MOHOL BYŤ ZENÓN INŠPIRÁTOROM PYTAGOROVSKÉHO DÔKAZU NESÚMERATEĽNOSTI?

MARIÁN SKALSKÝ, Filozofický ústav SAV, Bratislava

Zenónove apórie a pytogorovský dôkaz nesúmerateľnosti býva zvykom uvádzať ako dva od seba nezávislé objavy, súvisiace nanajvýš tým, že spoločne podmienili krízu v základoch starogréckej matematiky. Oddelené chápanie zároveň vedie k tomu, že aj ich účinkovanie v kríze sa hodnotí rozdielne. Objav nesúmerateľnosti je kvalifikovaný prevažne ako rýdzo matematický poznatok, ktorý v súlade so svojou povahou bezprostredne inicioval vytvorenie matematickej teórie proporcií, schopnej vyrovnať sa s problémom iracionálnych čísel. Hoci vo svojich dôsledkoch zasiahol aj podstatu pytagorovskej ontológie, tvoriacej v tomto období metodologickú bázu matematiky, a teda mal aj svoje filozofické pozadie, táto skutočnosť skôr zvýraznila tendenciu odlíšiť od seba oblasť matematiky a filozofie (t. j. nespájať dosah objavu so sférou filozofického skúmania) a považovať ho za čisto matematický problém. Naproti tomu Zenónove námietky vystupujú v širšom filozofickom kontexte a o ich vplyve na matematiku sa uvažuje predovšetkým na všeobecnej metodologicko-filozofickej úrovni.

Aj keď v prospech uvedeného ortodoxného názoru svedčí absencia akejkoľvek zmienky o vzájomnej historickej väzbe medzi oboma objavmi v starovekých textoch, ktoré máme k dispozícii, proti úplnej nezávislosti môžeme uviesť dva logické argumenty. Po prvé, podľa Komarovej Zenón nepochybne poznal jav nesúmerateľnosti ako nemožnosti určiť spoločnú mierku medzi dvoma či viacerými veličinami, nakoľko v každej apórii je táto nesúmerateľnosť tak či onak prítomná (11, s. 171). A po druhé, ako upozorňuje Szabó, s technikou nepriameho dôkazu, pomocou ktorej bol uskutočnený aj pytagorovský objav, sa po prvýkrát stretávame u Zenónovho učiteľa Parmenida. Nemáme žiadne informácie o tom, že by sa táto technika objavila v matematike (t. j. u pytagorovcov) už prv, a preto Szabó pripisuje jej odhalenie eleatom (16, s. 219). Ak však uznáme relevanciu týchto tvrdení, žiada sa ísť ešte ďalej. Veď prečo by mali pytagorovci prebrať od eleatov len novú metódu dôkazu a obsah eleatského učenia spochybňujúci ich doktrínu nechať bez povšimnutia? Predsa tým, že akceptovali eleatský dôkazový postup, dali jasne najavo, že podľa nich Parmenides vo svojich úvahách postupoval z formálneho hľadiska korektne. Nemali by sme skôr očakávať, že pytagorovci sa novou metódou pokúsia obhájiť vlastné učenie? A to tým skôr, že Zenón vo svojich apóriách uplatnil nepriamy dôkaz priam majstrovským spôsobom, pričom nimi uviedol na scénu pre pytagorovcov viac než nepríjemný jav nesúmerateľnosti. Ak sa pytagorovci oboznámili s apóriami — a my nemáme dôvod uvažovať, že pytagorovci v tomto smere tvoria oproti druhým filozofickým prúdom výnimku —, potom od mysliteľov ich kalibru sotva môžeme očakávať, že si nevšimnú leitmotív nesúmerateľnosti, ktorý v nich vystupuje. Pravda, svoj objav nesúmerateľnosti mohli urobiť nezávisle od apórií, ba mohli ho uskutočniť skôr ako Zenón. Predsa len, ak by sa nám podarilo ukázať, že medzi oboma objavmi je možný jednoduchý logický prechod, potom by názor o ich nezávislosti musel čeliť metodologickému princípu Occamovej britvy. V článku sa pokúsim ukázať, že pytagorovský dôkaz je skutočne možné rekonštruovať transformovaním Zenónovej úvahy do matematickej podoby.

