

INTUÍCIA A ČÍSLO¹

CHARLES PARSONS, Harvardova univerzita, Cambridge, USA

Ako sú nám dané prirodzené čísla? Ako vieme, že takéto objekty existujú? Donedávna prevládali dve odpovede na tieto otázky, jedna taká, že nám nie sú dané (ani len nepriamo) a že nevieme, že existujú čísla, pretože takúto hypotézu nepotrebujeme ([3]; [4]), a druhá, že tieto otázky vôbec nemajú zmysel (napríklad [22]). Ani jedna z týchto odpovedí ma neuspokojuje. Prvá preto, že sa v nej popiera to, čo sa mi zdá samozrejmé, totiž že matematici i my ostatní vyslovujeme *pravdivé* výroky, ktoré referujú na čísla. Ťažšie je odpovedať na otázku, prečo ma nepresvedča druhá odpoveď; pre začiatok by sa dalo povedať, že by mala byť zdôvodnená nejakou teóriou týkajúcou sa buď čísel ako objektov, alebo číselných výrazov ako takých, ktoré iba zdanlivo referujú na objekty; no potom vzniká otázka, či sa skutočne líši od iných odpovedí, takých, akou je prvá. Nie je však mojím cieľom obhajovať moje odmietnutie týchto negatívnych odpovedí, ale skôr preskúmať jeden pozitívnejší prístup.

I. Prístup, o ktorom chcem uvažovať, sa bude zdať na prvý pohľad dosť primitívny. Tvrdí zhruba to, že prirodzené čísla sú nám dané v intuícii. To by bola teda jeho odpoveď na našu prvú otázku. Vzhľadom na to sa odpoveď na druhú otázku zdá byť triviálna. Ak je dané v intuícii aspoň jedno prirodzené číslo, tak „pomocou intuície“ a triviálneho logického kroku vieme, že existujú prirodzené čísla.

Táto idea by viedla k mnohým otázkam, z ktorých tu spomeniem len jednu: v jednom ohľade nie je krok od danosti čísel k poznaniu ich existencie taký úplne triviálny, ako vyzerá. Danosť čísel sa týka intuície objektov. Podľa interpretácie, ktorú chcem zdôrazniť, hoci nie je jediná možná, existujú prípady intuície, ktorých objektami sú prirodzené čísla. Prirodzené čísla sú objektami intuície práve tak, ako sú makroskopické pozemské telesá objektami vnímania. Predpokladajme, že v nejakom konkrétnom prípade má nejaká osoba A intuíciu čísla 7. (Ak to znie hlúpo, majte so mnou trpezlivosť.) Táto intuícia musí mať potom taký charakter, že aspoň v typických prípadoch z toho vyplýva, že A vie, že 7 existuje. Zhruba povedané, intuícia nejakého objektu v sebe obsahuje intuitívne poznanie tohto objektu. Zdá sa, že naša idea nás privádza k pojmu intuície objektov i k pojmu intuitívneho poznania.

Ako som zdôraznil vo svojich predchádzajúcich prácach o intuícii (najmä [16], ale aj [18]), v prípade tohto pojmu musíme mať na pamäti základné rozlíšenie medzi intuíciou objektov a intuíciou (zrejmych) právd. Pri prvom použití by sloveso „intuitívne poznať“ malo bežný priamy predmet, ale nie je vylúčené, že by mohol byť intencionálny (a teda intuícia by bola tým, čo sa nazýva „referenčným postojom“). V druhom prípade je intuícia propozičným

¹ Staršie verzie tohto článku som predniesol na Brandeis University a Manhattanville College. Chcem poďakovať Palle Yourgrauovi a Billy Joe Lacasovi aj za ich pohostinnosť, aj za ich pripomienky, ktoré prospeli verzii prednesenej na Amherste. Moja najväčšia vďaka patrí môjmu komentátorovi na Amherste, Thomasovi Tymoczkoovi, ktorého pripomienky viedli k takmer všetkým opravám pri príprave tohto článku do tlače.

* V origináli „intuit“ – pozn. prekl.

postojom. Toto je v súčasnom používaní prinajmenšom to bežnejšie použitie. Hoci sloveso „intuitívne poznať“ sa obvykle nepoužíva v spojení s vedľajšími vetami začínajúcimi slovom „že“, podstatné meno „intuícia“ áno. Keď lingvista hovorí o intuíciiach človeka hovoriaceho rodnou rečou alebo keď sa filozof odvoláva na svoje vlastné intuície týkajúce sa istej veci, obsah je propozíčný, napríklad v prvom prípade ten, že určitá veta je, alebo nie je gramaticky správna. Intuície v týchto dvoch „gramatikách“ som nazval „intuíciami niečoho“ a „intuíciami, že“.² Obidve sa v dejinách filozofie vyskytujú. Kantova *Anschauung* je v prvom rade „intuíciami niečoho“. *Intuitio* Descartových *Pravidiel* je „intuíciami, že“.

Aby bola takáto koncepcia koncepciou intuície, mala by byť podľa mňa do značnej miery analogická s vnímaním. V prípade intuícii človeka hovoriaceho rodnou rečou to platí v menšej miere ako v príkladoch z dejín. V mnohých prípadoch intuícii filozofov je táto analógia ešte slabšia, pretože sú veľmi často nepresné a zaťažené teóriami. (Nechcem tým povedať, že bežné vnímanie alebo iné jasné prípady intuície také nie sú, ale iba to, že miera ich nepresnosti a zaťaženosti by mala byť menšia.) O jasnejšom prípade intuície v zmysle, ktorý ma zaujíma, hovoril vo svojich poznámkach Kurt Gödel. O matematickej intuícii jednoznačne hovorí ako o „niečom podobnom, ako je vnímanie objektov teórie množín“ ([5], 268). To by bola „intuícia niečoho“ a Gödel je tak, ako sa dá ľahko zistiť, jasným prípadom filozofa, ktorý sa hlási k intuícii matematických objektov. Jednako však tvrdím (a naznačil som to aj inde [20]), že základnejším poňatím intuície u Gödela je „intuícia, že“. Dokonca aj „vnímanie objektov teórie množín“ má bližšie k poznaniu propozícií, ako sa zdá na prvý pohľad, pretože podľa Gödela medzi tieto objekty patria *pojmy*.

Vo svojej práci [15], kde som skúmal všeobecné problémy pojmu intuície, som predložil a obhajoval takú koncepciu intuície, ktorá by vo svojej najpriateľnejšej podobe bola intuíciami matematických objektov. Mala byť v súlade s kantovskou ideou o vyjadrení formy, ktorá je spredmetnená v zmyslovom vnímaní. Ale historický model, ku ktorému má najbližšie, treba hľadať v Hilbertových a Bernaysových explanáciách intuitívnej bázy Hilbertovej metamatematiky (a finitistickej matematiky všeobecne). V tomto prípade sú objektami intuície výrazy formálneho jazyka. Mojou ideou bolo, že tá istá analýza by sa mala aplikovať na výrazy prirodzených jazykov, hoci práve vzhľadom na ich „prirodzený“ charakter by možno bolo lepšie hovoriť v tomto prípade o vnímaní.² Inými, do istej miery podobnými prípadmi sú zmyslové kvality a geometrické obrazce.

Všetky tieto prípady sa líšia od prípadu prirodzených čísel v jednom veľmi dôležitom ohľade. Takéto objekty nazývam kvázikonkrétne; ich povahu určuje nejaké spredmetnenie alebo „reprezentácia“ v konkrétnom. Prirodzené čísla, podobne ako ďalšie dôležité matematické objekty, ako napr. čisté množiny, sú nielen ne-kvázikonkrétne. Nazvali ich *čistými* abstraktnými objektami.³ Čisté abstraktné objekty nemajú žiadnu skutočnú konkrétnu repre-

² V origináli „intuition of“ a „intuition that“ - pozn. prekl.

