

GÖDELOVE VETY O NEÚPLNOSTI

KAROL HABART, Katedra logiky a metodológie vied FFUK, Bratislava

Začalo sa 20. stor. — to blahoslavené, radostné, zaplavené slnkom a pohodou. Pred človekom sa otvárajú veľkolepé perspektívy, veď akože aj ináč, pri súčasnom vysokom stupni rozvoja kultúry a civilizácie. Možnosti a schopnosti človeka sú neobmedzené. Niet preňho nevyriešiteľného problému. Na čo sa nenachádza odpoveď dnes, nájde sa zajtra. Čo je teraz záhadou, budú naši synovia pokladať za trivialitku.

Skvelý a obdivovaný Dávid Hilbert, kráľovecký profesor algebry a geometrie, formuluje najvýznamnejšie otvorené problémy matematiky — problémy pre nové storočie. Už len tie vyriešiť — a bude všetko jasné. Fyzici prepadajú podobným ilúziám.

Úplne inak sa to už však javí v roku 1931. Ľudstvo je vďaka svetovej vojne rozčarované z nového storočia. Nastupuje explózia objavov vo fyzike, usilovne sa pripravujú predpoklady pre Hirošimu a Nagasaki. Až po nich začne ľudstvo brať veďu vážne. Rakúsky logik Kurt Gödel dokazuje v tomto roku svoje slávne vety o neúplnosti. Znamená to neuskutočniteľnosť veľkolepého plánu Dávida Hilberta, známeho ako Hilbertov program, ktorý mal, hrubo povedané, ukázať rovnocennosť „abstraktných“ a „konkrétnych“ metód v matematike. Starý pán tomu do smrti celkom nechce uveriť. A sklamanie trvá dodnes.

Prečo?

Gödel nám neúprosne dokázal, že naše poznanie má hranice. Že naše možnosti a schopnosti nie sú neobmedzené. A že tieto hranice neležia niekde v transcendentne, mimo dosahu nášho rozumu a predstavivosti, ale že sú až priveľmi konkrétne: dnes je možné formulovať otázky, na ktoré ľudstvo, i keby existovalo nekonečne dlho a i keby sa narodili akíkoľvek géniovia, nikdy nenájde odpoveď. A pritom to nemusia byť otázky metafyzického rázu, ale prostúcke aritmetické tvrdenia.

Skvelý to argument v rukách apologetov agnosticizmu, však?

Je naozaj zaujímavé, ako je dodnes všeobecne rozšírená viera vo všemocnosť vedy a techniky, ako je uznávaný pyšný antropocentrizmus, veriaci v neobmedzenosť ľudskej schopnosti poznávať a podmaňovať si. Všeobecné vedomie je vlastne na úrovni bradatých starých pánov v cylindroch a redingotoch. Zaostáva teda o sto rokov. A to nielen v krajinách, kde bolo po desaťročia kastované tupou demagógiou.

Je však znepokojujúce, ak „huráoptimizmus“ minulého storočia penetruje filozofickú obec. Po Gödelovi to nie je možné označiť inak, ako prejav ignorantstva a nevedomosti. A úplnou nehoráznosťou je, ak niekto dezinterpretuje Gödelove výsledky ako argument proti formalizmu vo vede a filozofii. Dôsledky týchto viet sú veľmi všeobecné, netýkajú sa len čisto formálnych metód.

Neochota či nevôľa prijať Gödelove vety aj s dôsledkami nie je prekvapivá. Jedná sa o „negatívny“ výsledok, na rozdiel od výsledkov „pozitívnych“, ako je napríklad prezentácia metódy na riešenie istej triedy diferenciálnych rovníc alebo, aby sme dali slovo aj starovekej vede, metóda na konštrukciu pravého uhla. Negatívny výsledok je aj ťažšie pochopiť, ako pozitívny. Snáď nikdy neskončia pokusy laikov o trisekciu uhla. Pritom bola dokázaná nemožnosť rozdelenia ľubovoľného uhla na tri rovnaké časti pomocou kružidla a pravítka.

