

DYNAMICKE SYSTÉMY A VÝVOJOVÉ PROCESY

MILAN MEDVEĎ, Matematický ústav SAV, Bratislava

MEDVEĎ, M.: Dynamic Systems and Evolutionary Processes.
Filozofia 44, 1989, No. 3, p. 282.

The paper deals with the significance of mathematics in examining of various forms of existence and evolution of material systems. It shows heuristic application of mathematical methods in biological and social sciences.

The author concentrates on those mathematical methods which are capable, at the contemporary stage of scientific cognition, to reflect the evolutionary dynamics of live systems, viz. from the macroscopic level down to the level of the structure of cells and of genetic material — differential equation, difference equations, mathematical structures, the theory of singularities, of catastrophes, of bifurcations, the theory of dynamic systems, etc.

Simultaneously the author grasps the integrative function of mathematics in the examination of principles of the rise, existence and evolution of complex real systems.

V súčasnej dobe sme svedkami nahromadenia veľkého množstva vedeckých poznatkov, z ktorých veľká časť má kvantitatívny charakter a týka sa veľmi úzkeho okruhu otázok konkrétnej vednej disciplíny. Bez kvalitatívneho zovšeobecnenia a integrácie týchto poznatkov, ktoré by vyšlo za rámec jednotlivých vedných disciplín, však ťažko hovoriť o vede ako celku. Bez pochopenia podstaty objektívnej reality a jej vývojových charakteristík nemožno hovoriť o skutočne hlbšom vedeckom poznaní sveta. Špecializácia vo vedeckom výskume v rámci jednotlivých vedných disciplín je len výhodnou a z hľadiska organizácie výskumu často aj nevyhnutnou dľbou práce. Otázky vývoja sú tak zložité, že nielen vyžadujú pohľady z pozície poznatkov získaných v rámci jednotlivých vedných disciplín, ale je nevyhnutné vystihnúť takú podstatu vyplývajúcu z týchto poznatkov, ktorá má všeobecnejší charakter. Matematika je v tomto smere užitočným, zjednocujúcim nástrojom a má už v súčasnosti určité prostriedky na vystihnutie podstaty rozličných foriem existencie a vývoja systémov.

Dynamika evolúcie neživých foriem existencie hmoty bola už dávno skúmaná v rámci prírodných vied a vďaka aplikáciám matematických metód boli získané mnohé fundamentálne vedecké poznatky v oblasti fyziky, chémie, ktoré sa stali tiež základom pre rozvoj technických vied.

V súčasnosti sa vyvíja veľká aktivita v smere matematizácie biologických vied. Snaha o matematizáciu evolučných biologických procesov nie je nová. Jeden z prvých modelov týkajúcich sa zmien počtu jedincov živých druhov patrí T. Malthusovi, publikovaný r. 1798 [9]. Spojítej verzii tohto modelu, ktorý opisuje vývoj jedného druhu populácie, zodpovedá evolučná diferenciálna rovnica

$$\frac{dN(t)}{dt} = k N(t), \quad (1)$$

kde $N(t)$ je počet jedincov populácie v čase t a k je relatívna rýchlosť zmeny početnosti populácie v čase t . Riešením tejto rovnice je funkcia

$$N(t) = N(0)e^{kt}, \quad (2)$$

kde $N(0)$ je početnosť populácie v čase $t=0$. Ak $k>0$, potom $N(t)$ rastie do nekonečna a ak $k<0$, tak $N(t)$ klesá k nule pri t rastúcom do nekonečna. Pesimistické uzávery pre ľudstvo, ktoré vyplývajú z týchto dvoch prípadov, sú dobre známe. Prijateľný, avšak nereálny je prípad $k=0$, v ktorom je $N(t) = N(0)$ v ľubovoľnom čase t . Reálnejšie sú však modely, v ktorých je zodpovedajúca evolučná rovnica nelineárna, a kde je zahrnutý reálny predpoklad, že zdroje nevyhnutné pre existenciu populácie sú ohrozené. Prvý z takýchto modelov bol navrhnutý ešte roku 1825 v práci (3). Vo všeobecnosti, ak sa jedná o evolúciu početnosti n druhov, ktoré na seba navzájom vplývajú, možno ich evolučnú dynamiku opísať systémom diferenciálnych rovníc tvaru