Nevyhnutnou podmienkou pre obhajobu tézy o prepojení oboch objavov je ich časová následnosť; celá úvaha má význam iba vtedy, ak Zenónove apórie boli formulované skôr než pytagorovský dôkaz. Presné datovanie objavov však postrádame a maximum, čo môžeme podniknúť v tomto smere, je pokúsiť sa priradiť im aspoň pravdepodobné časové rozpätie, v ktorom mohli byť uskutočnené.

Pozrime sa najprv na Zenónove apórie. Ak uznáme Platónov dialóg *Parmenides* za historicky vierohodný, potom sa Zenón narodil v r. 490 p. n. l. Dialóg sa odohráva počas návštevy vtedy štyridsaťročného Zenóna v Aténach, kam prišiel spolu so svojím učiteľom Parmenidom. Podľa Platónovho vyjadrenia Zenón vtedy po prvýkrát priniesol do Atén svoje spisy (12, s. 2), ktoré napísal ešte ako mladík (12, s. 4). Ak budeme za mladý vek považovať 20—30 rokov, potom môžeme odhalenie apórií datovať do rokov 470—460 p. n. l. V dialógu sa však rozoberajú výlučne problémy zakotvené v apóriách proti mnohosti. V spojitosti s tým si Komarova všimla (11, s. 16), že aj Simplikiove opakované citáty Zenóna sa vždy dotýkajú len problematiky mnohosti. Na základe toho usudzuje, že Zenón napísal prinajmenej dve samostatné diela, z ktorých prvé by sa venovalo otázke mnohosti a druhé (ktoré Simplikius pravdepodobne nemal k dispozícii) zasa pohybu. Komarova zároveň podotýka, že takéto vysvetlenie by korešpondovalo so zlomkom 29A15, v ktorom sa hovorí, že Zenón vystúpil na obranu Parmenidovho učenia dvakrát, pričom až druhé vystúpenie sa dotýkalo pohybu. V súlade s tým musíme publikovanie pohybových apórií vzťahovať až za rok 450 p. n. l. (t. j. až po Platónom zachytenej besede v Aténach). Rok Zenónovej smrti síce obdobným spôsobom nedokážeme špecifikovať, no pri uvážení toho, že zomrel násilnou smrťou v dôsledku svojej aktívnej politickej angažovanosti (Diogenes IX 26), nemohlo ísť o pokročilú starobu. Za hornú hranicu odhalenia pohybových apórií môžeme preto považovať rok 430 p. n. l. Dospeli sme tak k dvom intervalom: objav apórií proti mnohosti pravdepodobne spadá do obdobia rokov 470—460 p. n. l. a formulácia apórií proti mnohosti sa viaže k rokom 450—430 p. n. l. Upozorňujem však, že správnosť týchto dedukcií sa opiera predovšetkým o Platóna, pretože napr. Diogenes Laertios tvrdí, že Zenón strávil celý svoj život v rodnom meste Elea (IX 28), čo samozrejme vylučuje výlet do Atén.

Pri pokuse o upresnenie obdobia odkrytia pytagorovského dôkazu nesúmerateľnosti sme na tom neporovnateľne horšie. Určujúci záchytný bod môžeme nájsť opäť u Platóna, ktorý v dialógu *Theaitetos* pripisuje dôkaz iracionality $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ matematikovi Teodorovi Kyrénskemu (11, s. 14). Nakoľko Platón prípad $\sqrt{2}$ neuvádza, predpokladá sa, že tento dôkaz bol uskutočnený už skôr, a to pytagorovcami. Pytagorovci v tomto období totiž disponovali teóriou párneho a nepárneho, ktorá v zásade dávala možnosť dokázať iracionalitu $\sqrt{2}$. K dôkazu by teda došlo niekedy v 5. storočí p. n. l., presnejšie pred rokom 410 p. n. l. Viac, žiaľ, nevieme. Pritom nejasným zostáva nielen obdobie zrodu objavu, ale nepoznáme ani to, kto z pytagorovcov ho urobil, a nezachoval sa nám ani autentický pytagorovský postup.

