DVE RENESANCIE DESCARTESOVÝCH MYŠLIENOK

JÁN GATIAL — MILAN HEJNÝ, Katedra matematiky SVŠT, Bratislava — Katedra geometrie MFF ÚK, Bratislava

GATIAL, J. HEJNÝ, M.: Two Revivals of Descarte's Ideas. Filozofia 42, 1987, No. 6. p. 680

The paper is dedicated to the methodological analysis of Descarte's method of transformation as a method of solving problems and of the idea of universalism — his thesis on the existence of the global method of investigating the world. It is shown by examples from the history of mathematics how Descarte's method of semantical transformation led into the discovery of analytic geometry and resulted in the discovery of structural morphism and isomorphism, represented by theories of geometrical and algebraic structures.

Matematické myslenie, chápané v tom zmysle ako dnes, teda opierajúce sa o abstraktné a idealizované pojmy a o deduktívne prepojenie vzťažitostí vzniká na začiatku 6. stor. pred n. l. Možno povedať, že v priamom kontakte s týmto prelomom ľudskej kultúry vzniká aj filozofia. Spojenie filozofie a matematiky symbolizuje osobnosť Tálesova a plne ho realizuje génius Pytagora. Popredné miesto v dvaapoltisícročnej histórii nositeľov filozoficko-matematickej pochodne patrí francúzskemu mysliteľovi René Descartovi (1596—1650). Jeho dielo je plným uvedomením si rozumu ako najmocnejšieho nástroja človeka. Jeho práca (1) nie je iba návod, „ako správne viesť svoj rozum a hľadať pravdu vo vedách" (je to názov druhej časti práce (1)), ale je aj nový postoj, nové uvedomenie si seba samého, nová iniciatíva. Hodnovernosť nového trendu významne potvrdili konkrétne vedecké výsledky, ktoré ilustrovali účinnosť novej metódy bádania v aplikačnej sfére. Všetky ostatné konkrétne Descartesove objavy svojou hĺbkou a významom značne prevyšuje objav matematický, presnejšie, objav metódy transformácie geometrických problémov na problémy aritmetické. Bol uverejnený r. 1637 ako tretia príloha *Rozpravy.*

Metódu transformácie geometrickej štruktúry na aritmetickú objavili súčasne a nezávisle na sebe dvaja mysliteľia R. Descartes a Pierre Fermat (1601—1665). Fermatova práca, hoci vyšla tlačou až r. 1697, kolovala medzi parížskymi matematikmi už od r. 1637, teda od roku vydania Descartesovej *Rozpravy* s prílohou *Geometria.* Podľa svedectiev súčasníkov bol Fermatov výklad prehľadnejší, jasnejší, a preto aj čítanejší. Ak dnes, napriek tomu spájame objav metódy transformácie viac s menom Descartesa ako Fermata (čo často historici matematiky považujú za nespravodlivé), tak príčinu treba vidieť v troch skutočnostiach:

1. Descartesova práca vyšla tlačou o 42 rokov skôr ako Fermatova.

2. Matematické výsledky, ktoré novou metódou získal Fermat, boli iba opätovným potvrdením výsledkov už známych, no Descartesovi sa podarilo rozriešiť problém dovtedy nevyriešený.

3. Fermat považoval novú metódu za objav čisto matematický, ale Descartes ho chápal v širšom filozofickom, či epistemologickom kontexte.

Poslednú z troch príčin pokladáme za najdôležitejšiu. Je to, pokiaľ vieme, prvý historicky doložený prípad, keď matematik osobitne skúma svoj vlastný objaviteľský proces, aby odhalil jeho tajomstvo a našiel mechanizmus objavovania. Descartes sa zamýšľa aj nad metodologickými dôsledkami svojich úvah. Má nádej, že podobne ako sa mu podarilo vyriešiť geometrické problémy ich prevodom na problémy aritmetiky, podarí sa v budúcnosti rozriešiť problémy fyziky ich transformáciou na matematické a neskôr takto aj problémy živej prírody a človeka. Teraz už vieme, že tento optimizmus bol príliš nadsadený. G. Polya v publikácii [2] píše: „A hoci Descartesov program nebol úspešný, bol to veľký projekt, lebo napriek svojej nerealizovateľnosti mal na vedu väčší vplyv ako tisícka malých projektov, ktoré sa prípadne aj realizovať podarilo."