² Existujú však dve stránky vzťahu intuície a vnímania, ktoré by sa mali rozlišovať. Ak počujem, čo niekto iný povedal, uvedomujem si (povedzme) vetu, teda niečo abstraktné (vetu ako typ). (Ponechávam bokom úvahy o tom, či by som si mohol uvedomovať aj niečo iné, povedzme propozíciu. Zrejme by to viedlo k ďalším problémom.) Takisto však v bežnom prípade vnímaním fyzikálny zvuk a spoznávam, že hovoriaci vyslovil danú vetu. Teda jedným z dôvodov hovorenia o vnímaní by bolo, že celý tento akt obsahuje poznanie aktuálnej udalosti, a nielen abstraktných objektov a ich vzťahov. Intuícia tej istej vety založená na predstave by nemala tento charakter a bolo by pravdepodobne chybou nazývať ju vnímaním.

³ ([2], 503; pozri aj moju prácu *Mathematics in Philosophy* ([17], 19). Dummettovo vysvetlenie významu, ktorý udeľuje tomuto termínu, sa opiera o Fregeho idey; jeho význam sa pritom odlišuje od môjho. Myslím si však, že máme na zreteli takmer tie isté objekty, a domnievam sa, že to isté platí aj pre použitie výrazu „čisté abstraktné objekty“ u iných autorov.

zentáciu a necharakterizujú ich podmienky, ktoré ich dávajú do vzťahu s konkrétnymi objektami určitého druhu, ale podmienky vysoko abstraktnej povahy, ktoré zahrnujú objekty vo všeobecnosti. Vzťahujú sa tak k objektom úplne všeobecne. Neexistuje tu žiadne obmedzenie, pokiaľ ide o objekty, ktoré možno „počítať“ (pomocou ordinálnych alebo kardinálnych čísel), ak len nemáme takéto obmedzenie hľadať práve v pojme samotného objektu. Ďalšími príkladmi čistých abstraktných objektov sú čísla iných systémov čísel a čisté množiny. Všimnime si, že ľubovoľné objekty (alebo takmer ľubovoľné objekty⁴) môžu byť prvkami nejakej množiny alebo z nich možno vytvoriť množiny vyššieho rangu.

Fakt, že prirodzené čísla sú čistými abstraktnými objektami, je neodmysliteľný od všeobecnosti ich aplikácie, čo zdôraznil Frege vo svojich polemických argumentoch a čo je teda známe prinajmenšom z tohto prameňa. Medzi tvrdením, že čísla sú čisté abstraktné objekty, a tvrdením, že čísla sa dajú aplikovať úplne všeobecne (v tom zmysle, že ľubovoľné objekty sa dajú počítať) je však jemný rozdiel. Nie je jasné, či toto druhé tvrdenie kladie na čísla nejaké iné obmedzenie ako to, že sú spredmetnením štruktúry nejakej ω -postupnosti. Všeobecnosť aplikácie prirodzených čísel sa zhruba rovná tomu, že o ľubovoľnom čísle n a ľubovoľnom predikáte „ F “ má zmysel povedať, že existuje n F , alebo povedať o nejakom konkrétnom F , že je n -tý v nejakom usporiadaní. Z dobre známych dôvodov však na to, aby boli výroky týchto foriem zmysluplné a dodržiavali bežné pravidlá, stačí, aby prirodzené čísla tvorili nejakú ω -postupnosť; navyše, mohli by byť dokonca kvázikonkrétnymi, či dokonca konkrétnymi objektami.

Chcel by som ukázať, že tieto dve úzko súvisiace idey o číslach, totiž že sa aplikujú na objekty všeobecne a že sú čistými abstraktnými objektami, sú nezlučiteľné s existenciou intuície prirodzených čísel v už spomenutom všeobecnom kantovskom zmysle. Diskusia sa sotva bude dotýkať otázky, či existuje nejaká podstatne odlišná koncepcia intuície, ktorá by poskytla odlišnú odpoveď. Pretože idea intuície prirodzených čísel má len málo stúpcov,⁵ môžete sa pýtať, načo je to všetko dobré. Jedným z dôvodov je, že takýto postup poskytuje argument proti intuícii prirodzených čísel (ktorý sa zrejme dá zovšeobecniť na väčšinu iných čistých abstraktných matematických objektov), ktorý je nezávislý od odmietnutia matematickej intuície vo všeobecnosti. Druhý je ten, že ukazuje na obmedzenia koncepcie intuície, ktorú som obhajoval vo svojich predchádzajúcich prácach. Koncepcia poznania čísel, ktorá skutočne zodpovedá tejto koncepcii, obsahuje aj prvky tradičného intuicionizmu, aj štrukturalizmu.

Cieľom, ktorému, dúfam, táto diskusia posluží a ktorý je viacmenej nezávislý od problémov týkajúcich sa intuície, je však objasnenie vzťahu medzi povahou čísel ako čistých abstraktných objektov a ich formálnou všeobecnosťou aplikácie. Chcem dokázať, že nejde

⁴ Vzniká, samozrejme, problém so samotnými triedami, o ktorých by sa však mohlo tvrdiť, že nie sú objektami.

⁵ Medzi veľkými filozofmi posledných sto rokov je Husserl jediný, o ktorom viem, že ju jednoznačne zastáva. Husserlova obhajoba sa navyše nachádza v jeho ranej práci *Philosophie der Arithmetik* (1891), takže prirodzene vzniká otázka, do akej miery je zlučiteľná s jeho neskoršou filozofiou. Hoci neskôr budem o Husserlovi hovoriť obšírnejšie, nemyslím, že by bolo treba jeho analýzu zaoberať podrobne. Gödelove názory na matematickú intuíciu ho vo všeobecnosti mohli priviesť k intuícii čísel, ale v skutočnosti sa k tomuto problému nevyjadruje.

V predhovore k [1] pripisuje editor môjmu článku v tomto zväzku názor, že „konštruktivizmus požaduje, aby sa čísla dali intuitívne poznať“ (s.XI). To je chybná interpretácia. III. časť mojej práce [13] však bola koncipovaná s cieľom zdôvodniť tvrdenie, že aspoň v určitom zmysle sa čísla dajú intuitívne poznať. Z nasledujúcich úvah by malo byť jasné, prečo si už nemyslím, že by mohla dosiahnuť svoj cieľ; pozri najmä poznámku 26.

Intuíciu čísel obhajuje Tieszen [23]. Jeho primárnym vzorom je Husserlova koncepcia intuície, a preto nie je jasné, do akej miery je jeho názor priamo ovplyvnený argumentáciou tohto môjho článku.

jednoducho len o to, že prirodzené čísla nie sú objektami intuície. Podľa pomerne rozšírenej filozofickej intuície o prirodzených číslach sú prirodzené čísla celkom elementárne a transparentné; na vytvorenie základov matematiky sa dá objasniť a ozrejmiť dostatočné množstvo ich vlastností – tak ako pri iných abstraktných entitách. Vysvetľovalo sa to na základe myšlienky, že aspoň určitú časť elementárnej algebry, hlavne jej finitistickú časť, môžeme *intuitívne ozrejmiť*. Aritmetika určite nedosahuje intuitívnu zrejmosť, okrem iného preto, že taký nie je ani všeobecný princíp matematickej indukcie, pretože je vyššieho rádu. Okrem toho dnes vývoj aritmetiky prekračuje oblasť intuitívne zrejmej pravdepodobne hneď, akonáhle niekto rozvíja argumentáciu, ktorá sa nedá formalizovať v primitívnej rekurzívnej aritmetike (PRA). Tieto úvahy však nedokazujú, že prirodzené čísla nie sú *objektami*, ktoré sú intuitívne dané. Dá sa diskutovať o tom, kedy vstupujú do matematiky v podstate neintuitívne objekty. Ale ak uznávame, že v istom okamihu sem vstupujú, potom sa vo výrokoch o kardinalite a ordinalite, týkajúcich sa týchto objektov, budú, samozrejme, používať aj malé čísla. Je jasné, že takéto výroky nebudú intuitívne zrejme.⁶ Ak sú prirodzené čísla objektami intuície, ako sa to týka ich aplikácie v takýchto kontextoch, a teda všeobecnosti ich aplikácie?

II. Hilbertov a Bernaysov opis intuitívnej aritmetiky sa vzťahuje na určitú postupnosť výrazov

1, 11, 111, 1111, ...⁷

Ak pripustíme, že tieto sú objektami intuície, potom dostaneme interpretáciu (aspoň finitistickej) aritmetiky, podľa ktorej sú čísla objektami intuície.

