sa však, že dnes už oprávnené nie je. Preto sa chcem pokúsiť vytvoriť vyváženejší obraz matematiky, v ktorom by geometrický názor dostal svoje náležité miesto. Preto treba v prvom rade odmietnuť „hru na zakladateľov matematiky“. Nejde mi o to, vytvoriť nejaké nové základy matematiky, vybudované na báze geometrického názoru. Chcem sa pokúsiť o obnovenie plného významu pojmu filozofie matematiky, ktorá by reflektovala matematiku v jej celistvosti, bez apriórnej marginalizácie určitých otázok či tém. Preto chcem do centra filozofického záujmu priniesť okrem aritmetiky či teórie množín aj geometriu a algebru, pritom tak, aby sa objasnili nielen „základy“ týchto disciplín, ale predovšetkým ich vzájomná previazanosť a vzťah, ich **miesto vo svete matematiky**.

Keď chceme porozumieť svetu matematiky, nechajme sa viesť ňou samou, pozrime sa na činnosti, ktoré matematik bežne a každodenne vykonáva. Už počujeme hlas klasického filozofa matematiky – matematik predsa dokazuje vety. Áno, bezpochyby robí aj to, ale nielen to. Niektorí musia tieto vety aj vymýšľať a niektorí musia vytvoriť pojmy, pomocou ktorých sa tieto vety dajú vôbec sformulovať. Matematika má omnoho bohatší arzenál činností než iba dokazovanie. Keď sa preto chceme zbaviť zúženého pohľadu na matematiku, musíme sa okrem marginalizácie jej niektorých disciplín oslobodiť aj od neadekvátneho pohľadu na jej činnosti.

O tomto probléme píše Richard Courant, jeden z najvýznamnejších matematikov tohto storočia, v úvode knihy *Čo je matematika?* [1]: „V súčasnosti prevládajúce zdôrazňovanie deduktívno-postulatívneho charakteru matematiky považujeme za veľmi nebezpečné. Je síce pravda, že nie je ľahké opísať, čo je to tvorivý objav, usmerňujúca a formujúca intuícia, toto sa však skrýva v jadre aj toho najabstraktnejšieho matematického výsledku. Je možné, že vykryštalizovaná deduktívna forma je cieľom, ale hybnou silou je aj tak intuícia. Vážne ohrozenie pre samotný život vedy vyplýva z tvrdenia, že matematika nie je nič iné než systém dôsledkov odvodených z definícií a postulátov, ktorý musí byť konzistentný, ale inak môže byť slobodne vytvorený vôľou matematikov. Keby tento opis bol správny, tak by matematika nemohla priťahovať žiadnu inteligentnú bytosť. Bola by hrou s definíciami, pravidlami a sylogizmami bez motívov či cieľa. Názor, že intelekt môže vytvoriť zmysluplný axiomatický systém podľa svojho rozmaru, je zavádzajúca polopravda.“

Ak je Heideggerove odvodenie predporozumenia z činnosti správne, tak kľúčom pre správne porozumenie svetu matematiky musí byť filozofická analýza činností, ktoré tvoria každodennosť matematiky. V tejto stati sa sústredíme na dve činnosti – na manipuláciu so znakmi a na kreslenie obrázkov. Domnievam sa, že toto sú dva základné typy činností, ktoré konštituujú svet matematiky, a že celá matematika je do istej miery debatou o tom, čo sa v týchto dvoch činnostiach odhalilo. Z týchto dvoch činností sa rodí predporozumenie, na ktorom sa zakladá celá matematika so svojimi intuíciami, pojmi, axiómami, vetami a dôkazmi.

Vynára sa námietka, že matematika už dávno prekročila hranice nakresliteľného, a preto uvádzať kreslenie obrázkov ako jednu so základných matematických činností, rovnocennú s abstraktným formalizmom, je zavádzajúce. Mne však ide o rekonštrukciu predporozumenia, z ktorého matematika čerpá svoje intuície, a nie o techniky, pomocou ktorých overuje ich adekvátnosť. Samozrejme, že obrázok nie je rovnocenný s formálnym dôkazom. Ale na druhej strane jednoduchý obrázok často predstavuje prostriedok, ktorý umožnil nájsť základnú ideu dôkazu. Keby sa intuícia plne docenila ako základný motor rozvoja vedy a keby sa otázky

rozvoja vedy považovali za rovnako dôležité ako otázky jej zdôvodnenia, t.j. keby sa filozofia vedy vymanila so zúženého pohľadu krízy základov, vyššie spomenuté pochybnosti by nevznikli.

Pri analýze týchto dvoch činností sa odhalí zvláštny periodický pohyb v dejinách matematiky spočívajúci v striedaní symbolického a názorného jazyka. Tento fenomén doteraz nebol dostatočne pochopený. Zväčša sa v ňom vidí prejav psychických procesov alebo sa používa na ilustráciu dialektických doktrín. Avšak podrobiť ho serióznej epistemologickej analýze sa doteraz nik nepokúsil. Toto striedanie formálnych a názorných období v matematike má totiž pomerne vážny charakter, čo od takejto analýzy odrádza. Domnievam sa však, že táto vážnosť je spôsobená iba nedostatočným pochopením povahy jazyka geometrických obrázkov. Pokiaľ je pre nás obrázok a vôbec celý geometrický názor čímsi neurčitým, ani jeho striedanie s formálnym jazykom, ktoré sa dá v dejinách matematiky jasne pozorovať, nemôže mať iné než vágne obrysy.