A to nie v tom zmysle, že súčasný stav poznatkov to neumožňuje a že snáď v budúcnosti, vďaka dajakému nepredvídateľnému objavu, sa to predsa len podarí. Vie sa s úplnou určitosťou, že všetky podobné pokusy musia skončiť nezdarom. Tento poznatok je dôsledkom slávnej Galoisovej teórie, produktom matematiky 19. stor.. Táto teória priniesla, ak sa nemýlim, prvé „negatívne“ výsledky vôbec. Nepochybujem o tom, že negatívne výsledky vo vede znamenajú kvalitatívny zlom v našom poznaní. Ba čo viac, v matematike je možné pozorovať citeľný posun od pozitívnych výsledkov k negatívnym. Zatiaľ čo Galoisova teória bola v kontexte matematiky minulého storočia ojedinelá, v 20. storočí vznikli celé matematické disciplíny, ako rekurzívna teória a teoretická kybernetika, v ktorých sa dokazuje samé „nedá sa“ a „nemôže sa“. Ako príklad negatívneho výsledku vo fyzike by bolo možné uviesť Heisenbergov princíp neurčitosti.

Myslím si, že existuje priama súvislosť medzi „huráoptimizmom“ minulého storočia, spôsobeným nevidaným nahromadením pozitívnych výsledkov vo vede a technike, a ideológiami, ktoré viedli k zverstvám tohto storočia, či sa už odvolávali na Nietzscheho alebo na Marxa. V myslení došlo ku skratu „viem všetko, takže smiem všetko“. Je to asi bližšie k pravde ako transcendentálne rečičky o strate nadosobnej morálnej autority, viery v Boha našich otcov. Alebo snáď presnejšie: tento skrat je príčinou súčasného duchovného stavu civilizácie s jeho absenciou metafyzických hodnôt a istôt.

Po Gödelovi vedie rovnaké krátke spojenie k téze: „Nemôžem vedieť všetko, takže nemôžem smieť všetko“. Asi je to lepšie východisko. I keď u človeka sa neoplatí oddávať prílišnému optimizmu. Hlúposť je nevykoreniteľná a s ňou aj ľudská zloba.

Ale dostali sme sa už príliš ďaleko. Cieľom tohto článku nie je inšpirovať sa Gödelovými vetami k ďalekosiahlym úvahám, ale objasniť, o čom pojednávajú.

Aby mohol niekto Gödelom argumentovať, musí podstatu jeho dôkazu pochopiť. A to sa nezaobíde bez určitej dávky formalizmu. Veľmi futujem, ale ak chcete v čítaní tohto článku pokračovať, musíte sa odhodlať čítať formálne zápisy a musíte sa pripraviť na isté množstvo „matematiky“.

Gödelove vety o neúplnosti úzko súvisia s pojmom efektívnosti v zmysle efektívneho algoritmu. Je to fundamentálny pojem aj v už spomínanej rekurzívnej teórii a teoretickej kybernetike. Efektívnosť je koncept iniciovaný práve vetami o neúplnosti a vlastne len tak mimochodom sa stala základným teoretickým prostriedkom pri popise činnosti počítačov, vynájdených až o 20 rokov neskôr.

1. Efektívny algoritmus a gödelizácia

Ilustrujeme pojem efektívneho algoritmu na príklade: Predstavte si veľmi svedomitého úradníka, ktorý dostáva listy, na ktoré potom odpovedá. Na vybavenie tejto korešpondencie má veľmi presný a podrobný návod, taký presný, že akýkoľvek iný úradník, ba akýkoľvek iný človek by podľa tohto návodu vedel jeho prácu zastúpiť. Táto korešpondencia je vzorovým príkladom efektívneho procesu. V návode — algoritme je presne zakotvené, aká bude odpoveď na ľubovoľný list, aký by úradník mohol dostať. Aby sme úradníkovu činnosť dostali do exaktnej matematickej roviny, predstavíme si listy zakódované ako priro-

dzené čísla a úradníkovu činnosť ako funkciu f , ktorá prirodzených číslam x (kódom listov, ktoré dostáva) priradí číslo $f(x)$ (kód listu — odpovede). Proces kódovania ľubovoľného textu ako prirodzené číslo sa volá *gödelizácia* a je jedným z dvoch základných metodických prostriedkov, ktoré sa používajú v dôkazoch Gödelovej vety.