Podstatou Descartesovej myšlienky je príbuznosť *geometria — aritmetika* (1), ktorá je sprostredkovaná súradnicovou sústavou. Je to vlastne slovník, pomocou ktorého možno geometrické pojmy prekladať do jazyka aritmetiky a naopak. Bodu A je priradená usporiadaná dvojica reálnych čísel, jeho súradníc (a_1, a_2); priamke p je priradená lineárna rovnica $ax + by = c$, atď. Naopak, aritmetické pojmy možno interpretovať geometricky: kvadratickej rovnici s dvoma neznámymi možno priradiť kužeľosečku, sústavu troch lineárnych rovníc s troma neznámymi možno chápať ako tri roviny v priestore, atď.

Zmyslom a cieľom príbuznosti (1) nie je len konštatovanie zaujímavej skutočnosti, ale jej využitie pri riešení problémov. Mnohokrát sa náročná a ťažko riešiteľná úloha v rámci niektorej z uvedených disciplín stáva podstatne jednoduchšou, keď ju preložíme do jazyka druhej disciplíny.

V prvej polovici 17. stor. nebola ešte idea analytickej geometrie rozvinutá tak, ako sme to vyššie uviedli, lebo v matematike sa ešte nepracovalo so zápornými číslami. Z uvedeného dôvodu nebolo ešte možné hovoriť o priradení *bod — dvojica jeho súradníc* ako o vzťahu vzájomne jednoznačnom. Každú geometrickú situáciu, ktorú Descartes, či Fermat skúmali, bolo najprv treba umiestniť vzhľadom na súradnicové osi tak, aby sa celá nachádzala v prvom kvadrante. Toto však nebolo vždy možné. Čiary nekonečne dlhé ako priamku, hyperbolu, atď. nie je možné umiestniť do jedného kvadrantu. V takýchto prípadoch bolo potrebné sa uspokojiť s vyjadrením časti uvažovaného útvaru, podobne ako sa syntetický geometer uspokojí s nakreslením častí kriviek. Ešte nepríjemnejšia bola tá skutočnosť, že nájsť vhodné umiestnenie vstupných prvkov úlohy vzhľadom na súradnicové osi nebolo možné hneď na začiatku. V priebehu riešenia sa objavovali nové objekty a ak niektorý z nich padol mimo pracovný kvadrant, tak bolo treba posúvať súradnicové osi a transformovať súradnice všetkých už zostrojených objektov.

Neznalosť záporných čísel bola prvým vážnym rozdielom medzi dnešným a Descartesovým chápaním analytickej geometrie. Druhým rozdielom bol charakter interpretácie príbuznosti (1). Ani Fermat, ani Descartes si neuvedomovali, že ide o vzťah symetrický. Obidvaja ho chápali ako možnosť prekladať úlohy geometrie do jazyka aritmetiky a opačný smer úvah, od aritmetiky ku geometrii nájdeme u nich len vtedy, keď treba aritmetické výsledky interpretovať geometricky. Vyjadrené v súčasnom jazyku, Descartes nevidel v príbuznosti (1) izomorfizmus dvoch štruktúr, ale len možnosť transformácie geometrickej štruktúry na aritmetickú. Ani metodologické zovšeobecnenie, ku ktorému Descartes v *Rozprave* dochádza, nehovorí o projekte hľadania izomorfizmov medzi matematikou a fyzikou, ale o možnosti transformácie úloh fyziky na úlohy matematické. Z hľadiska historického je to postoj pochopiteľný a v danej dobe jedine možný. Začiatok 17. stor. je upriamený na hľadanie nových perspektív otvorených pojmov premennej veličiny. Pritom euklidovská geometria predstavuje najstabilnejšiu súčasť matematického poznania a pôsobí dojmom uzavretej disciplíny. Naopak aritmetika, vďaka úspechom pri riešení rovníc 3. a 4. stupňa, ktoré začali už pred viac ako storočím, predstavovala rozvíjajúcu sa disciplínu a sľubovala prevziať žezlo vlády nad matematikou. Myšlienka pokúsiť sa staroveké problémy stagnujúcej geometrie vyriešiť použitím nových objavov aritmetiky, je preto celkom prirodzená. Veľkým objavom sa táto myšlienka stáva až vtedy, keď sa nájde metóda, ktorá transformáciu geometrických situácií na aritmetické univerzalizuje. K vykonaniu ďalšieho kroku od transformačného chápania vzťahu (1) k chápaniu izomorfickému, neboli ešte podmienky. Neexistoval dôvod, ktorý by tento objav motivoval.