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = N_i(t)f_i[N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)], \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, n$, kde $N_i(t)$ je počet jedincov i -teho druhu v čase t a $f_i[N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)]$ je relatívna rýchlosť zmeny početnosti i -teho druhu v čase t . Funkcie f_i závisia od druhu a ich tvar je v praxi získavaný experimentálne. Hlboké štúdie dynamiky vývoja početnosti populácií, založené na takýchto diferenciálnych matematických modeloch, urobil ako jeden z prvých známy matematik Vito Volterra. Jeho prvé práce týkajúce sa matematických modelov v biológii vyšli r. 1901 a dobre je známa aj jeho kniha (21), ktorá bola publikovaná r. 1931. Táto kniha nestratila na aktuálnosti ani v súčasnosti, o čom svedčí aj jej ruský preklad z roku 1976.

Cieľom tohto príspevku nie je zaoberať sa konkrétnymi matematickými modelmi vývoja početnosti populácií. Možno sa o nich viac dozvedieť napríklad z kníh (14), (15), pozri tiež (12).

Dynamika vývoja početnosti populácií je jav skôr sociologického než biologického charakteru a na vývoj štruktúry jednotlivých organizmov nemá vplyv. Ide teda o pohľad na vývoj živých druhov z akejsi makroskopickej úrovne. Oveľa zložitejší a doteraz záhadný je vývoj samotných jedincov-organizmov istého druhu, prípadne živej hmoty ako celku. Objaviť podstatu zákonitostí tohto vývoja v celej jeho šírke je zrejme ťažká úloha pre celú vedu.

K štúdiu organizmov možno opäť pristupovať z makroskopického

hľadiska a položiť si otázku, prečo majú organizmy určité formy, tvary, symetrie, prípadne nesymetrie a prečo v určitom štádiu vývoja sa menia, prípadne vznikne nový druh. Určité elementárne matematické štúdie [nie elementárne z hľadiska matematického, ale biologického] morfológie organizmov urobil R. Thom. Svoju matematickú teóriu hladkých funkcií závislých od parametrov, tzv. teóriu katastrof, využil v úvahách o morfológii živých organizmov, a tie sú zhrnuté v jeho knihe (20). Úvahy R. Thoma týkajúce sa aplikácií matematickej teórie katastrof obsahujú, prirodzene, mnohé zjednodušenia skutočnosti. Existuje aj dosť takých interpretácií teórie katastrof, najmä v oblasti sociológie a ekonómie, ktoré nemajú žiadne vedecké opodstatnenie. Teória katastrof, ako matematická teória singularít hladkých funkcií závislých od parametrov, je však veľmi obsažná a pomáha modelovať mnohé reálne procesy, vrátane procesov evolučnej povahy. Thomove myšlienky môžu navyšiac poslúžiť ako metodický prostriedok pre tvorbu zložitých modelov reálnej skutočnosti. Dynamickou verziou Thomovej teórie katastrof je teória generických bifurkácií dynamických systémov (pozri 10).