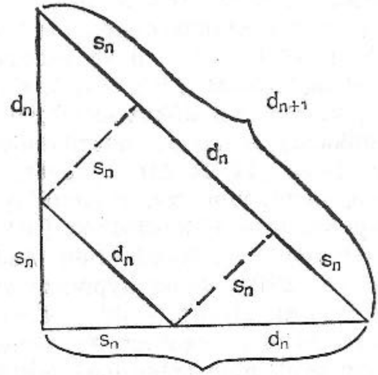
Hypotézy usilujúce sa o rekonštrukciu objavu môžeme rozdeliť na dve skupiny. Do prvej by patril klasický názor, spájajúci objav s dôkazom nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca, a do druhej skupiny môžeme zaradiť ostatné návrhy. V prospech štandardného názoru hovorí najmä svedectvo Aristotela, ktorý na viacerých miestach vo svojich spisoch uvádza tento prípad ako typický príklad nemožnosti [2, s. 64; 3, s. 31]. Pravda, Aristoteles nespomína presný postup, ktorým bol dôkaz uskutočnený (hovorí len vo všeobecnosti o nepriamom dôkaze), a naviac, nezmieňuje sa pri ňom o pytagorovcoch. Od Prokla však vieme [14, II 23], že pytagorovci rozlišovali medzi vyjadriteľnou uhlopriečkou, zastúpenou tzv. diagonálnym číslom, a skutočnou, prirodzeným číslom nevyjadriteľnou uhlopriečkou (diametros arretos).

Z hypotéz, ktoré sa odkláňajú od štandardnej predstavy, je najznámejšou asi postup, ktorý navrhol von Fritz. Svoju hypotézu vybudoval na elegantnej variante dôkazu nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky pravidelného päťuholníka, na ktorú museli podľa neho pytagorovci nevyhnutne naraziť pri odhalení geometrickej konštrukcie pentagonu (podrobný postup pozri 7, s. 566—567). Pokiaľ ide o historické fakty, vieme, že pytagorovci si päťuholník vysoko cenili, ba dokonca ho pozdvihli na svoj emblém. No a pretože prvé skúmania pravidelného dodekaedra, ktorého strany tvorí 12 päťuholníkov, sa spájajú s menom Pytagorovho žiaka Hippasa z Metapontu (starší Zenónov súčasník), von Fritz ho považuje za autora celého dôkazu. Zostáva však pritom nejasné, prečo Platón dôkaz iracionality $\sqrt{5}$ pripisuje jednoznačne Theodorovi a nie Hippasovi.

Z ostatných hypotéz uvediem ešte názory dvoch našich autorov. Kolman navrhuje, že myšlienka iracionality $\sqrt{2}$ mohla vyplynúť z pytagorovského záujmu o hudobnú náuku. Konkrétne, navodzuje ju disonancia, ktorú obdržíme pri rozdelení oktávy (zadnej pomerom 1:2) na dva rovnaké diely ($\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$, odkiaľ $y : y = \sqrt{2}$) [10, s. 87]. Hejný pozri 8] sa zasa vo svojom pokuse o rekonštrukciu opiera o špecifický charakter chápania čísla v ranej pytagorovskej škole (tzv. figurálne čísla).

Nebudem sa púšťať do analytického komentára týchto možností, pretože by nás to odviedlo od hlavného zámeru štúdie — ponúknuť novú alternatívu dôkazu. Koniec koncov, z rýdza logického hľadiska sú všetky návrhy rovnocenné a torzovitý charakter našich historických vedomostí nám nedovoľuje jednoznačne rozhodnúť v prospech žiadneho z nich. Vo svojom variante vychádzam z faktu, že pytagorovci poznali postupnosti stranových a diagonálnych čísel, ktoré celočíselnej hodnote strany štvorca (stranové číslo s_n) umožňujú priradiť najbližšiu celočíselnú aproximáciu veľkosti uhlopriečky (diagonálne číslo d_n). V Proklových komentároch môžeme nájsť aj explicitný návod na generovanie združených dvojíc $[s_n, d_n]$ stranových a diagonálnych čísel [14, II 27], ktorý, zachytený prehľadne v súčasnej symbolike, znie: $s_{n+1} = s_n + d_n$; $d_{n+1} = 2s_n + d_n$. Nepoznáme síce spôsob, ako k tomuto poznatku pytagorovci prišli, no geometrickú konštrukciu, ponúkajúcu jeho názornú evidenciu, príznačnú pre pytagorovský štýl dôkazu, nie je ťažké nájsť. Je zachytená na obr. č. 1.