Opis uvedených reťazcov (alebo čísel) ako „objektov intuície“ prehliada vážny problém, ktorý tu iba spomeniem, ale nebudem sa mu venovať. Tvrdenie, že objekty z určitého oboru sú objektami intuície, by sme mohli chápať tak, že každý takýto objekt *môžeme* intuitívne poznať. Prakticky sa však dostatočne dlhé reťazce nedajú individuálne uchopiť; nebolo by ťažké opísať taký, ktorého zapísanie by si vyžadovalo stovky rokov, ani taký, že by žiadny človek nedokázal počas svojho života prejsť postupne všetkými jeho zložkami. Odpoveďou by mohlo byť, že „môže“ sa tu chápe abstraktnejšie; reťazec môžeme v zásade poznať intuitívne. Možno že lepšie by bolo povedať, že nie je nutné, aby sme mohli intuitívne poznať každý reťazec; keď hovoríme, že fyzikálne telesá sú objektami vnímania, nemusíme preto tvrdiť, že každé takéto teleso môžeme vnímať. Keď som tvrdil, že čísla sú objektami intuície, mal som na mysli to, že vo väčšine priaznivých prípadov by malo byť možné poznať čísla intuitívne a že by mala existovať nejaká netriviálna časť intuitívneho poznania čísel.⁸

Pred každou filozofickou či logickou explanačiou prirodzených čísel stojí dobre známy problém. Každá takéto explanačia sa zdá byť svojvoľná. Nie je jasné, že by sme mali nejaké dané vysvetlenie vo všeobecnosti uprednostniť pred iným vysvetlením s izomorfnou štruktú-

⁶ Podľa tohto názoru na intuitívnu zrejmosť sa pravdy, ktoré nie sú intuitívne zrejme, dajú vlastne formulovať bez referencie na takéto objekty. Ak kvôli argumentácii predpokladáme, že PRA je hranicou intuitívnej zrejmej aritmetiky, potom by pomerne triviálnym príkladom bol výraz „existuje 0 dôkazov kontradikcie v PRA“.

⁷ Hilbert a Bernays hovoria explicitne, že tieto reťazce symbolov (*Ziffern*) sú z ich finitného hľadiska *objektami* teórie čísel ([9], 21); pozri tiež ([8], 171; preklad s. 376-7).

⁸ Pozri ([18], 222-7). Voči koncepcii intuície, ktorou sa tu zaoberám, by sa mohlo namietat, že sa opiera o príliš hrubé zjednodušenie koncepcie vzťahu medzi konkrétnym znakom [token] a typom v existujúcich formách symbolizmu. Takúto námietku obsahuje komentár profesora Tymoczka a podobne namietala Linda Wetzel počas nášho rozhovoru. (Pozri jej prácu [24].) Je to závažná otázka dotýkajúca sa životaschopnosti a záujmov tejto koncepcie a chcem sa ňou zaoberať na inom mieste. Môj článok sa k takto chápanej intuícii stavia záporne, a preto si nemyslím, že táto námietka by mala nejaký vplyv na pravdivosť jeho tvrdení. Nereagujem však na námietku, podľa ktorej moja analýza dokazuje, že čísla nie sú objekty intuície, ktorá tak či tak neexistuje.

rou.⁹ Veľmi známym príkladom sú rozdielne reprezentácie čísel pomocou množín, pričom štandardnými sú príklady Zermela a von Neumanna:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$$

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \dots$$

Tak isto by sme mohli uvažovať, keby sa niekto pokúsil zastávať názor, že konkrétna postupnosť výrazov, ktoré používajú Hilbert a Bernays, predstavuje práve *tieto* prirodzené čísla alebo že prirodzené čísla sú reťazce vyššie uvedenej postupnosti. Tie však nie sú o nič lepšie ako to, čo sa používa v logistických konštrukciách alebo v konštrukciách teórie množín.¹⁰

Často navrhovaným prirodzeným prostriedkom riešenia tohto problému je „štrukturalistický“ názor. Čísla sú, ako hovorí Quine, „známe iba prostredníctvom ich zákonov, zákonov aritmetiky.“¹¹ Trochu presnejšie je tvrdenie, že čísla sú *určené* iba svojimi zákonmi. Všetko pravdivé o prirodzených číslach je obsiahnuté v ich opise alebo vyplýva z ich opisu ako štruktúry: je tu počiatkový prvok a operácia nasledovníka, ktorá spĺňa základné Peanove axiomy a princíp indukcie (nech už je formulovaný akokoľvek).¹²

Formulácia štrukturalistického názoru predstavuje isté problémy a možno ju rozvíjať rôznymi spôsobmi, z ktorých niektoré sa podujali eliminovať referenciu na čísla (pozri [19]). Ale bez ohľadu na jej rozpracovanie, čísla tu nie sú objektami intuície v tom zmysle, ktorý nás zaujíma, a to z jednoduchého dôvodu, že podmienku byť štruktúrou môže spĺňať aj obor, do ktorého nepatria objekty intuície (pravda, za predpokladu, že takéto objekty existujú). Podľa štrukturalistického názoru je prirodzené považovať za predpoklad hovorenia o prirodzených číslach, že to, o čom hovoríme, v istom ohľade môže byť štruktúrou. Týmto by podľa tohto názoru mohla intuícia nadobudnúť rozhodujúce postavenie, pretože intuitívny model by bol príkladom tejto štruktúry (pozri [15], 163; [19], 336). Takáto intuícia však nemusí byť intuíciou čísel a v štandardných verziách tohto názoru ňou ani nie je. Táto údajne možná štruktúra je fyzikálna, mentálna alebo intuitívne-geometrická takým spôsobom, akým podľa tohto štrukturalistického názoru čísla nie sú.

Malo by byť jasné, že sama existencia modelov aritmetiky pozostávajúcej z objektov, ktoré nie sú objektami intuície, nevedie k záveru, že čísla nie sú objektami intuície, ale že vedie k nemu iba v kombinácii so štrukturalistickým názorom. Ak zoberieme ľubovoľný obor

⁹ Kvalifikovať niečo „vo všeobecnosti“ má určitý význam, pretože v konkrétnych kontextoch by sme mohli mať veľmi dobré dôvody uprednostniť jednotlivé. Von Neumanova reprezentácia má vlastne tú veľkú výhodu, že je súčasťou veľmi elegantnej a prirodzenej reprezentácie *ordindlov*; v štandardnej teórii množín je to dost' rozhodujúcim dôvodom v jej prospech. V iných kontextoch sa však používajú iné reprezentácie alebo sa čísla ponechajú ako primitívne.

¹⁰ Skutočne, Hilbert a Bernays poznamenávajú toto:

„V teórii čísel máme počiatkový objekt aj proces pokračovania. Obidvoje musí byť určitým spôsobom intuitívne fixované. Konkrétny spôsob fixovania nie je podstatný, ale akonáhle sme si ho zvolili, musí platiť pre celú teóriu. My si volíme ako počiatkovú číslu 1 a pridávanie jednotky ako proces pokračovania“ ([9], 20-21; preklad autor).

Dalo by sa to chápať ako tvrdenie, že postupnosť reťazcov jedničiek je intuitívnym *modelom* aritmetiky, samozrejme, jedným z mnohých možných. Potom by vznikla otázka, aký význam má pojem modelu v konceptuálnom rámci ich metamatematiky.

¹¹ ([21], 44). Na tom istom mieste vyjadruje obdobný názor na výrazy a množiny.