Nedokonalosť všetkých doterajších poznatkov ľudstva, spočíva v značnej miere aj v tom, že sú zväčša lokálne vzhľadom na čas a priestor. Taký stav je čiastočne aj v matematickej teórii, ktorá sa opiera o klasický infinitezimálny kalkulus. Tento kalkulus je nevyhovujúci pre globálnu klasifikáciu objektov. Napríklad, pri štúdiu povrchov organizmov by sme zistili len to, že ľubovoľné dve veľmi malé časti povrchu tela sú z morfologického hľadiska nerozlíšiteľné. Telo má z hľadiska geometrickej štruktúry len malý počet typov lokálnych foriem, ktoré možno pomocou Thomovej teórie klasifikovať a tieto formy sú v určitom zmysle stabilné. K štúdiu morfológie organizmov je však potrebná globálna teória. Na to, akým spôsobom možno pospájať časti tak, aby sa získal celok, však zrejme nestačí ani globálna geometrická teória, ktorá spolu s tzv. globálnou analýzou a diferenciálnou topológiou (pozri 5) sú pomerne nové matematické disciplíny. Morfológia organizmov je zrejme aj odrazom procesov odohrávajúcich sa vo vnútri organizmov a funkcie jednotlivých organizmov. Nie je prekvapujúce, že aj na tejto úrovni štúdia živých organizmov ide o matematické objekty, v tomto prípade geometrického charakteru, ktoré sú nelineárne a majú globálny charakter. Tieto geometrické formy sú zrejme u jednotlivých druhov stabilné pre ich rôzne generácie, avšak len do toho času, kým nevznikne nový druh. V tomto čase sú zrejme zmenené niektoré podstatné parametre, ktoré sú pre existenciu druhu dôležité. Týmito parametrami môže byť vonkajšie prostredie, ale aj parametre, ktoré ovplyvňujú biochemické reakcie prebiehajúce vo vnútri organizmov. Tieto biochemické procesy možno opäť študovať na rôznych úrovniach, a to na úrovni vzťahov, resp. vzájomného pôsobenia buniek a na úrovni štruktúry samotnej bunky.

Vo vzťahoch medzi bunkami sú dôležité difúzne procesy — látková

výmena medzi bunkami, tieto procesy sa dajú modelovať pomocou diferenciálnych rovníc. Predpokladajme, že každá z buniek obsahuje m látok, ktoré navzájom reagujú. Pritom možno stav bunky v čase t charakterizovať m -ticou $[x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t)]$, kde $x^i(t)$ je koncentrácia i -tej látky v čase t . Pre vývoj koncentrácií týchto látok v čase možno odvodiť diferenciálne rovnice

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = f_i [x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t)], \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

pričom funkcie f_i závisia od typu reagujúcich látok a dajú sa získať experimentálne. Zapišeme systém (4) v tvare jednej rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (5)$$

kde $x = [x^1, x^2, \dots, x^m]$, $f = [f_1, f_2, \dots, f_m]$. Bunky sú obyčajne oddelené membránami, cez ktoré prebieha difúzia látok z jednej bunky do susednej druhej bunky. Predpokladajme, že máme N buniek rovnakého druhu. Ak by neboli prepojené membránami, tak by každej z nich zodpovedala rovnica tvaru (5), a teda by sme mali systém

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = f(x_2), \dots, \quad \frac{dx_N}{dt} = f(x_N), \quad (6)$$

kde $x_k = [x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^m]$, $k = 1, 2, \dots, N$, $x_k^j(t)$ je koncentrácia j -tej látky v k -tej bunke v čase t . Ak sú však bunky spojené, potom vývoj koncentrácie látok v každej bunke závisí tiež od vývoja rozdielu koncentrácií látok v navzájom susedných bunkách, a preto miesto systému tvaru (6) sa dostane systém tvaru

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1) + \sum_{i=1}^N g_{i1} (x_i - x_1) \quad \dots \quad (7)$$

$$\frac{dx_N}{dt} = f(x_N) + \sum_{i=1}^N g_{iN} (x_i - x_N),$$

kde funkcie g_{ij} sa opäť musia nájsť experimentálne. Rovnice (7), kde funkcie g_{ij} sú lineárne, sa nazývajú Raševského-Turingove rovnice (pozri 17).

Existujú pokusy modelovať vývoj genetického materiálu pomocou diferenciálnych rovníc (pozri 1; 16). Teda opäť možno urobiť akýsi dynamický model aj tej najzákladnejšej biologickej jednotky, v ktorej sú

ukryté podstatné informácie týkajúce sa vývoja jednotlivých organizmov aj druhov.

Urobili sme si prehľad niektorých možností matematického modelovania vývoja organizmov od makroskopickej úrovne až po úroveň štruktúry bunky a genetického materiálu. Modely, v ktorých sa používajú len diferenciálne rovnice, však ťažko môžu stačiť na vystihnutie celej podstaty existencie a vývoja živej hmoty. Dosť pravdepodobné je, že sa pri modelovaní evolúcie živej hmoty dajú uplatniť výsledky z teórie matematických štruktúr. Čiastočne sú už takto výsledky obsiahnuté v teórii singularít, ktorá sa už používa na modelovanie evolučných procesov. Aplikáciou teórie matematických štruktúr v populačnej genetike sa zaoberá kniha [8]. Teória bifurkácií matematických štruktúr zatiaľ ani neexistuje.