Ak pytagorovci odhalili vzťahy medzi diagonálnymi a stranovými číslami naozaj prostredníctvom uvedenej konštrukcie, potom by zrejme predpokladali ich totožnosť so skutočnou stranou a uhlopriečkou. Až idea neobmedzenej deliteľnosti, uplatnená v Zenónových apóriách, ich mohla upozorniť na prvok nesúmerateľnosti potenciálne obsiahnutý v konštrukcii, a tým i na netotožnosť



Obr. č. 1.

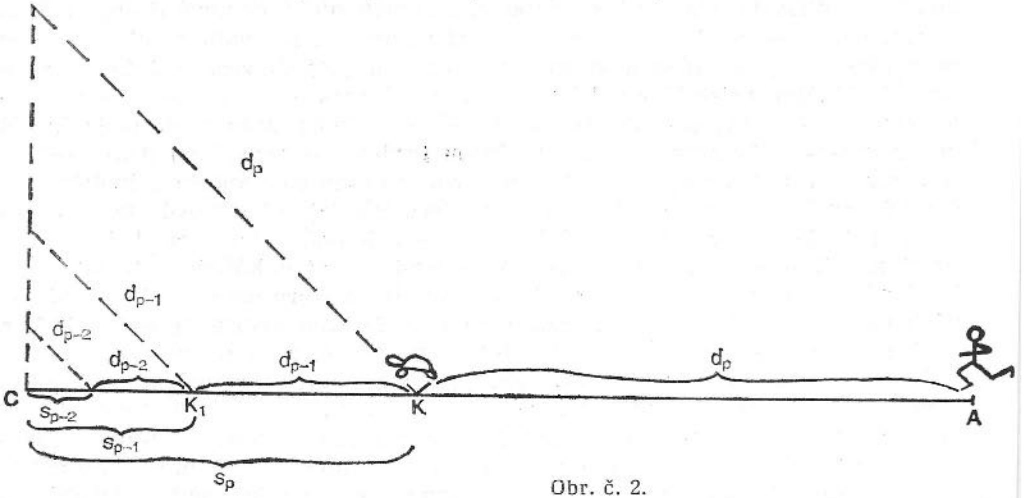
diagonálneho čísla so skutočnou uhlopriečkou. Inšpirácia zo strany Zenóna mohla mať v zásade rôzne silnú podobu. Ak budeme predpokladať, že pytagorovci prevzali do svojho dôkazu len všeobecný motív neobmedzenej deliteľnosti, potom Zenónov vplyv môžeme vztiahnuť už na jeho prvé vystúpenie, týkajúce sa apórií proti mnohosti. Pytagorovci však nemuseli odhliadnuť od konkrétnej náplne apórií. Celý dôkaz môžeme totiž ľahko pochopiť ako matematickú verziu konkrétnej apórie, totiž apórie *Achilles a korytnačka.* V tomto prípade by dôkaz zohrával úlohu geometrického modelu apórie, ktorým sa pôvodne mohli pytagorovci pokúšať apóriu vyvrátiť, pričom obdržali neželaný výsledok — dôkaz nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca.

Pripomeňme si znenie uvedenej apórie. Jej lakonické podanie, náležiace snáď samotnému Zenónovi, nájdeme v Aristotelovej *Fyzike:* „Zenón má štyri dôkazy o pohybe, ktoré spôsobujú ťažkosti tým, čo ich chcú riešiť. ... Druhý je takzvaný „Achilles". Podľa neho pomalšieho tvora nikdy nemôže dohoniť najrýchlejší, pretože prenasledujúci vždy musí prísť najprv ta, odkiaľ vybehol utekajúci, takže pomalší vždy musí byť o niečo vpredu" (1, s. 182). Formulácia apórie vedie k členeniu pohybu na jednotlivé fázy — zakaždým, keď Achilles dobehne na korytnačkine miesto, začína sa nová fáza pohybu. Tým, že Achilles postupne prekonáva korytnačkine etapy, stávajú sa tieto časťami jeho celkovej dráhy. Ak prijmeme tvrdenie o súmerateľnosti celku a jeho častí, potom máme zaručenú súmerateľnosť Achillovej dráhy s korytnačkinými úsekmi. Pretože Achilles je rýchlejší, budú prekonávané etapy stále menšie, pričom neustále dobiehanie nesie v sebe obsiahnuté ich neobmedzenú deliteľnosť. Pri dobehnutí korytnačky Achillom bude celková dráha korytnačky časťou dráhy Achilla a ako taká bude s ňou súmerateľná. Spolu s tým sme však tieto dráhy zložili z úsekov, ktoré sa neohraničene zmenšujú, takže nedokážeme fixovať mierku, pomocou ktorej ich môžeme odmerať. Celkové dráhy musia byť nesúmerateľné. Dostávame spor.