Ako vyzerá gödelizácia?

Priradíme písmenám abecedy $A, B, C, \dots$ čísla $1, 2, 3, \dots$. Potom slovo *ABECEDA* kódujeme takto: keďže slovo *ABECEDA* má 7 písmen, vezmeme 7 najmenších prvočísel: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$; a umocníme ich v poradí na kód písmena v slove, t. j. v poradí na $1, 2, 5, 3, 5, 4, 1$; a vynásobíme ich. Takže kód slova *ABECEDA* je číslo $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 17^1$. Je to pomerne veľké číslo. Keďže každé prirodzené číslo sa dá jednoznačne vyjadriť ako súčin mocnín prvočísel, ktoré ho delia, z kódu ľubovoľného slova vieme opäť zrekonštruovať pôvodné slovo. Napríklad číslo 262440 rozložíme na súčin mocnín prvočísel: $2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^1$. Toto číslo kóduje teda slovo s tromi písmenami, ktorým sú priradené čísla $3, 8, 1$; t. j. slovíčko *CHA*. Pretože môžeme zvlášť priradiť čísla písmenám veľkým i malým, s diakritikou i bez nej, ba aj zvlášť podľa typografie a veľkosti alebo i podľa materiálu, na ktorý sú vytlačené, celý časopis, ktorý držíte v ruke, môže byť kódovaný ako jedno veľikánske prirodzené číslo.

Aritmetická funkcia f , ktorá kóduje činnosť nášho úradníka, je teda v intuitívnom zmysle efektívna. „Efektívnosť“ znamená, že existuje spôsob, ako jej hodnotu pre dané číslo x vypočítať. Takéto efektívne, vypočítateľné sú napríklad aj také funkcie ako sčítanie, násobenie, a pod.

Existujú aj také funkcie, ktorých hodnoty nevieme vypočítať?

Aby sme na túto otázku vedeli odpovedať (a odpoveď bude kladná), potrebujeme presne, matematicky definovať, čo sú efektívne aritmetické funkcie. Rôzni matematici sa pokúšali tento pojem upresniť rôznym spôsobom. Turing definoval efektívne funkcie ako tie, ktorých hodnoty dokáže vypočítať istý presne definovaný abstraktný stroj. Tento stroj je idealizáciou akéhosi mechanického stroja, nezničiteľného a neopotrebovávajúceho sa, ktorý dnes voláme Turingov stroj. Na rozdiel od tohto pokladá Markov funkciu f za efektívnu, keď z argumentu x vieme odvodiť hodnotu $f(x)$ manipuláciou so symbolmi podľa istého presného návodu, ktorý dnes voláme Markovov algoritmus. Post, Church a Kleene zaviedli ďalšie, navzájom sa líšiace definície efektívnosti. Pozoruhodné však je, že postupom času sa všetky tieto navonok sa od seba veľmi líšiace definície ukázali byť navzájom ekvivalentné. Tie isté funkcie sú efektívne podľa Turinga, ako podľa Markova, Posta či Churcha a Kleeneho. Ba dokonca aj tzv. „registrovaný stroj s ľubovoľným prístupom“, čo je vlastne idealizovaný počítač s nekonečnou pamäťou, dokáže vyrátať práve tieto funkcie.

Tento fakt je argumentom pre tézu, že intuitívne sú efektívne práve tie funkcie, ktoré dokáže vypočítať Turingov stroj. Túto tézu formuloval Church, a preto je v literatúre známa ako *Churchova téza*.

Je dôležité si uvedomiť, že Churchova téza je hypotéza, ktorú nie je možné dokázať. Nanajvýš tak vyvrátiť. Nieкто by mohol podať presný návod na výpočet istej funkcie, o ktorej dokáže, že ju nevypočíta žiadny Turingov stroj. Teda v istom zmysle naše ďalšie úvahy (i keď nie priamo formálne dôkazy Gödelových viet) závisia od Churchovej tézy. Avšak spomenuté vyvrátenie Churchovej tézy by nemalo za následok neplatnosť našich úvah. Znamenalo

by len, že v našich ďalších argumentáciach je nevyhnutné Turingov stroj nahradit iným, komplikovanejším strojom.