Ukázali sme, že v niektorých prípadoch možno použiť ako evolučné rovnice diferenciálne rovnice. Tieto rovnice však prakticky vždy závisia od nejakých parametrov, a teda majú vo všeobecnosti tvar

$$\frac{dx}{dt} = F_{\varepsilon}(x), \quad (8)$$

kde $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in R^N$ je N -rozmerná stavová premenná a $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\} \in R^k$ je k -rozmerný parameter. Dostávame tak vlastne k -parametrický systém tzv. autonómnych diferenciálnych rovníc, čo znamená, že pre každú hodnotu parametra ε je daná diferenciálna rovnica tvaru (8). Pre jednoduchosť predpokladajme, že pre ľubovoľnú hodnotu $x_0 \in R_N$ existuje práve jedno riešenie $x(t)$ rovnice (8) na intervale $(-\infty, \infty)$ spĺňajúce podmienku $x(0) = x_0$. Každé takéto riešenie definuje v R^N krivku $\gamma(x_0) = \{x(t) : t \in (-\infty, \infty)\}$, čo je vlastne množina hodnôt riešenia $x(t)$. Táto krivka sa nazýva trajektóriou rovnice (8) prechádzajúcou cez bod x_0 . Množina všetkých trajektórií rovnice (8) vyplní celý stavový priestor R^N . Ak je daná iná takáto rovnica

$$\frac{dx}{dt} = G_{\varepsilon}(x), \quad (9)$$

kde $x \in R^N$, $\varepsilon \in R^k$, potom možno definovať ekvivalenciu medzi rovnicami (8), (9) pre každé pevné $\varepsilon \in R^k$. Hovoríme, že rovnica (8) je ekvivalentná s rovnicou (9), ak existuje homeomorfizmus $h: R^N \rightarrow R^N$ (t. j. spojité zobrazenie h , ktoré má inverzné h^{-1} , pričom h^{-1} je tiež spojité), ktoré zobrazuje trajektórie rovnice (8) na trajektórie rovnice (9), pričom zachováva orientáciu trajektórií (smer narastania času, ktorý parametrizuje trajektórie, definuje orientáciu trajektórií). Prakticky to znamená, že fázový portrét trajektórií rovnice (8) sa zobrazením h spojite zdeformuje tak, že sa dostane fázový portrét trajektórií rovnice (9) (podrobnejšie v práci 10). Vzniká otázka, ako sa kvalitatívne mení fázový portrét trajektórií rovnice (8) pri zmene parametra ε , t. j. či sa rovnica (8)

môže pri zmene parametra zmeniť na rovnicu, ktorá už nie je ekvivalentná pôvodnej rovnici. Ak pre nejaké $\varepsilon = \varepsilon_0$ existuje také okolie $U(\varepsilon_0)$ tejto hodnoty parametra, že pre všetky $\varepsilon \in U(\varepsilon_0)$ je rovnica $\dot{x} = F_{\varepsilon_0}(x)$ ekvivalentná s rovnicou $\dot{x} = F_{\varepsilon_0}(x)$, potom hovoríme, že sa pri malej zmene parametra nemení štruktúra trajektórií, alebo tiež, že rovnica $\dot{x} = F_{\varepsilon_0}(x)$ je štrukturálne stabilná vzhľadom na malú zmenu parametra. Ak však pre ľubovoľné okolie $U(\varepsilon_0)$ hodnoty ε_0 existuje také $\varepsilon \in U(\varepsilon_0)$, že rovnice $\dot{x} = F_{\varepsilon_0}(x)$, $\dot{x} = F_{\varepsilon}(x)$ nie sú ekvivalentné, potom hovoríme, že v bode ε_0 nastáva bifurkácia trajektórií. To môže prakticky znamenať nielen zmenu štruktúry trajektórií, ale aj rozpad systému na navzájom nezávislé podsystemy, prípadne aj upevnenie väzieb podsystemov. Pre modelovanie evolúcie systémov má pojem bifurkácia očividný význam.