¹² Tento výrok nie je celkom presný, pretože medzi pravdami, o ktorých možno rozumne povedať, že sa vzťahujú na prirodzené čísla, sú také, ktoré zahŕňajú vzťahy k objektom iných druhov - ako napr. že 9 je počet planét (slnečnej sústavy). Takéto výroky však od čísel nepožadujú viac ako to, aby tvorili Ω -postupnosť (pozri ([17], 189-190 alebo [19], 309).

objektov s určitou štruktúrou za podmienky, že je určená dostatočne presne, aby malo zmysel hovoriť o štruktúrach, ktoré sú s ňou izomorfne, tak predpoklad (bežný pre hilbertovskú koncepciu intuície), že množiny dostatočne vysokého rádu nie sú objektami intuície, implikuje existenciu neintuitívnych modelov tejto štruktúry. Pretože určite existuje jedno-jednoznačné zobrazenie našich objektov, ktorých obor hodnôt tvoria množiny vyššieho rádu, ktoré indukuje izomorfizmus so štruktúrou, ktorej obor premennej je oborom hodnôt tohto zobrazenia. Nikto by neusudzoval, že tento fakt je sám osebe dostatočným dôkazom toho, že pôvodné objekty nie sú objektami intuície.¹³

Doteraz som predpokladal, že existujú obory premenných, ktoré nie sú objektami intuície v príslušnom zmysle. V prípade hilbertovskej koncepcie intuície a ďalších možných kantovských koncepcií to považujem za zrejme, keďže niektoré druhy objektov (konkrétne množín) nás vedú ku štruktúram, ktoré sú príliš bohaté na to, aby boli spredmetnené v priestore a čase. Ďalšie príklady objektov, ktoré sa nedajú intuitívne poznať, sa sami natískajú: ďalšie druhy čistých abstraktných objektov, transcendentné objekty, ako napr. Boh a iné objekty, o ktorých sa uvažuje v teológii, a teoretické objekty vo vede. Hoci sú lákavé, nechcem sa na žiaden z nich odvolávať: na čisté abstraktné objekty preto, že to, že nie sú objektami intuície, by malo byť výsledkom argumentácie, ktorá zrejme úzko súvisí s argumentáciou týkajúcou sa prirodzených čísel; na transcendentné objekty preto, že by sme sa nezhodli v otázke ich existencie, a na teoretické objekty preto, že ak sú časopriestorové, potom prinajmenšom nie je samozrejmé, že by sa o nich nemalo uvažovať ako o objektoch intuície, hoci je prakticky nemožné ich vnímať.

Je možné, že táto úvaha platí skôr všeobecne, a nie iba pre špecifickú koncepciu intuície, ktorou sa tu zaoberám. Vzhľadom na absenciu jasne formulovaných výrokov iných koncepcií intuície však na tom netrvám. Okrem toho to závisí od existencie oborov objektov, ktoré nie sú objektami intuície a nie je jasné, či táto podmienka bude splnená pre iné koncepcie. Nie je napríklad jasné, či platí pre Gödelovu koncepciu. Nie je jasné, či podľa štrukturalistického názoru čísla nie sú objektami intuície podľa koncepcie, pre ktorú táto podmienka neplatí, pretože potom vlastnosť byť objektami intuície triviálne zachováva ľubovoľný izomorfizmus jednotlivých exemplárov štruktúry.

Ďalšou otázkou je, či sú podľa štrukturalistického názoru intuitívne zrejme samotné propozície o číslach. To by mohlo závisieť od ďalších detailov týkajúcich sa spôsobu formulovania štrukturalistického názoru. V prípade eliminačnej verzie, ktorá sa mi zdá byť najsľubnejšou verziou eliminačného štrukturalizmu a ktorá používa logiku druhého rádu, bude odpoveď zrejme jednoznačne negatívna.¹⁴ O tejto otázke však budem ešte hovoriť na konci tohto článku.

¹³ Je tu však rozsiahly problém, ktorým sa tu nechcem zaoberať. Téma o nevyspytateľnosti referencie je obhajovaná na podobných základoch ako štrukturalistický názor na matematické objekty; znamená to, že ide o štrukturalistický názor na objekty vôbec? Ak áno, nemohla by moja argumentácia poslúžiť ako dôkaz toho, že téza o nevyspytateľnosti znamená, že neexistujú žiadne objekty vnímania (keďže intuícia, ako ju chápem ja, zahrnuje aj bežné vnímanie)? Myslím, že nie. Predpokladajme, že zástupná funkcia, ktorá svedčí o nevyspytateľnosti referencie, zobrazuje určité objekty, ktoré sú intuitívne objektami vnímania, na objekty, ktoré nimi nie sú. Zdá sa mi, že k nevyspytateľnosti dochádza iba preto, že predikáty ako „ x vníma y “ sú tiež zachytené v reinterpretácii tak, že ak Φ je zástupná funkcia, tak „ x vníma y “ sa reinterpretuje ako „ $\Phi(x)$ vníma $\Phi(y)$ “. No vzťahy zahrnujúce vnímanie nie sú súčasťou štruktúr skúmaných pri štrukturalistickom názore na matematické objekty.

O vzťahu medzi nevyspytateľnosťou a štrukturalistickým názorom však treba povedať viac. Za to, že som si tu uvedomil, vďaka Williamovi Brackenovi.

¹⁴ Pozri [19]. Jedna verzia názoru, ktorú tento článok priamo nekritizuje, je obsiahnutá v [7]. Nezaobrá sa otázkami intuitívnej zrejmosti a poznámka v texte sa týka jeho konštrukcie.

III. Položme si teraz otázku, či dostaneme odlišný výsledok - či už pokiaľ ide o otázku, či sú čísla objektami intuície, alebo pokiaľ ide o pravdivosť nejakej verzie štrukturalistického názoru, ak pristúpime k pojmu čísla viac fenomenologicky, počnúc základmi jeho aplikácie.

Najelementárnejšie kardinálne a ordinálne aplikácie jazyka číselníkov si zrejme vôbec nevyžadujú čísla ako objekty. Za kanonickú formu výroku o kardinálnom čísle budem považovať výrok „existuje (presne) $\bar{n}$ F “, kde „ F “ zastupuje predikát alebo všeobecný termín a $\bar{n}$ je číselovka. To nás, myslím, nijako nezaväzuje, pokiaľ ide o otázku, či je $\bar{n}$ singulárny termín. Dávam prednosť tejto forme pred formou, ktorá referuje na množinu. Nemyslím si, že najzákladnejšie výroky o kardinálnosti musíme interpretovať tak, že referujú na množiny.¹⁵

Ak to, že existuje n F , určujeme počítaním, vytvárame jedno-jednoznačnú korešpondenciu medzi jednotlivými F a postupnosťou n „guličiek počítadla“. Čosi podobné kanonickému spôsobu verifikovania toho, že existuje n F , dostaneme, ak si postupne predstavujeme jednotlivé F a pomenúvame ich alebo ich vnímame, pričom ich označujeme po sebe idúcimi počítadlovými guličkami. Tento postup udeľuje m -tej guličke približný zmysel „ m -tý“, t.j., v našom prípade m -tý F . Samozrejme, musíme si byť istí, že žiadny objekt nepočítame dvakrát, t.j., že v každom štádiu platí, že označený objekt nebol označený predtým, a musíme pokračovať v tomto postupe až dovtedy, kým sme neoznačili každé F . Tieto dve podmienky sa však rovnajú podmienke, že označovanie by malo byť jedno-jednoznačnou korešpondenciou medzi použitými guličkami počítadla a jednotlivými F .

„Guličky počítadla“ budú v bežnom prípade číselovky nejakého štandardného systému, buď výrazy pre čísla v prirodzenom jazyku, alebo arabské číslice. Predpokladajme, že tento systém je pevne stanovený. Pouvažujme, čo je potrebné na to, aby sme vnímaním verifikovali, že existuje n F . Nestačí, aby sme boli schopní vnímať každé individuum F ; musíme byť schopní prezrieť si všetky F jedno po druhom a identifikovať ich ako F a ako tie, ktorými sa všetky F vyčerpávajú. Toto sa však deje v mnohých každodenných situáciách, pričom sa počítajú objekty, ktoré vidíme buď všetky súčasne, alebo postupne. Vezmime si napríklad počítanie tanierov, pohárov a príborov, ktoré treba dať na stôl pri obede, alebo počítanie drobných vo svojom vrecku.

Pokiaľ ide o význam výroku „existuje $\bar{n}$ F “, nebol som veľmi presný, ale mali by sme si všimnúť, že v takýchto jednoduchých prípadoch sa tento výrok dá verifikovať pomocou vnímania, by viedlo k problematizovaniu určitých koncepcií jeho významu. Zoberme si takúto interpretáciu:

(1) Existuje jedno-jednoznačná korešpondencia medzi jednotlivými F a číselkami od 1 po $\bar{n}$.

Toto je na prvý pohľad výrok druhého rádu a obsahuje referenciu na číselovky, ktoré budeme musieť kvôli stálosti významu pri rôznych použitíach chápať ako typy. Z predpokladu o možnosti intuitívneho poznania konečných množín by vyplývalo, že v našom ideálnom prípade by sme (1) mohli intuitívne poznať, ale aj pri tomto predpoklade bude súčasťou tohto poznania matematická intuícia.