2. Diagonalizácia

Druhým hlavným prostriedkom v dôkaze Gödelových viet je metóda diagonalizácie. Vysvetlíme si ju na príklade: dokážeme, že existujú funkcie, ktoré nie sú efektívne, čiže ktoré sa nedajú „vypočítať“ (hľa, negatívny výsledok). Je to veľmi významná metóda v matematike a ako prvý ju použil koncom minulého storočia Georg Cantor v teórii množín v dôkaze existencie navzájom sa líšiacich „nekonečien“.

Aritmetické funkcie, ktoré dokáže vypočítať Turingov stroj, môžeme očíslovať, t. j. dá sa predpokladať, že $f_1, f_2, f_3, \dots$ sú všetky takéto funkcie. Dokazuje sa to exaktnou matematickou cestou využitím presnej matematickej definície Turingovho stroja. My si to ozrejníme na príklade nášho úradníka. Všetky efektívne funkcie sú reprezentované všetkými možnými „spôsobmi“ úradníckovej korešpondencie. Tie zodpovedajú všetkým možným návodom, ako mu môžu byť poskytnuté. Vďaka gödelizácii vieme každému návodu priradiť číslo. Takto získame isté očísľovanie všetkých efektívnych funkcií, ktoré však nevyužíva všetky priradené čísla. Môžeme ale z neho dostať požadované očísľovanie nasledovne: jednotku priradíme funkcii s najmenším číslom, dvojku funkcii s druhým najmenším číslom, trojku s tretím najmenším, atď. A teraz vstupuje do hry diagonála: Predstavme si nasledovnú „nekonečnú“ tabuľku, v ktorej do i -teho riadku zapíšeme hodnoty funkcie f_i pre čísla 1, 2,:

$f_1(1) \quad f_1(2) \quad f_1(3) \quad \dots$

$f_2(1) \quad f_2(2) \quad f_2(3) \quad \dots$

$f_3(1) \quad f_3(2) \quad f_3(3) \quad \dots$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Skúmame hodnoty, ktoré ležia na diagonále (sú to $f_1(1), f_2(2), f_3(3), \dots$), a definujeme funkciu g nasledovne:

$$g(x) = f_x(x) + 1.$$

Je jasné, že g nie je žiadna z funkcií $f_1, f_2, \dots$, pretože keby $f_i = g$, tak by bolo $f_i(i) = g(i)$, a keďže $g(i) = f_i(i) + 1$, tak $f_i(i) = f_i(i) + 1$, čo je očividný spor. Tým sme dokázali existenciu neefektívnej funkcie.

3. Prvá veta o neúplnosti

Gödel má dve vety o neúplnosti. Prvá z nich znie nasledovne:

Nech φ je formálny systém vhodných vlastností. Potom existuje veta φ v jazyku aritmetiky, ktorá sa nedá dokázať vo formálnom systéme φ . Veta φ tvrdí: „Som nedokázateľná veta“.

Čo je však jazyk aritmetiky a čo formálny systém?

Veta φ jazyka aritmetiky je zložená zo symbolov $x, y, z, \dots$ pre premenné,

symbolov +, *, ' pre operácie sčítania, násobenia a nasledovníka (zväčšenie čísla o 1), symbolu 0 pre konštantu „nula“, = pre rovnosť, logických spojok $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ a kvantifikátorov $\forall$ a $\exists$. Napríklad výraz

$$x = y + z$$

znamená, že číslo x je súčtom čísel y a z . Keďže nevieme, ktoré čísla x , y , z má autor na mysli, nedá sa pri takomto výraze a priori hovoriť o tom, či je pravdivý alebo nie. Závisí to od toho, aké čísla x , y , z máme na mysli. Takýmto výrazom hovoríme „formula“. Formuly, pri ktorých vieme rozhodnúť, či sú pravdivé alebo nie, voláme „vety“, ako napr.

$$0 = 0'.$$

Táto veta je nepravdivá. Tvrdí, že nasledovník nuly (jednotka) sa rovná 0.