Štrukturálna stabilita systému (8) nemusí byť len vzhľadom na zmenu parametra, ale aj vzhľadom na malú zmenu celej pravej strany rovnice, t. j. zobrazenie F . Predpokladajme, že máme danú množinu F zobrazení a pre každú dvojicu zobrazení $F, G \in F$ je definovaná ich vzdialenosť $d(F, G)$ (metrika; pozri prácu 10). Zobrazenie F definuje diferenciálnu rovnicu $\dot{x} = F(x)$. Hovoríme, že táto rovnica je štrukturálne stabilná, ak existuje také $\delta > 0$, že pre ľubovoľné zobrazenie $G \in F$ také, že $d(F, G) < \delta$ sú diferenciálne rovnice $\dot{x} = F(x)$, $\dot{x} = G(x)$ ekvivalentné.

Uvažujme opäť rovnice závislé od parametra tvaru (8). Ak pre pevnú hodnotu $\varepsilon = \varepsilon_0$ je rovnica (8) štrukturálne stabilná, potom je zrejmé, že pre ε dostatočne blízke ku ε_0 je rovnica (8) ekvivalentná s rovnicou zodpovedajúcou hodnote parametra ε_0 , a teda v okolí ε_0 nenastáva bifurkácia. Pre ε dostatočne vzdialené od ε_0 však už bifurkácia nastať môže a vtedy systém stráca vlastnosť štrukturálnej stability. V praxi to môže znamenať evolúciu systému od jednoduchšej formy ku zložitejšej, ale aj naopak. Zložitosť systému, prípadne zložitosť bifurkácií systému, závisí od dimenzie stavového priestoru aj dimenzie parametra. Podrobná matematická analýza tzv. generických bifurkácií autonómnych diferenciálnych rovníc závislých od parametra sa nachádza v práci (10; pozri tiež 2), v ktorej sú uvedené aj iné základné poznatky z teórie dynamických systémov a ich bifurkácií, a tiež na to potrebné matematické základy z diferenciálnej topológie.

V predchádzajúcich úvahách sme použili ako modelový prostriedok diferenciálne rovnice. Pre modelovanie evolúcie početnosti populácií sú zrejme vhodnejšie diferenčné rovnice. Analýza takýchto rovníc je však v mnohých prípadoch oveľa zložitejšia ako pre diferenciálne rovnice. Náčrt niektorých problémov súčasnej teórie nelineárnych diferenčných rovníc možno nájsť v práci (18; 19).

Vzhľadom na to, že objekty, ktoré treba študovať v súvislosti s evolučnými procesmi v prírode, majú rôzny charakter, žiadajú sa všeobecnejšie definície pojmov štrukturálna stabilita a bifurkácia než tie, ktoré

sme definovali pre diferenciálne rovnice. Tieto pojmy možno skutočne definovať veľmi všeobecne, a nie sú doteraz v takomto zmysle rozšírené. Ak X je topologický priestor, na ktorom je daná nejaká relácia ekvivalencie, potom hovoríme, že prvok $x \in X$ je štrukturálne stabilný (vzhľadom na danú topológiu a danú reláciu ekvivalencie na X), ak existuje také okolie $U \subset X$ prvku x , že ľubovoľný prvok $y \in U$ je ekvivalentný s x . Takáto definícia štrukturálnej stability a pomocou nej odvodený prirodzeným spôsobom aj pojem bifurkácie sa nachádza v [10; 13]. Pomocou týchto definícií by sa mohla študovať štrukturálna stabilita a bifurkácie rôznych matematických štruktúr, čo je však vo všeobecnosti veľmi ťažká úloha. Pochopiteľné je, že problémy súvisiace s evolúciou živej hmoty, pre riešenie ktorých sú takéto výsledky potrebné, sú oveľa zložitejšie. Nie je preto vôbec prekvapujúce, že sa doteraz nedarí modelovať základné procesy prebiehajúce v živých organizmoch.