Problémy s intuíciou množín, ktoré by vzišli z týchto predpokladov, sú samy osebe zaujímavé, ale diskusiu o nich si budeme musieť nechať na inokedy.¹⁶ Nemyslím si však, že na

¹⁵ Je však samozrejmé, že v texte uvedená forma naozaj zahŕňa jednu bežnú formu obsahujúcu množiny, pretože „ F “ by mohlo byť „je prvkom a “, kde „ a “ označuje nejakú množinu.

¹⁶ Najsilnejším takýmto predpokladom by bol ten, že ľubovoľná konečná množina intuitívne poznateľných objektov je intuitívne poznateľná. Ak chápeme korešpondenciu ako množinu usporiadaných dvojíc, potom z toho vyplýva, že korešpondencia je intuitívne poznateľná vtedy, keď alebo chápeme usporiadané dvojice podľa definície Wienera-Kuratowskeho, alebo predpokladáme (nezávisle a podľa mojej mienky rovnako prijateľne), že usporiadané dvojice intuitívne poznateľných objektov sú intuitívne

to, aby sme pochopili najelementárnejšie aplikácie pojmu kardinality, potrebujeme zavádzať až natoľko ontologicky zaťažený výrok o čísle.¹⁷ Uvažujme o nasledovných ekvivalenciách, ktoré tvoria základ štandardného pretlmočenia výrokov o čísle do logiky prvého rádu s identitou:

$$(2a) (\exists x)Fx \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg Fx$$

$$(2b) (\exists x)(\forall y)(Fy \leftrightarrow Fx) \leftrightarrow (\exists y)[Fy \wedge (\forall x)(Fx \leftrightarrow x=y)]$$

Jedným zo spôsobov, ako chápať počítanie, je predpokladať, že každá číslovka m použitá pri počítaní vystupuje ako ukazovacie zámeno označujúce v tomto kontexte ten objekt, s ktorým je v korelácii, tak, že tento vystupuje ako „ m -tý“. Aby som sa vyhol nedorozumeniam, budem tu zapisovať tak, ako je uvedené. Mojou predstavou bol takmer ideálny prípad, kedy sa o objekte v každom okamihu dalo zistiť, že je F a že je odlišný od objektov, ktoré sme počítali už predtým. Potom by sme dostali:

$$(3a) F(\bar{m}\text{-tý})$$

$$(3b) \bar{k}\text{-ty} \neq \bar{m}\text{-tý (pre každé } k, 0 < k < m).$$

Navyše, poznávajúci môže v n -tom štádiu zistiť, že neexistujú žiadne ďalšie F . Znamená to, že je tiež schopný zistiť, že

$$(3c) (\forall x)(Fx \leftrightarrow x = \text{prvý} \vee \dots \vee x = \bar{n}\text{-tý}).$$

Z (3a-c) vyplýva, že na odvodenie „ $(\exists x)Fx$ “ potrebujeme iba ekvivalencie (2a-b).

To, že subjekt pozná (2a-b) alebo princípy, z ktorých vyplývajú, je pomerne rozumný predpoklad. Ako však máme chápať tieto poznatky? V našom prípade by sme ich mali chápať predovšetkým ako pravidlá, v ktorých je schematické nielen „ F “, ale aj „ $\bar{n}$ “, pričom v druhom prípade ide, samozrejme, o číslovku. To by mohlo viesť k domnienke, že výraz „existuje $\bar{n} F$ “ je jednoducho skratkou jeho rozvinutej podoby podľa (2a-b), teda že je jednoducho dôsledkom (3a-c) prvého rádu. Podľa iného názoru, ktorý je azda ďalším krokom vo vývoji pojmu kardinality, je „ $(\exists x)Fx$ “ druhom zovšeobecneného kvantifikátora, z čoho vyplývajú niektoré závažné dôsledky - ako napr. to, že ho treba stále chápať ako logický dôsledok. Prvorádové rozšírenie sa stáva veľmi nejasným ešte predtým, ako sa n stane veľmi veľkým. K poznaniu, že existuje $n F$, by sa však malo dať prísť aj jemnejším spôsobom, ako je ten, ktorý som práve opísal. Jedným z takýchto spôsobov by bolo verifikovať na každom stupni výrok „existuje $\bar{m} F$, ktoré sú G “, pričom „ G “ je nejaký predikát, ktorý je koextenzívny

poznateľné. Tieto predpoklady by sa však z mnohých dôvodov dali spochybniť.

¹⁷ Mohol by som podotknúť, že druhorádový aspekt výroku (1) by nevzbudil u Fregeho žiadny záujem, pretože by ho považoval za logický dôsledok výroku formy „ H je jedno-jednoznačná korešpondencia medzi jednotlivými F a číslovkami od 1 po $\bar{n}$ “ pre konkrétny predikát „ H “.

Samozrejme, Frege by neinterpretoval výroky o čísle pomocou referencie na číslovky. Výrok „počet F je $\bar{n}$ “ by bol podľa *Grundlagen* dôsledkom druhého rádu obvyklého prekladu výroku „existuje $\bar{n} F$ “ do logiky prvého rádu a je príkladom fregeovského kritéria identity pre čísla:

počet F = počet G vtedy a len vtedy, keď existuje jedno-jednoznačná korešpondencia medzi jednotlivými F a G

(ktoré sa dá, ako je dobre známe, dokázať pomocou axiomy V z jeho definície výrazu „počet F “ s použitím extenzií). V najideálnejšom prípade, o ktorom tu uvažujeme, by potom podľa Fregeho bol výrok „počet F je $\bar{n}$ “ logickým dôsledkom faktov verifikovateľných pomocou vnímania.

s predikátom „doteraz počítaný“. Záviselo by od okolností, čo by bolo „ G “, ale pravdepodobne by obsahovalo indexový výraz, ktorého referencia sa mení spolu s m . V prípade množiny videných objektov by sme mohli ukazovať na nejaké miesto, takže „ G “ by znamenalo „na tomto mieste“.¹⁸ V každom prípade táto postupná procedúra by spočívala vo verifikovaní „ $(\exists m x)(Fx \wedge G_m x)$ “ pri m -tom kroku (kde „ G_m “ vhodným spôsobom zastupuje vyššie spomenutý indexový výraz). Aby sme prešli k $(m+1)$ -ému kroku, zistili by sme, že pre ľubovoľné x

$$(4) Fx \rightarrow [G_{m+1} x \leftrightarrow (G_m x \vee x = \overline{(m+1)}-y)],$$

a potom by sme použili (2b).

Určite sa pomerne rýchlo nájde niekto, kto bude používať číslkové kvantifikátory s premenou n , teda tak, že sa už viac nedajú redukovať na logiku prvého rádu. To by nás malo upozorniť na to, že zdaniu, že zavádzame čísla ako objekty, sa vyhneme iba tým, že sa obmedzíme iba na veľmi jednoduchý prípad. Bežným spôsobom, ktorý nám už od začiatku zrejme vnucuje referenciu na čísla, je, pripustiť, aby bolo zovšeobecnené miesto pre číslkovku v kvantifikátore. Rýchlo by sa rozšíril aj jazyk, tak, že by sme odlišné výrazy začali používať tak, aby „referovali na to isté číslo“. Mohli by sme tu rozlišovať tri druhy prípadov:

1. Termíny pochádzajúce zo zavedenia výpočtových operácií, počnúc takými najelementárnejšími operáciami, ako je sčítanie. V týchto prípadoch budú existovať postupy na redukciu termínov zložených z čísloviek a týchto operátorov na číslkovky. Túto redukciu musíme chápať tak, že sa dá použiť v takých kontextoch ako „existuje $n F$ “; inak by napríklad neplatilo, že „existujú 4 F “ je ekvivalentné s „existuje $2 + 2 F$ “.

2. Výrazy ako „počet F “ a iné určité opisy označujúce čísla. Tieto predpokladajú nejakú formu zovšeobecnenia miest pre číslkovky.