Preto prv, než sa pustíme do analýzy striedania názorného a formálneho jazyka matematiky, aby sme o tomto striedaní mohli hovoriť presnejšie než metaforicky, potrebujeme prehĺbiť chápanie geometrických obrázkov. Vychádzať budem pritom z analógie s ideou pojmového písma Gottloba Fregeho [2].

Frege pri tvorbe pojmového písma vychádzal z aritmetiky. V jeho dobe, t.j. v dobe prehlbujúcej sa krízy matematiky, to bolo určite správne. Ale ísť vo Fregeho šlapajách znamená sledovať ducha, a nie literu jeho diela. Preto sa domnievam, že pred filozofiou matematiky stojí dôležitá úloha pokúsiť sa spraviť to, čo Frege urobil pre jazyk aritmetiky, aj s jazykom geometrie. Táto úloha presahuje rámec tohto pojednania. Prekračuje jeho epistemologický horizont smerom do logiky. Preto celé pojednanie, treba chápať ako predbežnú epistemologickú štúdiu, mapujúcu východiská a možnosti ďalších logických skúmaní.

Potom, ako v odseku 2 načrtnem základné idey exaktného chápania geometrických obrázkov, budeme môcť z jednotného hľadiska pojať ako formálny jazyk aritmetiky či algebry, tak aj názorný jazyk geometrie či topológie. Zjednotenie symbolického a ikonického jazyka nám umožní pojať vývin matematiky vcelku, ako vývin jazyka. Pritom vývin jazyka budeme sledovať z dvoch aspektov: z hľadiska logickej sily, ktorá ukazuje, ako sa komplexné formule dajú v danom jazyku dokázať, a z hľadiska expresívnej sily, ktorá ukazuje, čo nového, čo sa v predošlých štádiách vymykalo vyjadreniu, jazyk umožňuje vyjadriť. Pritom vývin jazyka matematiky spočíva v náraste jeho logickej a expresívnej sily.

Matematika má tendenciu svoje jazyky dodatočne preparovať. Preto sa už do jazyka aritmetiky zavádza pojem premennej (aby sa dali v tomto jazyku zapísať rovnice) a prípadne sa za základný obor zvolia komplexné čísla (aby sa jazyk imunizoval voči paradoxom s odmocninami zo záporných čísel). Toto počínanie je pragmaticky veľmi výhodné, lebo nám poskytuje silný jazyk, v ktorom sa možno pohodlne pohybovať. Na druhej strane nás však znecitlivuje voči historicky existujúcim jazykom. Staré jazyky nevnímame ako samostatné systémy s vlastnou logickou silou a expresibilitou. Javia sa nám skôr ako akési fragmenty nášho silného jazyka.

Keďže cieľom tohto pojednania je epistemologická analýza jazyka vedy, usilujem sa každý jazyk charakterizovať na tej úrovni, na akej bol vytvorený, bez neskorších vylepšení, ktoré spočívali v tom, že sa výdobytok neskoršieho vývinu (napríklad pojem premennej) pre-

niesol do vývojovo staršieho jazyka (elementárnej aritmetiky). Pre mňa je jazyk elementárnej aritmetiky zásadne jazykom bez premenných.

Domnievam sa, že takéto rozvrstvenie jazyka matematiky na jednotlivé historické vrstvy bude prínosné aj pre logické skúmania; ukáže totiž, ako sa jednotlivé syntaktické inovácie postupne vynárali. Vývin spočíva v tom, že pre určité problémy sa vytvorí jazyk, v ktorom sú transparentné, t.j. syntaktické. Tým, samozrejme, vzniká priestor pre ďalšie problémy...

1. Elementárna aritmetika. Jazyk elementárnej aritmetiky je najjednoduchším kalkulačným jazykom. Založený je na manipulácii s číselnými znakmi. Existuje mnoho variantov tohto jazyka, dnes najrozšírenejší obsahuje desať základných znakov pre cifry 1,..., 9, 0 a okrem toho ešte znaky +, -, x, : a =.

Podstatnou črtou tohto jazyka je, že nemá symbol pre premennú, preto v ňom nemožno sformulovať žiadne všeobecné tvrdenie ani napísať nejaký vzorec. Preto sa pravidlá na počítanie, napríklad pravidlo pre delenie so zvyškom alebo pre prechod cez desiatku, keďže sú to všeobecné tvrdenia, nedajú v tomto jazyku zapísať. Nie sú to tvrdenia jazyka aritmetiky, ale inštrukcie sformulované v prirodzenom jazyku. Nedajú sa v jazyku aritmetiky **vyjadriť**, ale len **ukázať**.

Zvláštny je i zápis čísel. Považovať celý výraz 257 za meno nemôžeme, lebo pravidlá pre počítanie, napríklad pravidlo pre násobenie dvoch trojciferných čísel, odkazujú na jeho zložky (jednotlivé cifry), čo je pre mená neprípustné. Musí to teda byť zložený výraz, t.j. term. Preto elementárnymi prvkami jazyka sú cifry, nie čísla. Číslo, napríklad 257, je term vytvorený z konštant 2, 5 a 7 pomocou operácie zrefazenia, ktorá spôsobí, že 2 v terme 257 už neoznačuje jednotky, ale stovky. Táto operácia je však implicitná, je zabudovaná do samotného spôsobu zápisu. Operácia zrefazenia je aj v pozadí pravidiel prechodu cez desiatku.