V striktnom slova zmysle si problém nesúmerateľnosti obsiahnutý v apórii môžeme uviesť dvojakým spôsobom — dynamicky a staticky. Dynamická verzia vychádza z odmietnutia dobehnutia korytnačky, zatiaľ čo statická toto dobehnutie predpokladá. V prvom prípade veličiny, ktoré realizujú svojím pohybom Achilles a korytnačka, nedokážeme porovnať, pretože sa neustále menia. Achilles je odsúdený na ustavičné dobiehanie a celkové dráhy Achilla a korytnačky sa nikdy nerealizujú. Medzi nejestvujúcimi veličinami sa zrejme márne budeme pokúšať stanoviť pomer. V druhom prípade zasa nedokážeme porovnať aktuálne existujúce veličiny realizované korytnačkou a Achillom po ukončení naháňačky, pretože neobmedzená deliteľnosť dráh prekračuje každú možnú mierku. Všimnime si, že redukciou tvrdenia o neustálom dobiehaní na tvrdenie o neustálom zmenšovaní priestorových etáp sme apóriu ochudobnili o časový aspekt. Geometrizácia apórie, preferujúca jej priestorovú stránku, odkrýva teda len jednu vrstvu apórie a nie je schopná vyjadriť sa k hlavnému problému, k problému pohybu. Inými slovami, ak aj dokážeme geometrickou konštrukciou zostrojiť miesto stretnutia Achilla a korytnačky pri zadaní prvých úsekov, ktoré prekonajú, neznamená to, že sme apóriu vyriešili. Apória totiž priamo neodmieta lokalizáciu cieľa v priestore, no spochybňuje jeho dosiahnutie v reálnom čase. Pravdupovediac, pytagorovcov sa polemika s pohybom v zmysle nemožnosti jeho ukončenia nemusela veľmi dotknúť. Avšak výklad apórie, podmieňujúci dobehnutie korytnačky nesúmerateľnosťou celkových dráhových úsekov, zasahuje ich učenie naplno. Pre úplnosť ešte uveďme, že súmerateľnosť celku a častí náväzne spochybňuje apória *Dichotómia*. Táto skutočnosť prehľadne vystupuje v reformulácii apórie, s ktorou prišla Janovskaja. Podľa nej nás apória *Dichotómia* stavia pred problém odmerať dráhu neustále zmenšujúcim sa pravítkom (9, s. 172).

Zostáva nám spojiť apóriu *Achilles a korytnačka* s pytagorovskou znalosťou stranových a diagonálnych čísel. Videli sme, že apória spochybňuje súmerateľnosť veličín, ktoré sú zadané konštruktívne, a práve túto požiadavku spĺňa zadanie stranových a diagonálnych čísel vo forme postupnosti. Naviac, a to je veľmi dôležité, ak si zvolíme východziu dvojicu, o ktorej budeme predpokladať, že ju tvoria prirodzené čísla, potom musia byť prirodzenými číslami aj všetky odvodené dvojice, pretože sú určené ako kombinácie súčtu predchádzajúcich členov ($s_{n+1} = s_n + d_n$; $d_{n+1} = d_n + s_n + s_n$). Postupnosti tak automaticky generujú veličiny súmerateľné s výchozími. Modelovanie apórie prostredníctvom stranových a diagonálnych čísel vedie k jednej zmene. Namiesto rastúcich postupností budeme uvažovať postupnosti klesajúce ($s_n = d_{n+1} - s_{n+1}$; $d_n = 2s_{n+1} - d_{n+1}$). Z hľadiska generovania dvojíc tento obrat nie je podstatný a záleží len na nás, ktorú postupnosť (klesajúcu či rastúcu) si vyberieme. Obr. č. 1 nám názorne predvádza rovnocennosť oboch prípadov. No práve toto obrátenie postupnosti, stimulované zohľadnením apórie, vedie okamžite k dôkazu nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca (obr. č. 2).