Z daných formúl φ a ψ vieme vytvárať nové formuly pomocou logických spojok: $\neg \varphi$ znamená „nie je pravda, že φ “, $\varphi \wedge \psi$ znamená „súčasne φ aj ψ “, $\varphi \vee \psi$ znamená „ φ alebo ψ “, $\varphi \Rightarrow \psi$ je „ak φ , potom aj ψ “, a $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je „ φ práve vtedy, keď ψ “. Nové formuly môžeme vytvárať aj kvantifikovaním: $\forall x \varphi$ znamená „pre každé x platí φ “ a $\exists x \varphi$ je „existujúca aspoň jedno x , pre ktoré platí φ “. Tak napríklad z formuly $x = y + z$ získame kvantifikovaním vetu

$$\forall x \forall y \forall z x = y + z,$$

ktorá je nepravdivá, lebo tvrdí, že súčet ľubovoľných dvoch čísel je ľubovoľné číslo, čo nie je pravda (napr. ak $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$). Ak však kvantifikujeme takto:

$$\forall y \forall z \exists x x = y + z,$$

dostaneme pravdivú vetu. Tvrdí, že ľubovoľné dve čísla majú súčet.

Vety sú teda také formuly, v ktorých sú všetky premenné, ak sa vôbec dakáke vyskytujú, kvantifikované. Takú premennú formulu φ , ktorá nie je kvantifikovaná, voláme voľná premenná. Ak x , y sú voľné premenné formuly φ , zapisujeme to takto:

$$\varphi(x, y).$$

Formálny systém $\mathcal{S}$ je, hrubo povedané, presný návod na určenie toho, aké postupnosti $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ za sebou napísaných viet pokladáme za dôkaz. φ je dokázateľné v systéme $\mathcal{S}$, ak existuje dôkaz $\varphi_1 \dots \varphi_n \vee \mathcal{S}$ taký, že posledný člen φ_n tejto postupnosti je práve φ .

V znení 1. vety o neúplnosti je formulovaná požiadavka na „vhodné“ vlastnosti formálneho systému φ . Tieto požiadavky sú nasledovné:

1. $\mathcal{S}$ má pracovať s vetami takého jazyka, ktorý obsahuje jazyk aritmetiky. Môže to byť oveľa bohatší jazyk, ktorý obsahuje akékoľvek ďalšie symboly.
2. Ľubovoľná veta jazyka aritmetiky, ktorá sa dá dokázať v $\mathcal{S}$, musí byť pravdivá.

Gödelova veta tvrdí, že existuje veta nedokázateľná v systéme $\mathcal{S}$, ktorá tvrdí: „Som nedokázateľná veta“. Hľadáme teda túto vetu v jazyku aritmetiky.

Vďaka gödelizácii existuje pre každú formulu φ jej kód, ktorý budeme označovať symbolom $\ulcorner \varphi \urcorner$ (uvedomme si, že každé prirodzené číslo môže byť zapísané v jazyku aritmetiky: jednotka je 0', dvojka 0'', trojka 0''', atď.). Ďalej, každá efektívna funkcia sa dá vyjadriť v jazyku aritmetiky v tom zmysle, že

ak f je efektívna funkcia, tak existuje formula $\varphi(x, y)$ s voľnými premennými x, y taká, že pre ľubovoľné číslo x je $\varphi(x, y)$ pravdivé práve vtedy, ak $y = f(x)$. Toto sa dokazuje tiež pomocou gödelizácie: „súčiastky“ Turingovho stroja sa kódujú ako prirodzené čísla a celá jeho činnosť sa popíše ako aritmetický vzťah medzi číslami.