3. Alternatívne systémy čísloviek. Tieto by sme mohli chápať ako tie, čo vyvolávajú problémy prekladu (alebo parafrázovania, ak sú v našom vlastnom jazyku). Existuje tu však obmedzenie presného prekladu alebo parafrázovania, ktoré nezávisí od idey, že číslkovky referujú na čísla. Ak uvažujeme o dvoch systémoch (nazvime ich N - a M -číslkovky), tak M -číslkovku $\tilde{n}^*$ (azda cudziu) vyjadríme pomocou (našej vlastnej) N -číslkovky $\tilde{n}$ iba v prípade, že existuje n M -čísloviek po $\tilde{n}^*$.¹⁹ Iným pohľadom na tento problém, ktorý vedie k tomu istému výsledku a ktorý môže byť vhodnejší, ak M -číslkovky patria do nášho vlastného jazyka, je ten, keď ich považujeme za termíny zavedené rekurzívne.

¹⁸ Dalo by sa, samozrejme, povedať, že to, na čo ukazujeme, je množina doteraz počítaných F , teda že „ G “ znamená „v tejto množine“. Toto je zrejme všeobecnejšia aplikácia, a predstavuje teda jednu možnosť, ako prísť k pojmu množiny.

To by mohlo vyhovovať P. Maddyovej, ktorá tvrdí v ([12], 58), že pri verifikovaní napríklad toho, že v škatuli sú tri vajcia, pomocou vnímania vnímame množinu troch vajec. Zdá sa, že Maddyová odvodzuje výrok „Steve vidí množinu vajec, ktorá má tri prvky“ z výroku „Steve vidí, že v škatuli sú tri vajcia“. To vyzerá veľmi vieryhodne, ak predpokladáme, že výrok „v škatuli sú tri vajcia“ obsahuje referenciu na množinu. Ale nevidím dôvod, prečo treba takúto referenciu predpokladať pri analýze takých elementárnych vnemových zrejmostí, akými sa zaoberá Maddyová.

Maddyovej záver, že existuje vnímanie množín, by sa však dal zdôvodniť pomocou tvrdenia, že v trochu komplikovanejších prípadoch, ako je ten, ktorý uvádza (povedzme, ak je v škatuli sedem vajec), musíme v každom štádiu počítania ukazovať na množinu vajec, ktoré sme doteraz spočítali. Za podmienky, že ukázanie na miesto by takisto poslúžilo tomuto zámeru, to nepovažujem za potrebné. Ale možno by to niekto dokázal vyriešiť pomocou príkladov iného druhu.

¹⁹ Ak je počiatočným prvkom 0, tak výraz „až po n^* “ je nahradený výrazom „menej ako n^* “; ak sa zaň považuje 1, tak výraz „až po n^* “ sa chápe ako „až po a vrátane n^* “. Všimnime si, že tieto vzťahy sa dajú rozhodnúť pomocou výpočtu, v niektorých prípadoch veľmi jednoduchého.

Naše poznámky v 1. a 3. naznačujú, že prinajmenšom predtým, ako máme konštrukcie prirovnateľné k premenným a kvantifikátorom pre čísla, máme nejakú koncepciu toho, čo pre výrazy znamená „označovať to isté číslo“, ktorá nepredpokladá predchádzajúcu koncepciu čísel ako objektov. A pod výrazom, ktorý „označuje číslo“, nemusíme mať teraz na mysli nič iné ako jednoducho číslu nášho počiatočného systému alebo výraz, ktorý podľa práve uvedenej koncepcie „označuje to isté číslo“ ako takéto číslu. To nás utvrdzuje v tom, aby sme považovali zavedenie premenných a kvantifikátorov „nad oborom čísel“ v prvom rade za substitučné. A skutočne, substitučné interpretácie aritmetiky vznikali a boli obhajované z filozofických pozícií (pozri najmä [6]).

Takúto interpretáciu by sme mohli chápať buď ako vysvetlenie referencie na čísla, alebo ako jej elimináciu.²⁰ Ako uvidíme, ak má byť tento druhý názor niečím viac ako explikáciou istého štádia vo vývine pojmu čísla, je vystavený preň osudným námietkam. V žiadnom prípade však nerobí z čísel objekty intuície, pretože vlastne popiera, že čísla sú vôbec nejaké objekty.

Pouvažujme, ako sa prvý názor týka otázky, či sú čísla objektami intuície. Podľa tohto názoru by sa čísla tvorili používaním jazyka, konkrétne pomocou výrazov, ktoré na ne referujú. Práve chápanie a použitie určitého jazyka sa pokladá za uvedenie si čísel. To zahŕňa aj bežné vnímanie, napríklad počítaných objektov, a intuíciu jazykových výrazov, konkrétne číslu.

Mohli by sme však aj chápanie číslu opisovať ako intuíciu čísla? Ak áno, ako by sa to týkalo vnímania? Nie tak isto ako pri koncepcii intuície, o ktorú nám tu ide. Na rozdiel od výrazu-typu, to-ktoré číslo nie je *forma*, ktorú spredmetňuje tá-ktorá číslu; to-ktoré číslo nevysvetlíme tým, že povieme, že jeho podstatou je byť spredmetnené práve týmto spôsobom. Číslu tu hrá úlohu jazykového výrazu; ukazuje sa to v tom, že číslo by bolo práve tak „prítomné“, keby bolo reprezentované príslušnou číslu v odlišnom systéme, možno úplne inom z hľadiska perceptuálnej povahy.²¹ Keby sme teda mali túto situáciu opisovať ako intuíciu čísla, analógia s vnímaním by bola voľnejšia.

Chápanie referencie na čísla, o ktorej tu uvažujeme, je špeciálnym prípadom všeobecnej koncepcie objektu, ktorá sa používala pri základoch konštruktívnej matematiky, kde je objekt daný jeho kanonickým výrazom (v priaznivom prípade číslu), ktorý vo všeobecnosti ukazuje svoju konštrukciu zo základných konštrukcií pre tento obor objektu. Ďalšie pravidlá by viedli k nekanonickým výrazom, ktoré by sa mali pomocou výpočtu redukovať na kanonické. Takéto pravidlá, prirodzene, vznikajú z konštrukcií, ktorých prejavom sú kanonické výrazy; ak sú napríklad kanonické číslu konštruované (povedzme) z 0 pomocou nasledovníka, funkcia predchodcu δ , (zavedená pomocou triviálnej rekúrie $\delta(0) = 0$, $\delta(Sn) = n$) jednoducho anulujú posledný krok konštrukcie ne-počiatočného čísla.²²

²⁰ Gottlieb obhajuje druhý názor. Prvý názor by sa dal vyčítať zo všeobecného stanoviska mojej práce [14]. S osobitným zreteľom na aritmetiku skúmam ďalej tento problém v recenznom článku [16].

²¹ Toto však naozaj naznačuje chápanie čísel ako objektov intuície, považujúc ich za „generalizované typy“: znaky pre číslu sú toho istého typu dokonca aj v rozdielnych systémoch, ak „reprezentujú to isté číslo“ v zmysle vysvetlenom v texte. (Pozri [15], 163-4; [17], 43-47, kde sa však táto koncepcia interpretuje typicky nominalisticky.) Zdá sa mi, že táto koncepcia stráca na príťažlivosti, akonáhle chápeme vzťah alternatívnych systémov číslu k nášmu vlastnému systému ako vec prekladu. V každom prípade za predpokladu, že jej rozpracovaním sa takto chápané čísla stali objektami intuície, možno vzniesť štrukturalistickú námietku, že je to jednoducho len ďalší *konštrukt* prirodzených čísel. Na čom z pojmu prirodzeného čísla sa zakladá pravdivosť toho, že čísla sú skôr tieto objekty ako nejaká iná ω -postupnosť?