V súčasnosti sa venuje značná pozornosť štúdiu globálnych vlastností dynamických systémov. V tejto súvislosti sa študujú hlavne tzv. divné atraktory dynamických systémov, ktoré sú charakteristické tým, že trajektórie na týchto atraktoroch sú veľmi citlivé na zmenu začiatočných podmienok a vykazujú určité neregulárne asymptotické vlastnosti. Úvodné definície k tejto teórii, ako aj informácie o literatúre možno nájsť v práci [10; 11; 13].

Určitý obraz o možnostiach využitia rôznych matematických metód pri modelovaní evolúcie živej hmoty možno získať zo zborníka [22], v ktorom je preberané množstvo rôznorodých aplikácií matematiky na riešenie problémov biologického charakteru.

V súvislosti so snahou o objavovanie základných princípov vzniku, existencie a vývoja zložitých reálnych systémov vzniklo mnoho vedeckých výsledkov v rámci rôznych vedných disciplín. V súčasnosti nadobúda veda čoraz viac interdisciplinárny charakter. Významnú integračnú úlohu tu zohráva matematika v celej svojej šírke. V súvislosti s reálnymi evolučnými procesmi, o ktorých sme sa v tomto príspevku zmienili, má značný význam súčasná teória dynamických systémov. Táto teória nie je len teóriou diferenciálnych rovníc, ako sa často zdôrazňuje. Stretávajú sa v nej mnohé matematické odbory, akými sú diferenciálna a algebrická geometria, všeobecná, diferenciálna a algebrická topológia, funkcionálna analýza, teória grúp, teória pravdepodobnosti a matematická štatistická, teória čísel, atď. Na tomto príklade vidieť, že samotná matematika má „interodborový“ charakter. Navyiac, matematika sa nikdy neuzatvárala do seba tak, ako sa to nematematickej verejnosti často zdá. Väčšina matematikov nepracuje len s formálnym matematickým jazykom, ale má konkrétne, reálne predstavy o matematických pojmoch a abstrakciách a ich súvislostiach s objektmi výskumu v rámci fyziky, chémie, biológie atď. Len tak mohli vzniknúť v rámci matematiky napríklad také významné pojmy ako sú štrukturálna stabilita, generická vlastnosť, bifurkácia (pozri 10) a pod., ktoré prenikli

ďaleko za rámec matematického výskumu. To, že sa často ani nevie, že takéto pojmy vznikli v rámci matematického výskumu, len potvrdzuje užitočnosť matematiky pre skúmanie objektívnej reality, a nemožno súhlasiť s názorom, že matematika je len akýsi pomocný aparát pre ostatné vedné disciplíny.

V súčasnosti sa často cituje tzv. synergetika [pozri 4; 7], ktorej sa pripisuje integračná úloha v rámci skúmania reálnych objektov a ich kvalitatívnych zmien. Zo všetkých názorov na jej funkciu sa zdá byť najpriateľnejší názor akademika B. B. Kadomceva, ktorý v predslove zborníka [6] charakterizuje synergetiku takto: „Synergetika — to nie je samostatná veda, ale skôr termín, hovoriaci o spoločnosti cieľov a matematických metód výskumu príbuzných nelineárnych javov v rôznych oblastiach vedy“. Každý termín, a teda aj synergetika, ktorý by prispel k prehĺbeniu interdisciplinárneho charakteru vedy má svoju cenu. Nemožno však synergetiku chápať ako akúsi všeobecnú a kvalitatívnu metódu skúmania vzniku nových kvalít v systémoch vyznačujúcich sa nelineárnou dynamikou.