Nech veľkosť počiatočnej vzdialenosti medzi Achillom, štartujúcim z miesta A, a korytnačkou, vybiehajúcou z miesta K, je rovná diagonálnemu číslu d_p. Po vyštartovaní Achilles dobehne na východzie miesto korytnačky (K), pričom tá zatiaľ stihne prejsť vzdialenosť (KK_1) rovnajúcu sa hodnote o stupeň menšieho diagonálneho čísla d_{p-1}. Prekonávané úseky budú teda sledovať postupnosť diagonálnych čísel (resp., čo je to isté, Achilles a korytnačka sa budú pohybovať po uhlopriečkach pravouhlých trojuholníkov), čím máme zaručené jednak ich proporcionálne zmenšovanie a jednak prenos súmerateľnosti. Z obr. č. 2 je evidentné, že korytnačka sa bude svojím pohybom snažiť realizovať veličinu rovnajúcu sa prvému staronovému číslu (strane pravouhlého trojuholníka, ktorého preponu tvorí počiatočná vzdialenosť medzi Achillom a korytnačkou KA), pričom platí: $s_p = d_{p-1} + d_{p-2} + \ldots + d_{p-r} + \ldots +$ ad inf.



Obr. č. 2.

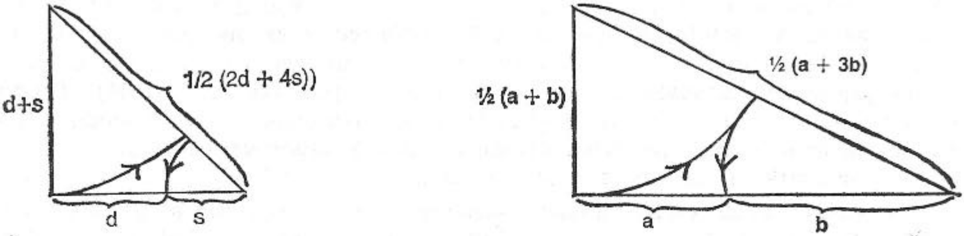
Stranové číslo s_p má byť prirodzené, no zároveň sa má rovnať nekonečnému súčtu prirodzených diagonálnych čísel. Dostávame spor. Nesmie teda platiť východzí predpoklad, čiže dvojica (s_p, d_p), tvorená z prirodzených čísel, sa nemôže kryť so stranou a uhlopriečkou štvorca. Práve tento záver je zohľadnený pri rozlišovaní medzi vyjadriteľnou uhlopriečkou, zastúpenou diagonálnym číslom, a uhlopriečkou skutočnou, nevyjadriteľnou prirodzeným číslom.

V úvahe sme zatiaľ rešpektovali konštatovanie neustáleho dobiehania. V matematickej verzii sa nám táto skutočnosť premietla do tvrdenia, že veličina s_p (celková dráha korytnačky) sa bude skladať z neobmedzeného počtu neustále sa zmenšujúcich diagonálnych čísel. Pytagorovský systém však vychádzal z toho, že základ ľubovoľnej veličiny tvoria nedeliteľné jednotky, zohrávajúce úlohy svojráznych monád. Inými slovami, generovanie stále menších prirodzených čísel sa musí zastaviť na jednotke (resp., pretože jednotka ako monáda v presnom slova zmysle číslom nebola, na dvojke). V súlade s tým museli pytagorovci odmietnuť Zenónovu požiadavku neobmedzenej deliteľnosti. Predpokladajme teda spolu s nimi, že Achilles korytnačku po určitom konečnom počte krokov dobehne v bode C (obr. č. 2). Mimochodom, uznanie základných etalónov problém pohybu ešte nerieši. Ako prvá totiž dosiahne základný etalón korytnačka a keď k nemu dorazí Achilles, korytnačka sa už stihne premiestniť práve o dĺžku etalónu. Ďalej sa už obaja pohybujú len v medziach etalónov, ich pohyby sa vyrovnávajú a Achilles dokonca stráca výhodu rýchlejšieho. Preto okrem zavedenia etalónu musíme pripustiť, že Achillovi sa v poslednom kroku podarilo prekonať svoj úsek spolu s úsekom korytnačky takpovediac na jeden záťah. Pozrime sa, či sa nám podarí zachrániť týmto krkolomným spôsobom súmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca.