Typické tvrdenia elementárnej aritmetiky sú napríklad:

$$72 + 39 = 111$$

alebo

$$24 \times 8 > 129.$$

Sú to jedinečné tvrdenia. Jazyk elementárnej aritmetiky obsahuje pravidlá, ktoré pomocou formálnej manipulácie so znakmi umožňujú takéto tvrdenia overiť. V dejinách to bol prvý formálny systém umožňujúci na báze explicitných syntaktických pravidiel manipulácie so symbolmi rozhodnúť o pravdivosti nejakého tvrdenia. Aj keď sú to zatiaľ len jedinečné tvrdenia, predsa len význam tohto objavu egyptských (babylónskych, indických, čínskych, mayských,...) kňazov je nesmierny. Tieto pravidlá sú totiž formálne, teda intersubjektívne, explicitné a naučiteľné. Nie je to teda tajné, ale verejné poznanie. To, že ho často utajovali, malo spoločenské dôvody, ktoré nesúviseli s epistemickým charakterom tohto poznania. Z epistemologického hľadiska je formálne poznanie čisto syntaktické, teda prístupné kontrole.

Dôsledkom toho, že jazyk neobsahoval výraz pre premenné, bola nevyhnutnosť formulovať všetky úlohy s konkrétnymi číselnými hodnotami. Zoberme si ako ilustráciu príklad z Moskovského papyrusu ([5], 41): „*Způsob výpočtu pyramidy nemající vrchol. Máš-li dánú pyramidu bez vrcholu vysokou 6 (loktů), s dolní hranou 4 (lokte) a horní 2, umocni 4 na druhou, dostaneš 16, zdvojnásob 4, dostaneš 8, umocni 2 na druhú, dostaneš 4,*

(1) přičti těchto 16

- (2) *k týmto 8 a 4*
- (3) *dostaneš 28, vypočti*
- (4) *1/3 ze 6, obdržíš 2, počítej*
- (5) *s 28 dvakrát, dostávaš 56,*
- (6) *viz: je to skutočne 56. Nalezl jsi správně.*

Počtár miesto toho aby si, ako je dnes bežné, pomocou neznámej zapísal vzorec a potom do neho dosadil hodnoty zo zadania, postupne berie čísla figurujúce v zadaní a robí s nimi rôzne úpravy, až napokon dostane to, čo hľadá. Pomocou konkrétneho výpočtu takto ukazuje všeobecný postup riešenia, ktorý sa v jeho jazyku nedá vyjadriť.

Jazykom elementárnej aritmetiky rozumiem práve tento jazyk. Nech už je akokoľvek čudný, bol to v dejinách ľudstva prvý **jazyk umožňujúci riešiť problémy pomocou manipulácie so symbolmi**. Jeho logická sila sa obmedzuje na overovanie jedinečných tvrdení.

V antickom Grécku v súvislosti so vznikom matematiky sa zrodil nový geometrický jazyk. (Zrod matematiky som podrobnejšie rozobral v stati [7].) U pytagorejcov bol nový, geometrický jazyk ešte spojený s „aritmetickým atomizmom“. Pytagorejci predpokladali, že každá úsečka, teda aj strana a uhlopriečka štvorca, sa skladá z určitého konečného počtu atómov. Za predpokladu, že atómy tvoriace stranu štvorca majú rovnakú veľkosť ako atómy, z ktorých sa skladá jeho uhlopriečka, je pomer dĺžok týchto úsečiek rovný pomeru počtov príslušných atómov. Objav nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca, podľa ktorého pomer ich dĺžok sa nedá vyjadriť v pomere celých čísel, ukazuje neudržateľnosť pytagorejského atomizmu. Ukazuje však tiež, že jazyk geometrie je všeobecnejší ako jazyk aritmetiky. V rámci aritmetiky totiž nie sme schopní pojať stranu a uhlopriečku do jedného výpočtu. Buď zvolíme jednotku súmerateľnú so stranou (potom sa dĺžka uhlopriečky nedá vyjadriť žiadnym číslom), alebo zvolíme jednotku súmerateľnú s uhlopriečkou (a potom sa nám nepodarí zachytiť stranu).

Takto nám nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca odкрýva hranice expresívnej sily jazyka elementárnej aritmetiky. Toto obmedzenie bolo neskôr prekonané prechodom k reálnym číslam, ale, ako som spomenul vyššie, nás tu zaujíma jazyk aritmetiky v jeho pôvodnom stave.

2. Euklidovská geometria. Nový, geometrický jazyk je podstatne silnejší než jazyk opísaný v predošlej kapitole. Umožňuje dokázať všeobecné tvrdenia, ako napríklad tvrdenie, že súčet dvoch ľubovoľných párných čísel je číslo párne. Nemá ani problémy s nesúmerateľnosťou. Pre neho sú strana i uhlopriečka štvorca rovnoprávne objekty. Geometrický jazyk teda nielenže umožňuje dokázať všeobecné tvrdenia, čo jazyk elementárnej aritmetiky nedokáže, ale navyše je schopný tematizovať situácie, ktorých opis sa jazyku aritmetiky vymyká.

Jazyk geometrie sa zrodil v priebehu Pytagorejskej revolúcie. Postupne došlo k jeho očisteniu od pytagorejského atomizmu a u Euklida sa s ním stretávame v maximálnej čistote. Na rozdiel od jazyka aritmetiky je to jazyk ikonický, nie symbolický. Jeho výrazmi sú obrázky tvorené konečnými súbormi bodov, úsečiek a kružníc v rôznych vzájomných polohách, a nie lineárne relácie aritmetických symbolov.

Pod geometrickým obrázkom nerozumiem fyzický objekt tvorený škvmami grafitu nanesenými na viac alebo menej hladký povrch papiera. Pod geometrickým obrázkom rozumiem

to, čím je obrázok pre geometriu, konkrétne výraz ikonického jazyka s jeho vlastným významom a zmyslom. Je to analogické s chápaním výrazov aritmetiky či algebry. Tam sa vzorec tiež nechápe ako fyzický objekt, t.j. ako nesúvislá škvrna atramentu nanesená na papier.