Vieme kódovať aj postupnosti viet, a to tak, že z kódu postupnosti vieme efektívne vypočítať aj kód jej posledného prvku. Pretože sa dá efektívne rozhodnúť, či nejaká postupnosť viet je dôkazom (je to vlastnosť zahrnutá v definícii formálneho systému), existuje efektívna funkcia $f(x)$ taká, že keď x nie je kódom dôkazu, tak $f(x) = 1$ (žiadna veta nemá kód 1), a keď x je kódom dôkazu, tak $f(x)$ je kódom poslednej vety v postupnosti kódovanej číslom x . Ak φ je formula prislúchajúca f podľa predchádzajúceho odstavca, tak formula $\varphi(x, y) \vee \neg(y = 0')$ [označme ju $\text{Prov}(x, y)$] je pravdivá práve vtedy, keď x je kódom dôkazu vety s kódom y . Takže potom formula $\exists x \text{Prov}(x, y)$ [označme ju $\text{Pr}(y)$] je pravdivá práve vtedy, keď y je kód dokázateľnej vety.

My hľadáme vetu „Som nedokázateľná veta“, teda niečo ako vetu $\neg \text{Pr}(m)$, kde m je kód práve vety $\neg \text{Pr}(m)$. Získame ju diagonalizáciou na Gödelovej substitučnej funkcii θ .

Táto funkcia realizuje dosadenie za voľné premenné vo formule, t. j. kódu formuly pred dosadením priradí kód formuly po dosadení. Majme formulu $\psi(x)$ s jednou voľnou premennou x , ktorej kód je a . Néch b je ľubovoľné číslo. Potom hodnota Gödelovej substitučnej funkcie θ pre a a b je kód vety $\psi(b)$ (t. j. vo formule $\psi(x)$ dosadíme za premennú x číslo b — ak napr. $b = 3$, tak to bude veta $\psi(0''')$). Môžeme teda písať $\theta(a, b) = \ulcorner \psi(b) \urcorner$ alebo, čo je to isté, $\theta(\ulcorner \psi(x) \urcorner, 3) = \ulcorner \psi(0''') \urcorner$.

Táto funkcia je očividne efektívna — z kódu formuly vieme efektívne vypočítať formulu, previesť dosadenie za voľnú premennú a potom vypočítať jej kód. Preto existuje formula κ v jazyku aritmetiky, pre ktorú je $\kappa(x, y, z)$ pravdivá práve vtedy, keď $z = \theta(x, y)$. Označme formulu $\exists z \neg \text{Pr}(z) \wedge \kappa(x, y, z)$ skrátené ako $\neg \text{Pr}(\theta(x, y))$. Táto formula je pravdivá práve vtedy, keď je nedokázateľná veta, ktorú získame z formuly s kódom x dosadením čísla y za každú voľnú premennú.

Postavme $n = \ulcorner \neg \neg \text{Pr}(\theta(x, x)) \urcorner$, t. j. n je kód formuly $\neg \text{Pr}(\theta(x, x))$. Hľadaná veta je potom $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$. Skutočne, táto veta tvrdí, že nie je dokázateľná veta, ktorú získame z formuly s kódom n (t. j. z formuly $\neg \text{Pr}(\theta(x, x))$) dosadením čísla n za voľnú premennú — a to je veta $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$, teda ona sama.

Prečo je táto veta nedokázateľná v $\mathcal{S}$?

Keby bola veta $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$ („Som nedokázateľná veta“) dokázateľná $\wedge \mathcal{S}$, tak by musela byť podľa 2. podmienky, ktorú sme na formálny systém kládli, pravdivá — a teda mala by byť nedokázateľná. To je spor. Preto $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$ nie je dokázateľná, a preto pravdivá.

4. Druhá veta o neúplnosti

V skutočnosti je prvá veta o neúplnosti formulovaná trochu inak, ako sme to urobili v predchádzajúcom paragrafe. Predpokladá sa presnejšie vymedzenie pojmu „formálny systém“, ktoré umožňuje využívať v dôkaze niektoré jeho

vlastnosti. Je presne definovaný tzv. *kalkul predikátového počtu 1. rádu*. Je to striktný predpis, ako sa z daných východzích viet, ktoré voláme *axiómy*, vytvárajú dôkazy. Jednotlivé formálne systémy sa potom líšia práve tým, ktoré vety sa zvolili za axiómy. Tento zvolený súbor axióm voláme *teória* a v ďalšom ho budeme označovať T .