²² Koncepcia matematických objektov ako daných pomocou ich kanonických výrazov tvorí základ intuicionistickej teórie typov Martina-Löfa, silnej konštruktivistickej teórie, ktorú možno ešte ďalej

Koncepcia matematických objektov ako daných pomocou ich kanonických výrazov naozaj v určitých ohľadoch nemodeluje koncepciu intuície, o ktorú mi ide, ale skôr Husserlovu koncepciu. Všeobecne povedané, termíny pre matematické objekty by vyjadrovali intencie, ktoré sú splnené ich redukciami na kanonické výrazy; a mať kanonický výraz je potom analogické prítomnosti „samotného objektu“. V konštruktívnom rámci vzniku tejto koncepcie možno potom matematickú propozíciu chápať ako intenciu splnenú konštrukciou, ktorá ju dokazuje.²³

Lahko však možno vidieť, že čisto substitučná teória aritmetiky, ako sme ju naznačili, nemôže byť adekvátne. Nie je problém formulovať substitučnú interpretáciu aritmetiky prvého rádu ako samostatnej teórie²⁴ a dá sa rozšíriť aj na rozvetvenú teóriu druhého rádu, prinajmenšom v hraniciach predikativity. Okrem toho ju možno ďalej rozvíjať vyššie načrtnutým spôsobom tak, aby sa v nej zaobchádzalo s číslami ako kardinálmi (pozri [6] a [16]). Takéto zaobchádzanie však predpokladá, že počítané objekty pochádzajú z predošlého oboru. Samozrejme, v matematickej praxi používame pojem kardinality pre čísla a pre matematické objekty iných druhov, ktoré by mohli závisieť od prirodzených čísel. Navyše, naše používanie neobmedzujeme len na konečné.

Toto pomerne všedné zistenie by sme mohli uviesť ako argument v prospech názoru, že naše vysvetlenie kvantifikácie cez čísla je skutočne vysvetlením oboru objektov. „Trhová cena“ tohto názoru v tomto kontexte je však taká istá ako cena toho, čo by bolo podľa iného názoru ďalším konceptuálnym skokom od chápania substitučnej kvantifikácie ako objektovej. Ide o to, že v matematickej praxi a do istej miery už aj v bežnom živote narábame s číslami rovnako ako s inými objektmi tak, že ich samotné môžeme nielen počítať (čo znamená, že číselné premenné vyznačujú miesto argumentu nejakého *predikátu*²⁵), ale môžu byť tiež prvkami množín, postupností a argumentami a hodnotami funkcií.

V čom by teda spočíval tento ďalší konceptuálny skok? Spočíval by v krokoch, ktoré nasledujú potom, keď už máme substitučnú kvantifikáciu číselov, ktorá je azda oddelená od inej kvantifikácie. Azda potom, keď si všimneme formálnu analógiu medzi správaním sa týchto substitučných kvantifikátorov a správaním sa objektových kvantifikátorov a fakt, že prvé by sa dali zovšeobecniť na číselkové kvantifikátory tým istým spôsobom, akým boli zovšeobecnené druhé, by sme mohli začať narábať s číselnými kvantifikátormi ako s jednoduchými ohraničenými kvantifikátormi so základným predikátom „je číslo“. Ale s predikátom rovnosti, ktorý je základom výpočtových operácií i použitia číselkových určitých opisov, by sme museli tiež narábať ako s identitou. Hovorenie o množinách prirodzených čísel a o funkciách na množine prirodzených čísel by však v sebe obsahovalo ešte ďalšie kroky. Je zrejme, že iba na pomerne neskorom stupni tohto vývoja môžu vôbec vzniknúť otázky, na ktoré odpovedá štrukturalistický názor. Bez toho, aby sme pripustili čísla do oboru kvantifikácie, do ktorého patria zároveň a iné objekty, nemožno, samozrejme, otázku, či platia nejaké identity medzi číslami a objektami danými nejakým úplne iným spôsobom, formulovať a takisto nemožno identifikovať čísla ako štruktúru a všeobecne túto štruktúru nemožno opísať.

rozpracovať. Túto ontologickú koncepciu analyzujem v práci [18] (hovorím tu väčšinou o celkom jednoduchých prípadoch). Pomerne bežné nasledujúce úvahy, ktoré majú dokázať neprimeranosť priamej substitučnej interpretácie, sa nevzťahujú na teóriu, akou je teória Martina-Löfa. Chápanie vyšších typov v tejto teórii vylučuje, aby sme túto koncepciu brali ako elimináciu ontológie.

²³ Pozri [23], najmä kap. 4, § 5. Je pravdepodobné, že Husserl prinajmenšom nepriamo ovplyvnil počiatky intuicionistickej logiky v ranných Heytingových prácach.

²⁴ Pozri moju prácu [14], poznámku 1 alebo Kripkeho prácu ([11], §§ 8-9), kde sa o tomto probléme píše obšírnejšie.

²⁵ Za predpokladu, že forma základného výroku o čísle je taká, ako sme predpokladali. Ale chápanie čísel ako pripojených k množinám by malo tie isté implikácie (pozri poznámku 14).

Mohol by som na tomto mieste uviesť niekoľko poznámok o známom fregeovskom kritériu identity čísel, ktoré v *Grundlagen* zohralo takú centrálnu úlohu pri dokazovaní jeho tézy, že čísla sú objekty, a teda v jeho vysvetľovaní referencie na čísla. Vyššie som naznačil, že pri vysvetľovaní pôvodu referencie na čísla zavádza toto kritérium viac ontológie, ako môžeme priznať počiatočnému štádiu vývoja takejto referencie. Pri aplikácii na prirodzené čísla v plne rozvinutom štádiu matematiky by sa dalo voči nemu ešte namietať z pozícií štrukturalizmu, pretože narába s prirodzenými číslami v prvom rade ako s *kardinálmi*. No ako kritérium kardinálnej ekvivalencie, a teda ako kritérium, ktoré musia kardinálne čísla ako objekty spĺňať, je, samozrejme, nepochybne extenzionálne korektné. Navyše sa zrejme nevyhneme tomu, aby sme toto kritérium chápali pri zovšeobecňovaní pojmu kardinálneho čísla pre infinitný prípad ako najzákladnejšie. Zodpovedá to tomu, že historickou situáciou, v ktorej sa toto kritérium začalo chápať ako základné, bolo vytvorenie teórie transfinitných čísel Cantorom. V tomto kontexte je to jediné kritérium, ktoré vedie k teórii koherentnej s čímkkoľvek, čo sa dá rozumne nazvať aritmetikou infinitných kardinálov. Potom však v štandardnej teórii množín nehrá tú úlohu, ktorú hralo u Fregeho, totiž úlohu kritéria identity, ktoré bolo súčasťou vysvetlenia referencie na určitý druh objektu.

IV. Vráťme sa teraz k otázke vzťahu všeobecnosti aplikácie čísel k ich intuitívnemu alebo transparentnému charakteru. Po prvé, mohli by sme zistiť, že nie je evidentné, že obraz o počiatkoch referencie na čísla, ktorý sme načrtli, z nich robí čisté abstraktné objekty, hoci sú nepochybne abstraktné, a nie kvázi-konkrétne. Ale domnievali sme sa, že pri ich úlohe kardinálov ich aplikácia nebola zovšeobecnená mimo vopred daného oboru objektov, a ešte sme nemali rámec, v ktorom by sme o nich uvažovali abstraktné ako o štruktúre.

Zachováva sa intuitívna zrejmosť elementárnych výrokov o číslach, ak ich chápeme na dostatočne všeobecnom pozadí, aby sme si ich uvedomili ako čisté abstraktné objekty? Predpokladajme spolu s Hilbertom a Bernaysom, že určité z týchto výrokov sú intuitívne zrejmé vtedy, keď ich chápeme vo vzťahu k nejakému intuitívnemu modelu. Sú také aj vtedy, keď ich interpretujeme tak, že sú to vlastne výroky o *číslach*? Uvažujme o starom známom príklade, $7 + 5 = 12$. Tento výrok určite implikuje platnosť schémy

$$(5) [(\exists x)Fx \wedge (\exists y)Gx \wedge (\forall x) - (Fx \wedge Gx)] \rightarrow (\exists_{12x})(Fx \vee Gx).$$

Malo by byť jasné, že budú existovať príklady tejto schémy, ktoré nie sú intuitívne zrejmé, akonáhle obor kvantifikácie už nepozostáva z objektov intuície. Znamená to, že ak vyvodíme takýto dôsledok, musíme výrok „ $7 + 5 = 12$ “ začať chápať tak, že už nie je intuitívne zrejмый? Argument v prospech tohto záveru máme iba vtedy, keď predpokladáme, že aj v tomto rámci si *logika* zachováva intuitívnu zrejmosť. Ale práve preto, že tento predpoklad uplatňujeme tam, kde má obor kvantifikácie neintuitívny charakter, môžeme ho spochybniť. Záver, že ak taký prípad, ako je uvedený v (5), nie je intuitívne zrejмый, potom taký nie je ani samotný výraz „ $7 + 5 = 12$ “, teda nie je nevyhnutný.