Pre naše epistemologické ciele postačí stručný náčrt logickej štruktúry ikonického jazyka geometrie. Geometrický obrázok považujem za výraz (term) jazyka geometrie. Geometrická konštrukcia je vlastne opisom vytvárajúcej sa postupnosti výrazu. Samotný výraz považujem za dobre utvorený (well formed expression) vtedy, keď sa konštrukciu podarí dokázať (t.j. keď sa dokáže, že priamky nakreslené ako prechádzajúce jedným bodom sú vskutku také, a pod.). Prítom základné kroky konštrukcie, ako „danými dvomi bodmi viesť priamku“ alebo „z daného bodu opísať daným polomerom kružnicu“, považujem za pravidlá formovania výrazov analogické klasickým pravidlám na vytvorenie termu z n -árneho funkcionálneho symbolu a súboru n iných termov. Preto **Euklidove axiomy chápem ako formálne pravidlá jazyka geometrie.**

Mohli by sme podať indukčnú definíciu, ktorá by pozostávala z pravidiel analogických s nasledovnými:

1. Prázdny obrázok je term jazyka geometrie.
2. Ak je daný nejaký term, tak obrázok, ktorý z neho vznikne pridaním ľubovoľného bodu alebo priamky, je opäť term jazyka geometrie.
3. Ak je daný nejaký term, ktorého časťou sú dva rôzne body A a B, tak obrázok, ktorý z neho vznikne pridaním priamky prechádzajúcej bodmi A a B, je opäť term.

Otázka, kedy sú dva termy rovné, t.j. kedy predstavujú ten istý geometrický objekt, je o niečo zložitejšia, ako tomu bolo v prípade jazyka aritmetiky. Podobne ako v aritmetike, ani v geometrii to nezávisí od spôsobu, ako term napíšeme. Čísla 3 a 3 predstavujú to isté číslo, t.j. nezáleží na veľkosti „písma“. Túto vlastnosť je rozumné žiadať aj od termov jazyka geometrie. Otvorené však zostáva detailnejšie rozpracovanie tohto jazyka, t.j. to, ako vyzerajú jeho formule... Zodpovedanie týchto otázok nie je našim cieľom. Spadá skôr do logického než epistemologického pojednania. Chcel som iba naznačiť základné chápanie umožňujúce postaviť jazyk geometrických obrázkov ako niečo rovnocenné vedľa jazyka aritmetiky či algebry, ktorých logickú štruktúru vo svojom diela ozrejmil Frege.

Ako sme už spomenuli, ikonický jazyk geometrie bol prvým jazykom umožňujúcim dokázať všeobecné tvrdenia. Tento jazyk ovládol grécku matematiku natoľko, že keď mal Euklides riešiť kvadratickú rovnicu, riešil ju konštrukčne, nie aritmeticky.

“Objev nesouměřitelnosti a nemožnost vyjádřit poměr libovolných dvou úseček poměrem dvou celých čísel vedly Řeky k tomu, že začali místo aritmetických poměrů užívat poměry mezi veličinami geometrickými a jejich prostřednictvím vyjadřovat obecné proporce mezi veličinami...”

Aby rozřešili rovnici $ax = b^2$, považovali Řekové b^2 za danou plochu, a byla daná úsečka, x hledaná. Úlohu tedy převedli na sestavení obdélníku z něhož známe jeho plochu a jednu stranu. Nebo jak říkali, na „přiložení“ plochy k dané úsečce... ([5], 115).

Riešenie rovníc pomocou geometrickej konštrukcie umožňuje obísť problémy spojené s nesúmerateľnosťou. Hodí sa však len na riešenie lineárnych a kvadratických rovníc. Rovnice tretieho stupňa predstavujú značné problémy, lebo tretia mocnina neznámej predstavuje objem

určitého telesa. A rovnice vyššieho ako tretieho stupňa sa jazyku Euklidovskej geometrie vymykajú.

3. Kosistická algebra. Na prekonanie problémov vznikajúcich pri snahe riešiť rovnice pomocou geometrických konštrukcií vytvorili v 15. storočí nemeckí matematici nový jazyk založený na manipulácii so znakmi, ktorý umožňoval zapísať rovnice aj vyššieho ako tretieho stupňa. Títo matematici sa označujú ako kosisti. Ich hlavným vynálezom bola symbolika založená na neznámej, ktorú nazývali *cosa*, čo po taliansky znamená vec. Algebru označovali ako *regula dela cosa*, t.j. pravidlo veci. Išlo im o vytvorenie formálnych pravidiel umožňujúcich manipulovať s písmenami tak, ako sa manipuluje s vecami. Keď napríklad k veci pridáme ešte jednu rovnako veľkú vec, dostaneme dve veci, čo zapisovali ako $2r$ (v symbolike používali na označenie veci prvé písmeno latinského slova *res*).

Tento jazyk vlastne predstavuje návrat späť od konštrukcie k manipulácii, od ikonického k symbolickému jazyku. Ich symbolický jazyk však oproti jazyku elementárnej aritmetiky už obsahuje symbol pre neznámu. Možno preto povedať, že sa im podarilo do symbolického jazyka zabudovať základný prínos jazyka geometrického, menovite schopnosť dokázať všeobecné tvrdenia.