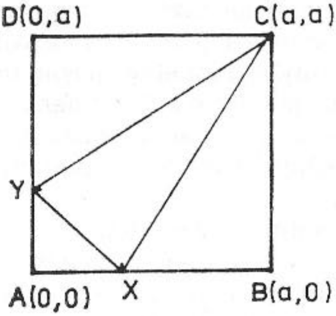
Podstatu myšlienky transformácie geometrickej úlohy na aritmetickú sformuloval Descartes v tvare návodu: „Považujme úlohu za vyriešenú a označme každú, v nej sa vyskytujúcu veličinu, za známu i neznámu. Bez toho, aby sme medzi nimi robili rozdiel, využime to, čo je dané, aby sme hľadanú veličinu vyjadrili dvojakým spôsobom. Tak sa získa rovnica. Rovníc zostavíme toľko, koľko je neznámych. Ak to nie je možné, tak úloha je neurčitá a potom môžeme niektoré veličiny voliť.“

Ilustrujeme uvedený návod príkladom. Ukážeme, ako by Descartes riešil úlohu: Daný je štvorec ABCD so stranou $AB=a$. Najdite taký

a) rovnoramenný

b) rovnostranný trojuholník CXY, že X leží na strane AB a Y leží na strane AD. Pri riešení budeme používať súčasnú symboliku.

Nakreslíme obrázok 1., na ktorom je úloha už akoby vyriešená. Na obrázku je zároveň ukázané, ako volíme súradnicové osi, ktoré nám umožnia aritmetizovať každý v úlohe vystupujúci geometrický objekt. Známe body A, B, C, D, aj neznáme body X, Y sú aritmetizované svojimi súradnicami pomocou čísel a, x, y. Číslo a poznáme, čísla x, y nepoznáme. Riešme najprv časť a):



obr. 1

Využijeme to, čo je dané. Niektoré dve zo strán XY, CX, CY trojuholníka CXY sú zhodné. Aritmetické vyjadrenie dĺžok strán je

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|CX| = \sqrt{(a - x)^2 + a^2}$$
$$|CY| = \sqrt{(a - y)^2 + a^2}$$

Vieme, že niektoré z nich sú rovnaké. Zoberme prípad CX=CY (zvyšné dva prípady by vyzerali podobne).
Získame rovnicu

$$x^2 - 2ax = y^2 - 2ay$$

Viac rovníc zostaviť nemôžeme. Úloha je teda neurčitá a jednu z neznámych môžeme voliť. Ak zvolíme napríklad $y = \frac{a}{2}$, tak bude aj $x = \frac{a}{2}$

Riešme teraz časť b):

V tomto prípade je CX=CY=XY. Odtiaľ, okrem uvedenej rovnice v časti a) získame ešte ďalšiu rovnicu

$$a^2 + a^2 - 2ay = x^2$$

Máme teda toľko rovníc, koľko je neznámych.

Z ilustrácie vidieť, že metodický návod nestratil svoju silu ani po tristopäťdesiatich rokoch.

Doteraz sme sa obmedzili len na Descartesov objav. Snažili sme sa ho opísať z dvoch hľadísk: metodologického a matematického. Urobme teraz hlbšiu analýzu. V histórii európskeho myslenia budeme sledovať len prúd, ktorý viedol k objavu analytickej geometrie a ktorý neskôr vyústil k objavu štrukturálneho morfizmu a izomorfizmu. Podľa (3) rozložíme historickú periodizáciu do 5 etáp: motivácia, tvorba separovych modelov, tvorba univerzálnych modelov, poznanie = objav, jeho krištalizácia, ktoré zákonite nasledujú po sebe. Zmeny vedúce od separovaných modelov k univerzálnym a od nich k poznatku sú zmenami kvantity poznatkov nižšej abstrakčnej úrovne na kvalitu, ktorá je charakterizovaná vyššou akstrakciou.