Taktiež prvá požiadavka na $\mathcal{S}$ je silnejšia: požaduje sa, aby vo formálnom systéme boli dokázateľné isté pravdivé vety aritmetiky. Špeciálne ak $\text{Prov}(a, b)$ je pravdivé pre dajaké čísla a, b , tak musí byť aj dokázateľné v $\mathcal{S}$.

Druhá požiadavka na $\mathcal{S}$ je však slabšia. Všetky dokázateľné vety nemusia byť nevyhnutne pravdivé. Stačí, ak si vety, ktoré sa v $\mathcal{S}$ dajú dokázať, navzájom neprotirečia, t. j. nemá byť súčasne dokázateľné φ aj $\neg \varphi$. Táto vlastnosť sa volá *konzistentnosť*.

Ukážme, prečo je $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$ nedokázateľné i za týchto podmienok: Ak je $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$ dokázateľné, tak existuje číslo m (kód dôkazu) také, že $\text{Prov}(m, \theta(n, n))$ je pravdivé. Podľa prvej podmienky na $\mathcal{S}$ je potom $\text{Prov}(m, \theta(n, n))$ dokázateľné. Avšak $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$ znamená $\neg \exists x \text{Prov}(x, \theta(n, n))$, čo je to isté ako $\forall x \neg \text{Prov}(x, \theta(n, n))$. Kalkul predikátovej logiky má také vlastnosti, že ak dokazuje $\neg \exists x \text{Prov}(x, \theta(n, n))$, tak dokazuje aj $\forall x \neg \text{Prov}(x, \theta(n, n))$ a potom aj $\neg \text{Prov}(m, \theta(n, n))$ špeciálne pre číslo m . Máme teda dôkazy pre $\text{Prov}(m, \theta(n, n))$ aj $\neg \text{Prov}(m, \theta(n, n))$. To je spor s predpokladom, že $\mathcal{S}$ je konzistentný systém.

Druhá veta a neúplnosti znie nasledovne:

Veta „ $\mathcal{S}$ je konzistentný formálny systém“ je nedokázateľná v $\mathcal{S}$.

Formálny systém je daný teóriou T . Teória T teda nevie dokázať konzistentnosť T .

Ako vyzerá veta „ $\mathcal{S}$ je konzistentný formálny systém“?

Dá sa ukázať, že T je konzistentná práve vtedy, keď sa z nej nedá dokázať očividná nepravda, ako napr. $\neg 0 = 0$. Preto veta „ T je konzistentná“ je práve $\neg \text{Pr}(\neg 0 = 0)$. Označme ju Con_T .

Dôkaz druhej vety o neúplnosti si len naznačíme. Využíva sa v ňom dôkaz prvej vety o neúplnosti, ktorý sa gödelizuje. Videli sme, že z predpokladu konzistentnosti T vieme dokázať, že veta $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$ nie je dokázateľná v T a že je zároveň *pravdivá*. Takže $T + \text{Con}_T$ dokazuje $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$. Preto keby T dokazovalo Con_T , tak by T priamo dokazovalo $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$. To je spor s prvou vetou o neúplnosti.

Veta Con_T je lepší príklad na nedokázateľnú vetu ako $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$, lebo kým o $\neg \text{Pr}(\theta(n, n))$ vieme, že je pravdivá, o Con_T to a priori nevieme povedať.

Nech ZF je Zermelo-Fraenkelova teória množín. Celá súčasná matematika je vyjadrená v jazyku teórie množín a všetko, čo sa v matematike dokazuje, sa vlastne dokazuje v ZF . Podľa našich predchádzajúcich úvah sa Con_{ZF} nedá dokázať v ZF , to znamená, že sa *nedá dokázať neprotirečivosť matematiky*. A my naozaj nevieme, či je matematika neprotirečivá. My v to (až na niektorých veľmi skeptických jedincov) veríme. Ale *nikdy nebudeme mať istotu*. Konzistentnosť matematiky je práve ten aritmetický problém (Con_{ZF} je veta v jazyku aritmetiky), ktorý ľudstvo nikdy nevyrieši.