Jazyk algebry umožňuje vyjadriť riešenie rovnice pomocou vzorca. Z logického hľadiska to predstavuje oproti jazyku geometrie kvalitatívny krok vpred. V jazyku geometrie je pojem premennej prítomný v podobe úsečky neurčitej dĺžky. Na tejto idei bol založený pytagorejský dôkaz toho, že súčet dvoch párných čísel je párný. Jazyk algebry umožňuje redukovať dôkaz tohto všeobecného tvrdenia na čisto formálne overenie, na „výpočet“ pomocou písmen:

$$2k + 2l = 2(k+l).$$

Teda aj jazyk algebry umožňuje dokázať všeobecné tvrdenie. Dokáže však omnoho viac. Hlavná výhoda kosistickej inovácie spočíva v tom, že podmienka zo zadania slovnej úlohy prestáva byť v prirodzenom jazyku sformulovanou **podmienkou, stojacou mimo jazyka aritmetiky**, ktorá umožňuje iba overovať, či som našiel správne riešenie. Vďaka kosistom **dostáva sa priamo do formálneho jazyka** a dá sa ju upravovať podľa potreby. Akonáhle sa podmienky zo zadania úlohy dostanú do jazyka, dajú sa vytvoriť univerzálne metódy na riešenie úloh.

Univerzálne metódy na riešenie problémov predstavovali veľkú prednosť algebry pred geometriou. Euklidovská geometria žiadne univerzálne metódy nepoznala, bola zbierkou konštrukčných trikov, z ktorých každý sa hodil len na veľmi úzku paletu príbuzných problémov. Naproti tomu algebra poskytuje univerzálne postupy, zapísané v tvare vzorcov. Zoberme si vzorec pre riešenie kvadratickej rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Parametre a, b, c dávajú tomuto vzorcu všeobecnosť analogickú tej, ktorú dáva úsečka neurčitej dĺžky v Pytagorovom dôkaze vety, že súčet dvoch párných čísel je číslo párne. Avšak to x na ľavej strane znamená, že výraz na pravej strane ako celok vyjadruje jediné individuum,

a tak vlastne predstavuje zápis postupu jeho výpočtu. Takto sa postup stáva vyjadriteľným vo formálnom jazyku. To umožňuje sformulovať **modálne** predikáty, ako napríklad pojem riešiteľnosti rovníc. V jazyku geometrie nemáme prostriedky, pomocou ktorých by sme mohli vyjadriť alebo dokázať, že nejaká úloha je neriešiteľná. Jazyk algebry to umožňuje. Gaussov dôkaz nekonštruovateľnosti pravidelného sedemuholníka a Galoisov dôkaz neriešiteľnosti rovnice piateho stupňa jasne ukazujú prevahu jazyka algebry.

Oproti geometrickému jazyku, ktorý má samozrejme tiež neznámu vo forme úsečky neurčitej dĺžky, druhú mocninu neznámej v podobe štvorca s neurčitou stranou a tretiu mocninu v podobe kocky s neurčitou hranou, jazyk kosistov umožňuje slobodne tvoriť mocniny vyšších rádov. Ich terminológia je ešte poznačená geometrickými analógiami, keď napríklad tretiu mocninu neznámej označujú ako *cubus*. Nič im však nebráni čisto formálne pokračovať ďalej aj za tretiu mocninu, za ktorú už Euklida nepustil priestor. Druhú mocninu nazývali *zensus* a označovali *z*. Preto pre štvrtú mocninu písali *zz* (*zensus de zensus*), pre piatu *rzz*, pre šiestu *zzz* a tak ďalej. Takto jazyk algebry umožňuje radikálne prekročiť medze, ktoré jazyku geometrie ukladá priestor, a slobodne tvoriť mocniny ľubovoľného stupňa.

4. Analytická geometria. Descartes našiel spôsob, ako ľubovoľnému algebraickému výrazu priradiť **tvár**. Polynóm, tak, ako ho zaviedli kosisti, bol čisto formálnym výrazom, ktorému geometricky nič nezodpovedalo, nemal žiaden tvar. A tu zrazu $x^{17} + 24x^5 - 4x + 2$ sa stáva obyčajnou krivkou. Všetky algebraické pojmy ako koreň, stupeň polynómu, ... dostávajú geometrickú interpretáciu.

Descartov počin pripomína pytagorejskú vizualizáciu počtu, ktorá pomocou psefórie priradí tvar aritmetickým vlastnostiam (napríklad párnosť interpretuje ako dvojrad). Podobne ako pytagorejci vizualizovali aritmetiku, Descartes vizualizoval algebru. V oboch prípadoch ide o vytvorenie nového ikonického jazyka, ktorý umožňuje integrovať základné prvky pôvodného symbolického jazyka.

Descartova vizualizácia algebry umožňuje preniesť univerzálne analytické metódy algebry do geometrie. To je taká významná zmena, že podľa nej dostal nový jazyk aj svoje meno – analytická geometria. Konštrukčná geometria bola ťažká tým, že na konštrukciu každého útvaru si bolo treba pamätať špeciálny postup. V analytickej geometrii sa nekonštruujú geometrické útvary. Individuálne určenia útvaru sa najprv prepíšu do algebraických rovníc, tie sa všeobecnými metódami algebry vyriešia a konštruujú sa iba úsečky, ktorých dĺžka zodpovedá príslušnému riešeniu. Takto napríklad namiesto úlohy skonštruovať pravidelný päťuholník dostaneme nepomerne ľahšiu úlohu zostrojiť úsečku dĺžky $(\sqrt{5} - 1)/2$. Dá sa povedať, že Descartes priniesol do geometrie hlavnú prednosť algebry – existenciu univerzálnych metód.