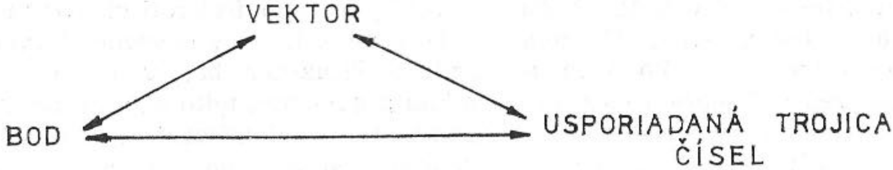
Fylogenetické skúmanie objavu analytickej geometrie je výhodné rozložiť do dvoch zložiek. V prvej sa treba zamerať na myšlienku transformácie ako metódy riešenia problémov a v druhej si všímať ideu univerzalizmu, teda Descartesovu tézu o existencii globálnej metódy skúmania sveta.

Transformácia problému je najfrekventovanejšou metódou jeho riešenia. Prvou sémantickou transformáciou matematického myslenia je Pytagorova psefofória. Je to objav v istom zmysle duálny k objavu Descartesovmu, lebo išiel opačným smerom, teda od kalkulačných návodov k geometrii. Grécke slovo pséfos znamená oblý kamienok. Už v homérskej dobe sa v celom stredomorí používali oblé kamienky pri počítaní. Umenie počítania pomocou pséfoi sa menovalo psefofória. Malo praktický cieľ — riešiť problémy všedného života. Pytagorova filozofická koncepcia, založená na čísle ako dominantnej substancii, vniesla do psefofórie celkom novú motiváciu. Čísla sa stali nositeľmi všetkých význačných kvalít vtedajšieho sveta a získali tým dovtedy nepoznanú dôležitosť. Otázka, či súčet párnych čísel je vždy číslo párne, nebola pre gréckeho obchodníka zaujímavá, no pre Pytagora mohla mať prvoradý význam, lebo mu podľa jeho predstáv odhaľovala bázový zákon kozmu. Nová filozofická koncepcia postavila pred človeka matematické problémy, ktoré by bežná reálna prax ešte dlho nepriniesla. Tvrdenie, že súčet ľubovoľných dvoch párnych čísel je vždy číslo párne, je pre malé čísla overiteľné experimentálne, čo samozrejme nemusí mať všeobecnú platnosť. Novú techniku overovania tvrdenia „pár + pár = pár" objavil Pytagoras a je ňou tvarová psefofória. Psérie usporiadal do tvaru obdĺžnika, ktorého jeden rozmer je 2. Premena kopy kamienkov na tvar obdĺžnika, štvorca, trojuholníka, atď. je spojená so sémantickou zmenou ako čísla, tak jeho vlastností a vzájomných číselných vzťahov. Číslo už nie je iba hromada, ktorej jediným bezprostredne vnímaným fenoménom je mnohosť. Je to tvar, v ktorom vidíme jeho vlastnosti deliteľnosti a ktorý môžeme kombinovať s inými tvarmi k získaniu jemných a ďaleko nie očividných informácií.

Prvú sémantickú transformáciu v histórii matematiky objavil teda Pytagoras. Dalo by sa očakávať, že podobný jav budeme v histórii matematiky pozorovať dosť často. No opak je pravda. Takú hlbokú sémantickú transformáciu, ako Pytagoras, uskutočnil už až Descartes. Prvý geometrizoval kalkulus, druhý aritmetizoval geometriu. V obidvoch prípadoch sa jednalo o zásadný zlom, ktorý menil zorný uhol skúmania javov. V prípade Pytagora to bol objav o to väčší, že znamenal zároveň aj zrod matematiky. Objav Descartesa bol zatienený aktuálnejšou a širšou problematikou vznikajúceho infinitezimálneho počtu, k rozvoju ktorej sám nemálo prispel, ale na zásluhách ktorej sa už tak jasne nepodieľal. Geometria a aritmetika, ktoré sa Descartesovym objavom dostali do zdanlivej jednoty, sa pod vplyvom diferenciálneho počtu udržovali v predchádzajúcej vzdialenosti. Napríklad, rozvoj diferenciálnej geometrie, i keď bol po technickej stránke spracovávaný analytickými metódami, bol v pojmotvornej oblasti geometrický — názorný. Ďalším príkladom je spôsob hľadania invariantov, ktorý nevychádzal z analýzy rovníc, ako to bolo neskôr v teórii diferencovateľných objektov, ale z geometrických fenoménov krivky, či plochy. Ako geometria, tak aritmetika bola v tom čase v službách spojitých javov. Geometria preukazovala neoceniteľné služby svojou heuristikou a produkovaním množstva naliehavých a zaujímavých problémov. Aritmetika napomáhala kalkulatívne zvládnuť technicky čoraz náročnejšie problémy. Spoločná participácia geometrie a aritmetiky na riešení dominujúcich problémov infinitezimálneho počtu prirodzeným spôsobom odhaľovala nové vzťahy oboch oblastí, no tieto objavy boli viac-menej sekundárne produkty hlavného vývoja nasmerovaného na fenomén spojitosti. Vzťah aritmetiky a geometrie ako nosný fenomén poznávania vzťažitosti dvoch štruktúr sa neštudoval.