Nech diagonálne číslo d_p reprezentuje uhlopriečku štvorca a stranové číslo s_p zasa stranu štvorca, pričom d_p a s_p sú nesúdeliteľné. Zo vzťahu $d_{n-1} = 2s_n - d_n$ vyplýva, že ak je číslo d_n párne (nepárne), potom sú párne (nepárne) všetky generované diagonálne čísla. Uvažujme najprv prvú možnosť. V tomto prípade je d_p párne a s_p nepárne. Z obr. č. 2 „vidieť“, že pri dobehnutí korytnačky Achillom musí platiť $s_p = d_{p-1} + d_{p-2} + \ldots + d_{p-r}$. Pretože všetky diagonálne čísla sú v uvažovanom prípade párne, musí byť párny aj ich súčet — číslo s_p. Predtým sme však uviedli opak, takže číslo s_p má byť zároveň párne aj nepárne. Dostávame spor. A to dokonca v tvare, ktorý nachádzame u Aristotela. V jeho *Prvých analytikách* sa môžeme dočítať, že „uhlopriečka štvorca je nesúmerateľná so stranami, pretože by sa za predpokladu jej súmerateľnosti nepárne čísla rovnali párnym“ (2, s. 64). Druhú možnosť, podľa ktorej by uhlopriečka štvorca, zastúpená v našom modeli diagonálnym číslom, bola nepárna, vylučuje z hry Pytagorova veta ($d_p^2 = 2s_p^2$) spolu s poznatkom, že štvorec párneho čísla je číslo párne.

Zdôraznime, že verzia dôkazu nesúmerateľnosti operujúca s konečným počtom diagonálnych čísel je z pohľadu neskoršej euklidovskej matematiky, rešpektujúcej neobmedzenú deliteľnosť, logicky nekorektná. Zohľadňuje však pytagorovský pohľad na matematiku, ktorý reprezentuje svojím spôsobom atypickú logiku vedúcu k diskrétnemu chápaniu geometrie. Na túto predstavu nadviazala neskôr „bočná“ línia starogréckej matematiky, do ktorej môžeme zahrnúť Demokritovu koncepciu amér, Xenokratove nedeliteľné čiary, ako aj Platónove „atomárne“ trojuholníky. Možno práve táto skutočnosť prispela k tomu, že dôkaz sa nám nezachoval. Jeho infinitná modifikácia vychádzajúca z neobmedzenej deliteľnosti nevyhnutne považuje finitnú verziu za logicky chybnú, takže model si už tým pádom nemôže klásť nárok na riešenie apórie. Dôkaz sa prestáva spájať s pokusom o vyvrátenie apórie, veď jeho infinitná verzia jej svojím spôsobom dáva za pravdu. Geometrické určenie predpokladaného miesta stretnutia obchádza požiadavku apórie a neskladá postupne jednotlivé úseky dráhy. Pri ich neohraničenom množstve by nám to zrejme trvalo nekonečný čas. Pod vplyvom apórií si matematika oproti pôvodným pytagorovským ašpiráciám zúžila predmet svojho skúmania a vzdala sa nárokov postihnúť celý kozmos, vrátane jeho časovej, resp. pohybovej stránky. Spolu s odmietnutím možnosti matematizovať pohyb sa automaticky vyhla útokom zo strany pohybových apórií. Tie totiž spochybňovali pohyb, zatiaľ čo geometria sa svojím zameraním programovo obmedzila len na jeho priestorový aspekt a časovú stránku zo zorného poľa skúmania radšej vypustila. Pravda, problematika pohybu predsa len v latentnej podobe v gréckej matematike pretrváva, a to predovšetkým vo forme potenciálneho nekonečna, no rozbor tejto skutočnosti už presahuje rámec tejto štúdie.