Analytická geometria predstavuje nový spôsob vytvárania geometrického útvaru. Útvar sa konštruuje bod po bode pomocou jeho súradníc. To je niečo zásadne iné ako u Euklida. Euklides vytváral útvar (term ikonického jazyka geometrie) z úsečiek a oblúkov kružníc. Euklidovská konštrukcia je konštrukciou pomocou kružidla a pravítka. Euklides má teda akési „mechanické“ formy, ktoré celé umiestňuje na papier. Naproti tomu Descartes rozbil každý útvar na body a vynáša ho bod po bode. To mu umožňuje priradiť tvar každému polynómu. Takto Descartes odkryl omnoho bohatší svet, než bol svet Euklidov.

Keď sa pozrieme z hľadiska analytickej geometrie na euklidovskú, možno povedať, že až na niekoľko výnimiek (ako napríklad Archimedova špirála či kvadratrix, ktoré však ani samotní Gréci nepovažovali za geometrické krivky, ale za krivky mechanické, lebo sú definované pomocou pohybu) sa celá euklidovská geometria točí okolo kvadratických kriviek (t.j. kriviek, ktorých rovnice sú dané polynómom druhého stupňa). Úlohy, v ktorých sa objavujú veličiny určené rovnicou tretieho stupňa, ako napríklad úloha trisekcie uhla, duplicity kocky či konštrukcie pravidelného sedemuholníka, predstavovali medzu, ktorú sa euklidovskej geometrii nepodarilo prekročiť. Pre analytickú geometriu tieto úlohy nepredstavujú žiaden problém. Tretie odmocniny sú z analytického hľadiska rovnaké ako všetky ostatné.

Svet analytickej geometrie je teda kvalitatívne bohatším svetom, obsahujúcim neporovnateľne väčšie množstvo objektov ako svet euklidovský. Pritom v rámci analytickej geometrie možno vyčleniť oblasť, ktorá zodpovedá Euklidovmu svetu. Euklidov svet je svetom kriviek druhého stupňa.

5. Matematická analýza. Krátko po Descartovom objave analytickej geometrie sa ukázalo, že jazyk algebry je príliš chudobný na opísanie fenoménov sveta kriviek, ktorý nám odkryl Descartes. Predovšetkým dva problémy, problém dotyčníc, spočívajúci v úlohe nájsť dotyčnicu k danej krivke, a problém kvadratúr, spočívajúci v úlohe určiť obsah plochy ohraničenej krivkou, viedli ku zrodu techník prekračujúcich rámec jazyka algebry.

Tieto techniky nadväzovali na gréckych atomistov a na Archimeda. Boli založené na idei rozdelenia uvažovaného útvaru na nekonečne veľa nekonečne malých častí, ktoré by sa pretransformovali a opäť poskladali, pričom by vznikol útvar, ktorého obsah možno jednoduchšie určiť. Veľké majstrovstvo v týchto infinitezimálnych metódach dosiahli Johannes Kepler, Bonaventura Cavalieri a Evangelista Toricelli. Našli obsah a objem veľkého množstva útvarov. Boli to však viac menej individuálne triky. Pre každý útvar bolo treba nájsť špecifický spôsob rozdelenia, ktorý sa hodil len pre tento útvar. Chýbal jazyk, ktorý by umožňoval sformulovať jednotnú metódu.

Takýto jazyk vytvoril Gottfried Wilhelm Leibniz – je to známy diferenciálny a integrálny počet. Hlavná Leibnizova zásluha spočíva vo vytvorení kalkulu umožňujúceho formálne manipulácie s infinitezimálnymi veličinami. Išlo jednak o integrovanie, čo bolo sčítanie nekonečne veľkého počtu nekonečne malých veličín, a potom o derivovanie, čo bolo delenie dvoch nekonečne malých veličín.

Diferenciálny a integrálny počet predstavuje podobne ako algebra alebo elementárna aritmetika kalkul, t.j. formálnu techniku manipulácie so znakmi, umožňujúcu dať pomerne rýchlo a elegantne odpoveď na mnohé otázky, ktoré sa prirodzene vynárajú vo svete kriviek, odkrytom Descartom. Mnohé geometrické vlastnosti kriviek, ako napr. ich dĺžka, zakrivenie, alebo obsah plochy nimi ohraničený, možno veľmi elegantne a kompaktné vyjadriť prostriedkami diferenciálneho a integrálneho počtu. Naproti tomu jazyk algebry na ne ani zďaleka nepostačuje.

Logickú silu jazyka analytickej geometrie možno charakterizovať pojmom metódy, t.j. jednotného postupu umožňujúceho geometrickú úlohu preložiť do jazyka algebry a takto vzniknutú sústavu rovníc riešiť.

Naproti tomu jazyk matematickej analýzy, ako ukázal Cauchy, sa zakladá na limitnom prechode. Limitný prechod je logický objekt, ktorý navrhujem nazvať schéma. Limitný prechod nie je čistou metódou, ale schémou zjednocujúcou nesmiernu množstvo metód. Akoby pre každý objekt (integrál, derivácia, rad,...) existovala špecifická geometrická metóda delenia na indivisibília. A to, čo majú všetky tieto metódy spoločné, to je schéma limitného prechodu.

Leibnizom objavený jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu je opäť rozšírením jazyka algebry. Keď v nekonečnom rade pripustím len konečne veľa nenulových členov, dostanem z radu polynóm. Vo svete polynómov je derivovanie a integrovanie definované pomocou jednoduchých explicitných vzťahov, ktoré možno považovať za algebraické. Preto jazyk algebry možno vyčleniť ako určitú podoblasť jazyka matematickej analýzy.