LITERATÚRA

1. AKIN, E.: The Geometry of Population Genetics. Springer-Verlag 1979.
2. BRUNOVSKÝ, P. — MEDVEĎ, M.: Bifurkácie negradientnych systémov. In: Pokroky Matematiky, Fyziky, Astronómie 27/1982, č. 2.
3. GOMPERTZ, B.: On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Morality. In: Philosophy Translations 115, 1825.
4. HAKEN, H.: Synergetics. An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-organization in Physics, Chemistry and Biology. Springer-Verlag 1977. Ruský preklad, Moskva 1980.
5. HIRSCH, M. W.: Differential Topology. Springer-Verlag 1977. Ruský preklad, Moskva 1979.
6. KADOMCEV, B. B.: Synergetika. Moskva 1984.
7. KREMPASKÝ, J. a kol.: Synergetika. Bratislava 1988.
8. LJUBIČ, J. I.: Matematičeskije struktury v populacionnoj genetike. Kijev 1983.
9. MALTHUS, T. R.: An Essay on the Principle Population. Johnson, London 1798. Ruský preklad, SPb 1908.
10. MEDVEĎ, M.: Dynamické systémy. Bratislava 1988.
11. MEDVEĎ, M.: Katastrofy a potom už len chaos. In: Matematické obzory 26/1986.
12. MEDVEĎ, M.: Úvahy o netradičných aplikáciách matematiky. In: Matematické obzory 9/1976.
13. MEDVEĎ, M.: Niektoré kvalitatívne metódy v súčasnej matematike. In: J. Dubníčka a kol.: Materializácia a formalizácia vo vedeckom poznaní. ÚFS SAV, ŠTÚDIE/PRA-MENE 1986, č. 5.
14. POLUEKTOV, P. A. — PYCH, J. A. — ŠVYRIOV, J. A.: Dinamičeskije modeli ekologičeskich sistem. Leningrad 1980.
15. PYCH, J. A.: Ravnovesije i ustojčivost v modeljach populacionnoj dinamiki. Moskva 1983.
16. SHAHSHAHANI, S.: A New Mathematical Framework for the Study of Linkage and Selection. In: Memoirs AMS 211/1979.
17. SMALE, S.: Matematičeskaja model' vzaimodejstvija dvuch kletok ispolzujuščaja

- uravnenije Turinga. In: Marsden, J. — Mc Crecken: The Hopf Bifurcation and its Applications. Ruský překlad, Moskva 1980.
18. SMÍTAL, J.: O funkciách a funkcionálnych rovniciach. Bratislava 1984.
19. ŠARKOVSKIJ, A. N. — MAJSTRENKO, J. L. — ROMANENKO, E. J.: Raznostnyje uravnenija i ich priloženija. Kijev 1986.
20. THOM, R.: Stabilité Structurale et Morphogénèse. Paris 1973.
21. VOLTERRA, V.: Theorie Mathématique de la Lutte Pour la Vie. Paris 1931.
22. ZAOTIN, A. J. — PRESNOV, E. V.: Matematičeskaja biologija razvitija. Moskva 1982.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ РАЗВИТИЯ

Милан Медведь

Статья посвящена вопросу о значении математики при исследовании различных форм существования и развития материальных систем. Автор показывает, как математические методы постепенно находят эвристическое применение в биологических и общественных науках.

Автор обращает внимание на те математические методы, которые способны на современном уровне научного познания отражать эволюционную динамику живых систем, причем от макроскопического уровня вплоть до уровня структуры клетки и генетического материала — дифференциальные уравнения, математические структуры, теория сингулярностей, теория катастроф, теория бифуркаций, теория динамических систем и т. д.

Автор одновременно стремится объяснить интегративную функцию математики при исследовании основных принципов возникновения, существования и развития сложных реальных систем.

DYNAMISCHE SYSTEME UND ENTWICKLUNGSPROZESSE

Milan Medved

Die Studie nimmt Bezug auf die Bedeutung der Mathematik bei der Erforschung verschiedener Formen der Existenz und Entwicklung von materiellen Systemen. Sie macht deutlich wie mathematische Methoden allmählich in den biologischen und Gesellschaftswissenschaften Anwendung finden.

Der Vf. richtet sein Augenmerk auf mathematische Methoden, die auf der gegenwärtigen Stufe der wissenschaftlichen Erkenntnis geeignet sind die Entwicklungsdynamik lebender Systeme zu widerspiegeln und zwar von der makroskopischen Ebene bis zur Ebene der Zellenstruktur und des genetischen Materials.