Nakoniec ešte upozorním na príbuznosť navrhnutého postupu s hypotézou von Fritza, preferujúcou nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky päťuholníka. Konštrukcia pravidelného päťuholníka je spojená so znalosťou konštrukcie zlatého rezu, deliaceho úsečku na dve časti a, b tak, že platí $a{:}b = b{:}/a+b/$. Ak si porovnáme konštrukciu rezu s postupom, ktorý sme použili pri určovaní dráh Achilla a korytnačky, potom zistíme, že rozdiel je len v tom, že v našom prípade využívame pravouhlý trojuholník s rovnakými odvesnami, zatiaľ čo v prípade zlatého rezu je jedna z odvesien dvojnásobne dlhšia (obr. č. 3). Táto podobnosť nie je náhodná. Je dôsledkom toho, že obidve hypotézy využívajú vlastne rovnakú stratégiu. Vychádzame pri nej z rovnosti dvoch pomerov, umožňujúcej postupné zmenšovanie východzej geometrickej situácie, pričom jeden z členov pomerov je zadaný ako súčtová či rozdielová kombinácia ostatných. Práve táto posledná požiadavka zabezpečuje automatické prenášanie východzej mierky na všetky zmenšené prípady bez výnimky. Dostávame spor v podobe možnosti konštrukcie neobmedzene malých prirodzených čísel, pokiaľ budeme, samozrejme, považovať za prirodzené čísla i prvotnú dvojicu.



Obr. č. 3.

Analogickú geometrickú konštrukciu, akú som použil pri modelovaní apórie, navrhli v súvislosti s nesúmerateľnosťou uhlopriečky a strany štvorca Rademacher a Töplitz [15, s. 258]. Dôkaz však neuvádzajú v kontexte s diagonálnymi a stranovými číslami a ani so Zenónom. Využívajú pri ňom 2. teorému z X. knihy Euklidových *Základov:* „Keď sa z dvoch nerovnakých veličín striedavo odčíta zakaždým menšia od väčšej a zvyšok nikdy nedomeriava časti predchádzajúce, budú tieto veličiny nesúmerateľné" [6, s. 160]. Túto teorému dokazuje Euklides nepriamym spôsobom poukazom na spor spočívajúci v tom, že v prípade ich súmerateľnosti by sme v istom štádiu odčítania museli dospieť k veličine, ktorá by ako časť jednej z pôvodných veličín mala byť merateľná spoločným etalónom, no zároveň by mala byť menšia, ako je tento etalón. Ak v tomto dôkaze pochopíme vytvárané rozdiely ako úseky, ktoré Achilles a korytnačka postupne prekonávajú, a požiadavku o nedomeriavaní ako Zenónov záver o nemožnosti ukončiť celý pohyb, potom ho môžeme identifikovať ako svojrázny výklad apórie, pretlmočenej do „strohého" matematického jazyka.

LITERATÚRA

1. ARISTOTELES: Fyzika. In: Od Aristotela po Plotina. Antológia z diel filozofov. 2. zv. Bratislava 1973.
2. ARISTOTELES: První analytiky. Praha 1961.
3. ARISTOTELES: Druhé analytiky. Praha 1962.
4. DIELS, H.: Die Fragmente der Vorsokratiker. Berlín 1922.
5. DIOGENES LAERTIOS: Životopisy slávnych filozofov. Bratislava 1954.
6. EUKLEIDES: Základy. Praha 1907.
7. FRITZ, K. von: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlín 1971.
8. HEJNÝ, M.: Pséfoforia a iracionalita $\sqrt{2}$. Rozhledy matematicko-fyzikálne, 60, 1981/82. č. 3.
9. JANOVSKAJA, S.: Zenon Elijskij. In: Filosofskaja enciklopedija, t. 2, Moskva 1962.
10. KOLMAN, A.: Dějiny matematiky ve starověku. Praha 1968.
11. KOMAROVA, V. J.: Učenije Zenona Elejskogo. Leningrad 1988.
12. PLATON: Parmenides. Praha 1936.
13. PLATON: Theaitetos. Praha 1933.
14. PROCLUS DIADOCHUS: In Platonis Rem Publicam Commentarii. Lipsiae 1899.
15. RADEMACHER, H. — TÖPLITZ, O.: Von Zahlen und Figuren. Berlín 1930.
16. SZABÓ, A.: The Beginnings of Greek Mathematics. Budapešť 1978.
17. WAERDEN, B. L. van der: Probuždajuščajasja nauka. Matematika drevnevo Jegipta, Vavilona i Grecii. Moskva 1959.