6. Iteratívna geometria. Aj keď sa diferenciálny a integrálny počet pôvodne zrodil v tesnej blízkosti analytickej geometrie a matematici dlho považovali Descartov spôsob generovania tvaru (t.j. generovanie útvaru bod po bode pomocou formule) za adekvátnu vizualizáciu sveta matematickej analýzy, ukázalo sa, že to tak nie je.

Prvý, kto si to jasne uvedomil, bol Bernard Bolzano, ktorý našiel prvý príklad funkcie, ktorá nemá v žiadnom bode deriváciu. Spočiatku sa takéto krivky považovali za „patologické prípady“. Matematici sa naďalej držali sveta analytických kriviek v presvedčení, že metóda generovania krivky bod po bode predstavuje adekvátnu metódu, ktorá je až na niekoľko výnimiek v súzvuku s duchom matematickej analýzy.

Koncom 19. storočia sa však s „patologickými funkciami“ akoby roztrhlo vrece. Každý významnejší matematik prišiel s nejakou zvláštnosťou. Snáď najzarážajúcejšia je Peanova krivka, ktorá úplne vyplní jednotkový štvorec. Keď už bolo týchto kriviek veľa, konštituovala sa samostatná matematická disciplína – teória funkcií reálnej premennej – na ich štúdium. Väčšina patologických príkladov má spoločné práve to, že nie sú generované tak ako Descartove krivky, bod po bode, ale generujú sa pomocou nekonečného počtu postupných iterácií. Oblasť iteratívnej geometrie zažila veľké oživenie v nedávnej dobe vďaka počítačom, ktoré umožňujú tieto iteratívne procesy implementovať, takže na obrazovke sa objavujú prekrásne útvary známe pod názvom fraktály.

Chcieť zadať nejaký fraktál pomocou formule, t.j. chcieť ho vygenerovať Descartovou metódou, je beznádejné. Netreba veľkú fantáziu, aby sme si uvedomili, že svet iteratívne generovaných útvarov je kvalitatívne bohatší než Descartov svet. Pritom svet analytickej geometrie možno v tomto svete vyčleniť ako oblasť, ktorú dostaneme, keď budeme pri iteratívnom procese vyžadovať rovnomernú konvergenciu funkcie spolu s dostatočným počtom derivácií. Preto Descartov svet analytických kriviek je „hladkou časťou“ sveta iteratívnej geometrie.

Keď Benoit Mandelbrot vo svojej knihe *Fraktálna geometria prírody* [8] upozornil na skutočnosť, že aj mnohé prírodné útvary, ako napríklad oblak či pobrežie, sa v mnohom podobajú fraktálom, a keď sa vyjasnilo, že fraktály hrajú dôležitú úlohu pri opise turbulencie, prestala sa iteratívna geometria považovať za rozmar matematikov. Začala sa rešpektovať ako samostatný svet tvarov. Popri Euklidovom svete syntetickej geometrie, ktorá svoje útvary konštruuje pomocou kružidla a pravítka, a popri Descartovom svete analytickej geometrie, ktorej útvary sú generované bod po bode pomocou analytického výrazu, predstavuje svet ite-

ratívnej geometrie tretí typ jazyka umožňujúceho hovoriť o tvare. Termami tohto jazyka sú fraktály.

7. Pojmové písmo. Keď objav sveta iteratívnej geometrie spochybnil dôveru k intuícii a keď objav neeuklidovskej geometrie ukázal, že svet matematiky je podstatne bohatší než to, čo je prístupné názoru, vznikla potreba oslobodiť matematické úvahy z ich zajatia v názore. Tomuto účelu slúži pojmové písmo – zatiaľ posledný symbolický jazyk – vytvorené Gottlobom Fregem. Kým aritmetika manipuluje s číslami, algebra napodobňuje pravidlá vecí (regula dela cosa) a analýza manipuluje s nekonečne malými veličinami, Frege vytvára kalkulu umožňujúcu formálne rekonštruovať narábanie s pojmami.

Vzhľadom na to, že ide o posledný jazyk založený na formálnej manipulácii so symbolmi, jeho logickú či expresívnu silu nemôžeme charakterizovať. Nemáme totiž k dispozícii žiadny silnejší symbolický jazyk, voči ktorému by sme pojmové písmo vymedzili. Môžeme len povedať, že z hľadiska súčasného stavu matematiky je expresívna a logická sila tohto symbolického jazyka totálna, t.j. predstavuje prostriedok, v ktorom súčasná matematika formuluje všetky svoje teórie. Všetky ostatné symbolické jazyky, ako napríklad elementárna aritmetika, algebra a analýza, sú časťami tohto jazyka. Práve toto zabudovanie všetkých jazykov do predikátového počtu umožnilo porovnať ich logickú a expresívnu silu.

Vývin symbolického jazyka od elementárnej aritmetiky cez algebru a analýzu až k predikátovému počtu, ktorý sme opísali v tomto paragrafe, možno chápať ako rozpracovanie myšlienky uvedenej v záverečnej časti Fregeho state *Funktion und Begriff* [3], kde Frege píše: „Keď sa teraz pozrieme späť na vývin aritmetiky, môžeme postrehnúť postupný vývin. Najprv sa počítalo s jednotlivými číslami 1-ťou, 3-kou atď.. Príslušné tvrdenia

$$2 + 3 = 5$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

Potom sa prešlo ku všeobecnejším tvrdeniam, ktoré platia pre každé číslo. Z hľadiska označovania tomu zodpovedá prechod na písmenové počítanie. Napríklad