Že to nie je také celkom jednoduché, uvidíme, keď si všimneme štrukturalistický názor na čísla. Spomenul som, že najsfubnejšia eliminačná verzia tohto názoru parafrázuje aritmetické výroky vrátane „ $7 + 5 = 12$ “ ako výroky logiky druhého rádu, zovšeobecnenia o ľubovoľných ω -postupnostiach. Alternatívou by bolo chápať čísla ako výsledok istého druhu abstrakcie, akonáhle je daná nejaká ω -postupnosť.²⁶ Jeden aj druhý názor odvodzuje referen-

²⁶ Modelom je tu Taitov pojem „Dedekindovej abstrakcie“; pozri jeho prácu ([22], 369, pozn.12); pozri aj ([19], 308, 336).

ciu na čísla buď zo všeobecného pojmu ω -postupnosti, alebo z identifikácie špecifického prípadu, a teda z tej či onej formulácie indukcie ako všeobecného princípu.

Uvedené predstavy o geneze referencie na čísla sa odlišujú od oboch spomenutých verzií štrukturalizmu v tom, že podľa nich určitá forma referencie na čísla existuje už predtým, než môžu vôbec vzniknúť otázky vedúce k abstrakcii alebo zovšeobecneniu. Prípadná integrácia aritmetiky s teóriou množín (prípadne s inými vysoko abstraktnými vedeckými teóriami) spôsobuje, že čísla sa dostávajú do akejsi holistickej súvislosti s vysoko neintuitívnymi spôsobmi referencie a poznania. Nie je však jasné, či výroky, ktoré boli intuitívne zrejme pred týmto rozšírením našich konceptuálnych prostriedkov, majú túto svoju zrejmú stratiť. Z príkladov, akým je spomenutý výrok „ $7 + 5 = 12$ “, je jasné, že ich aplikácia mimo intuitívnej sféry nebude mať spravidla ten istý intuitívny charakter. Ak modelujeme „transparentnosť“ čísel pomocou našich pojmov intuície a intuitívnej zrejmosti, potom musíme zastávať názor, že všeobecnosť ich aplikácie, teda jedna stránka ich statusu ako čistých abstraktných objektov, je niečo, čo je pridané k tomu, čo je o nich transparentné. Hoci niektorí určite nebudú so mnou súhlasiť, ja sám to nepokladám za neželaný výsledok.

Z anglického originálu CHARLES PARSONS: *Intuition and Number* preložil Dezider Kamhal.

LITERATÚRA:

- [1] BUTTERFIELD, J. (vyd.): *Language, Mind, and Logic*. Cambridge University Press 1986.
- [2] DUMMETT, M.: *Frege: Philosophy of Language*. Londýn, Duckworth 1973.
- [3] FIELD, H.: *Science without Numbers*. Princeton University Press 1980.
- [4] FIELD, H.: *Realism, Mathematics, and Modality*. Oxford, Blackwell 1989.
- [5] GÖDEL, K.: What is Cantor's continuum problem? (1964, opravená a rozšírená verzia.) In: Feferman, S. – Dawson, Jr., J. W. – Kleene, S. C. – Moore, G. H. – Solovay, R. M. – van Heijenoort, J. (vyd.): *Collected Works, Volume II: Publications 1938-1974*. Oxford University Press 1990, s.254-270.
- [6] GOTTLIEB, D.: *Ontological Economy: Substitutional Quantification and Mathematics*. Oxford, Clarendon Press 1980.
- [7] HELLMAN, G.: *Mathematics without Numbers*. Oxford, Clarendon Press 1989.
- [8] HILBERT, D.: Über das Unendliche. In: *Mathematische Annalen* 95, 1926, s. 161-190. Preklad in: VAN HEIJENOORT, J. (vyd.): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass., Harvard University Press 1967, s. 369-392.
- [9] HILBERT, D. – BERNAYS, P.: *Grundlagen der Mathematik I*. Berlín, Springer 1934.
- [10] HUSSERL, E.: *Philosophie der Arithmetik*, 1891. Spolu s ďalšími textami vydal Lothar Eley ako *Husserliana*, Volume 12. Hág, Nijhoff 1970.
- [11] KRIPKE, S.: „Is there a problem about substitutional quantification?“ In: Evans, G. – McDowell, J. (vyd.): *Truth and Meaning*, Oxford, Clarendon Press 1976, s. 325-419.
- [12] MADDY, P.: *Realism in Mathematics*. Oxford, Clarendon Press 1990.
- [13] PARSONS, CH.: *Ontology and Mathematics* (1971). In: [17]
- [14] PARSONS, CH.: *A plea for substitutional quantification*. In: [17].
- [15] PARSONS, CH.: *Mathematical intuition*. *Proceedings of the Aristotelian Society N.S.* 80 (1979-80), s. 145-168.
- [16] PARSONS, CH.: *Substitutional quantification and mathematics*. In: *British Journal for the Philosophy of Science* 33, 1982, s. 409-421.
- [17] PARSONS, CH.: *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*. Ithaca, Londýn, Cornell University Press 1983.
- [18] PARSONS, CH.: *Intuition in constructive mathematics*. In: ([1], 211-229).
- [19] PARSONS, CH.: *The structuralist view of mathematical objects*. In: *Synthese* 84, 1990, s. 303-346.
- [20] PARSONS, CH.: *Quine and Gödel on analyticity*. In: Paolo Leonardi (vyd.): *W.V. Quine's Contribution to Philosophy*. Cambridge University Press (v tlači).

- [21] QUINE, W. V.: *Ontological Relativity and Other Essays*. New York, Columbia University Press 1969.
- [22] TAIT, W. W.: Truth and proof. In: *Synthese* 69, 1986, s. 341-370.
- [23] TIESZEN, R. L.: *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*. Dordrecht, Kluwer 1989.
- [24] WEITZEL, L.: Expressions vs. numbers. In: *Philosophical Topics* 17, 1989, s. 173-196.

ČÍTALI STE UŽ?

JAROSLAV PEREGRIN: Úvod do analytickej filosofie – Logika ve filosofii a filosofie v logice. Praha, Hartmann a synové 1992, 124 s.

Veľmi inštruktívna knižočka, umožňujúca rýchlo preniknúť do rozsiahlej oblasti súčasnej analytickej filozofie. Názvy kapitol: *Čo je analytická filozofia? Frege. Russell. Rozvoj formálnej logiky. Carnap a Viedenský kruh. Obrat k jazyku. Wittgenstein. Formálna sémantika. Quine. Perspektívy*. V piatich prílohách sa podáva prehľad najdôležitejších logických systémov.

PAUL TILLICH: Biblické náboženství a ontologie. Praha, Kalich 1990, 239 s.

V súbore štúdií významného kresťanského filozofa a teológa Paul Tillicha (1886 - 1965) sa rozvíja Tillichova „existencionálna ontológia nového bytia“. Názvy štúdií: *Biblické náboženstvo a hľadanie poslednej skutočnosti. Náboženstvo ako rozmer duchovného života človeka. Dva typy filozofie náboženstva. Svár času a priestoru*.

KŘEŠŤANSTVÍ A FILOSOFIE (VELKÉ EPOCHY). Praha, Křesťanská akademie 1991, 94 s.

Súbor štyroch prednášok o postavení kresťanského myslenia v rámci európskej filozofie v rôznych dejinných etapách. Čitateľ tu nájde tieto prednášky: Werner Beierwaltes: *Kresťanstvo a platonizmus*; Albert Zimmermann: *Kresťanstvo a aristotelizmus*; Robert Spaemann: *Kresťanstvo a filozofia novoveku*; Mikuláš Lobkowicz: *Kresťanstvo a filozofia XX. storočia*.

LADISLAUS BOROS: Bůh mezi námi. Praha, Signum unitatis 1991, 131 s.

Desať brilantných biblicko-filozofických úvah k desiatim kľúčovým tematickým okruhom duchovného života: *láska, pokora, rozhovor, zľutovanie, cudzota, pokánie*,