Ďakujeme, pán Gödel!

5. Dôsledky

Ešte niekoľko poznámok k tomu, ako Gödelove vety presahujú rámec striktné formálnych metód.

Akýkoľvek problém sa bude formulovať v nejakej knihe. Môžeme ho gödelizovať ako číslo. Každé riešenie problému bude v nejakej knihe. Môžeme ho opäť gödelizovať ako číslo. Rozhodnúť, či je navrhované riešenie naozaj riešením daného problému, by mal vedieť ľubovoľný človek jednoznačne — teda efektívne. Takže všetka ľudská argumentácia, ak je dobrá, prezentuje formálny systém v tom najširšom zmysle slova, ako sme ho uviedli v 3. paragrafe.

Zdanlivo sme teda stlačili všetku ľudskú argumentáciu na úroveň formálneho systému. Dostaneme však nasledovný paradox: Podľa prvej Gödelovej vety existuje aritmetická veta, ktorá tvrdí „Neexistuje argument pre moju pravdivosť“ a ktorá je pravdivá. Máme teda argument (Gödelovu vetu) pre jej pravdivosť. Keďže je pravdivá, neexistuje argument pre jej pravdivosť. To si protirečí.

Kým teda gödelizácia a intuitívny pojem efektívnosti smeruje k veľkému zovšeobecneniu Gödelových viet, mimo exaktné formálne systémy, tento paradox svedčí o hraniciach ich aplikovateľnosti.

Kde sú tieto hranice.

Ja vidím tri hlavné prekážky:

1. Hlavnou prekážkou je protirečivosť prirodzeného jazyka ako celku. Dokazuje to slávny Richardov paradox: Nasledovná definícia prirodzeného čísla: *Najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá definovať menej ako dvadsiatimi slovenskými slovami* má len 12 slovenských slov, čiže protirečí sama seba. Práve tento paradox je argumentom pre nutnosť rozlišovania medzi jazykom, ktorý skúmam (jazykom-objektom), a jazykom, v ktorom skúmané popisujem (metajazykom). Už sám o sebe je tento paradox dosť silným argumentom pre nutnosť formalizácie vo vede a filozofii.
2. Čím všeobecnejšia je nejaká argumentácia, tým je nepresnejšia a nie je možné efektívne rozhodnúť, či daný problém rieši alebo nie. Kým však môžu existovať vážne námietky voči odpovedi na daný problém, nemôžeme ho pokladať za vyriešený. Nevyhnutnosť eliminovať nepresnosti a nejasnosti z argumentov tiež svedčí v prospech formálnych metód.
3. Všeobecne akceptovaná (efektívne rozhodnuteľná) ľudská argumentácia sa nepohybuje vždy v medziach pravdivosti, resp. neprotirečivosti. Túto alternatívu pokladám za najzaujímavejšiu. Ak sa vyhneme predchádzajúcim dvom fenoménom, Gödelova veta (a paradox s ňou spojený) je argumentom pre tézu, že bludy v ľudskom dôvodení sú zákonitým javom. Tak, ako naši predkovia všeobecne prijímali existenciu nadprirodzených bytostí ako argument, aj my všeobecne prijímame ako argument niečo, čo nebude argumentom pre našich potomkov, a oni zase niečo, čo neuznajú ich potomkovia, atď. Poznám len jeden recept proti bludom — formalizáciu. Avšak v tomto prípade to nemusí byť všeliek. Formalizovaný blud je ten najobľudnejší.

LITERATÚRA

1. MONK, J. D.: Mathematical logic. New York, Heidelberg, Berlín, Springer 1976.
2. NAGEL, E. — NEWMAN, J.: Der Gödelsche Beweis. Viedeň, Oldenburg 1964.
3. SMORYŇSKI, C.: The incompleteness theorems. In: Barwise (vyd.): Handbook of mathematical logic. Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland 1978.