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

je tvrdením tohto druhu. Tým sa dospelo ku skúmaniu jednotlivých funkcií, avšak ešte bez toho, že by sa v matematickom zmysle použilo toto slovo a že by sa chápal jeho význam. Ďalším vyšším stupňom je spoznanie všeobecných zákonov týkajúcich sa funkcií, a tým vznik umelého termínu „funkcia“. Pokiaľ ide o označenie, tu tomu zodpovedalo zavedenie písmen neurčito ukazujúcich na funkcie ako f , F . Príslušné tvrdenia

$$\frac{d F(x) \cdot f(x)}{dx} = F(x) \cdot \frac{d f(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{d F(x)}{dx}.$$

Tu už figurujú jednotlivé funkcie druhého rádu, avšak bez toho, že by uchopili to, čo my nazývame funkciou druhého rádu. Ak tak urobíme, spravíme ďalší krok vpred. “

Náš výklad sa od Fregeho výkladu odlišuje v dvoch aspektoch. Jednak terminologicky, keď algebru či analýzu nezahŕňame pod pojem aritmetiky, ale chápeme ich ako samostatné jazyky. Dôležitejší rozdiel je však v tom, že sme ukázali, ako v tomto vývine, opísanom Fregem, spolupôsobil geometrický názor.

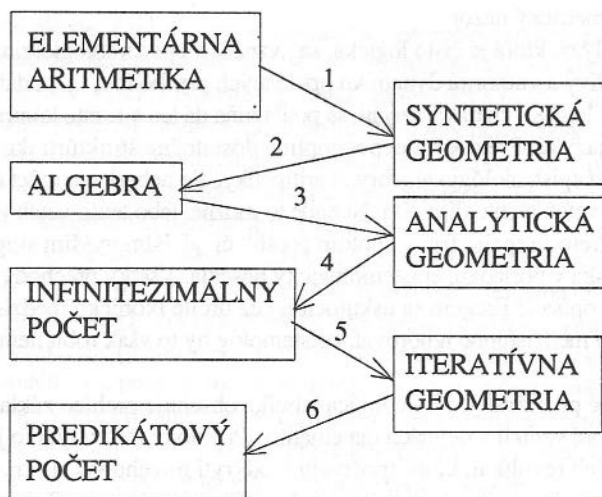
Fregeho analýza, ktorá je čisto logická, sa „vznáša v epistemologickom vzduchoprázdne“. Pochopiť motívy a vnútornú dynamiku príslušných prechodov, t.j. podať ich epistemologickú, nielen čisto logickú charakterizáciu, sa podľa mňa dá len v tomto kontraste symbolického a ikonického jazyka. Preto kým nepochopíme dostatočne štruktúru ikonického jazyka, budeme môcť písať epistemológiu algebry či aritmetiky, ale nebudeme môcť epistemologicky vyložiť vzájomný vzťah týchto disciplín. Nebude to možné, lebo tento vzťah je sprostredkovaný geometriou. Preto Fregeho frázy „potom prešli“ či „ďalším vyšším stupňom“, ktoré sú z logického hľadiska v poriadku, epistemologicky nesedia. Všetky prechody vo vývine symbolického jazyka opísané Fregem sa uskutočnili cez určité ikonické medzistupne. Logik si môže dovoliť tieto medzistupne ignorovať, epistemológ by to však robiť nemal.

8. Záverečné poznámky. Nasledujúca tabuľka obsahuje prehľad základných siedmich typov jazykov, ktoré vznikli v dejinách matematiky. Prechody medzi týmito jazykmi predstavujú šesť vedeckých revolúcií, ktoré spočívajú v odkrytí nového sveta. Tri z nich (1, 3 a 5) predstavujú konštrukciu nového ikonického jazyka, kým zvyšné tri prinášajú nový symbolický jazyk.

Uvedených šesť revolúcií označujem termínom re-representácia, lebo v ich priebehu sa otvára nový región, ktorý sa potom stáva natrvalo prítomným vo svete matematiky. Aby bolo jasné, čo mám na mysli, stačí si predstaviť vedľa seba kružnicu, ako reprezentanta Euklidom odkrytého sveta, graf nejakého polynómu, ako reprezentanta Descartom odkrytého sveta, a nejaký fraktál, ako predstaviteľa Bolzanovho sveta. Podobne si môžeme zvoliť typických reprezentantov pre symbolické jazyky, napríklad pre tie, ktoré uvádza Frege. Keď si za každým názvom nasledovnej tabuľky predstavíme takýto typický objekt, vynikne zvláštna polarita vývinu matematiky.

LITERATÚRA

- [1] COURANT R., ROBBINS H. (1941): What's mathematics? New York, Oxford University Press 1978.
- [2] FREGE, G. (1879): Begriffsschrift. Hildesheim, Georg Olms Verlag 1993.
- [3] FREGE, G. (1891): Funktion und Begriff. In: Frege, G.: Funktion, Begriff, Bedeutung. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht 1989, s. 17-39.
- [4] HEIDEGGER, M. (1927): Grundprobleme der Phänomenologie. Frankfurt am Main, Vittorio Klostermann 1975.
- [5] KOLMAN, A. (1961): Dějiny matematiky ve starověku. Praha, Academie 1968.
- [6] KVASZ, L. (1993): K pojmu epistemického rámca vedeckej teórie. In: Filozofia 1993, č. 7.
- [7] KVASZ, L. (1995): O pôvode ideálnych objektov vo vede. In: Filozofia 1995, č. 1.
- [8] MANDELBROT, B. (1977): Die fraktale Geometrie der Natur. Basel, Birkhäuser Verlag 1991.



RNDr. Ladislav Kvasz
Katedra humanistiky MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava
SR