Koniec 18. a začiatok 19. stor. znamená v matematickom myslení zlom. Intuitívna etapa rozvoja diferenciálneho počtu je ukončená a mnohí matematici, zahľadení len do tejto disciplíny, skepticky predpovedajú definitívne vyžitie sa svojej vedy. Zabúdajú na vyše stopäťdesiat rokov starý Descartesov program, zameraný na nedoriešené otázky syntetickej geometrie (5. postulát) a na prerušený útok, súvisiaci s hľadaním riešení algebraických rovníc vyššieho stupňa. Mnohým chýba historický a filozofický nadhľad. Tento subjektívny nedostatok však nemôže zabrzdiť rozvoj matematiky riadený objektívnou zákonitosťou spoločenskej potreby pokroku. Zamyslime sa nad renesanciou descartovského myslenia, ktorá intenzívne prebiehala na začiatku 19. stor. Geometria v svojej syntetickej podobe úspešne zdoláva jeden zo základných problémov ľudského myslenia vôbec — problém 5. postulátu Euklida. Objav, ku ktorému nezávisle prichádzajú F. Gauss, N. I. Lobačevskij a J. Bolyai prekonáva filozofickú doktrínu Kantovho apriorizmu. Po prvýkrát v dejinách geometrie sa podarilo človekovi prekonať sugesciu názornosti abstraktnou úvahou. Skutočnosť, že tento objav musel štyridsať rokov čakať v predsieni oficiálne uznávanej matematiky, len zdôrazňuje jeho historický význam. Zrod alternatívnej teórie priestorových vzťahov anticipuje o storočie dopredu Einsteinovu teóriu relativity a alternatívnu teóriu množín. Je základom novej reštrukturalizácie syntetickej geometrie a zárodkom budúcich objavov v logike. Podobná diverzifikácia, aká sa uskutočnila v geometrii v 19. stor., sa začala objavovať v logike začiatkom 20. stor. Okrem klasickej dvojhodnotovej logiky, v ktorej platia zákony neprotirečenia a vylúčenia tretieho, rozpracovali sa n-hodnotové logiky, kde platia iné zákony v dvojhodnotovej (napríklad v n-hodnotovej logike v určitých situáciách je negácia ekvivalentná kladu). Toto obrovské rozšírenie logiky bolo však len začiatkom jej nového rozvoja. Vznikla Brouwerova intuicionistická logika, v ktorej neplatí zákon vylúčenia tretieho a s ním spojené rôzne formy nepriameho dôkazu. Aplikácia tejto logiky v matematike vedie k novému, „prísnejšiemu" metodologickému, a teda aj k matematickému aparátu. Intuicionistická logika neostala osamelá v svojom alternatívnom postoji ku klasickej logike Aristotelovej. Objavilo sa množstvo konštruktívnych logík. Všetky tieto a iné logické kalkuly súhrnne nazývame neklasickými logikami a mnohé z nich sa začínajú aplikovať v matematike a v metodológii jednotlivých vied. Každá z nich predstavuje jednu z možností, ktorými sa môže uberať ľudský duch pri skúmaní reality. V 19. stor. dochádza aj v aritmetike, resp. v algebre k vnútornému obrodeniu. Riešenie rovníc piateho stupňa sa stáva problémom, ktorý prináša do algebry zásadne nový metodologický pohľad. Úspechy „veľkého umenia" dosiahnuté talianskými matematikmi odpovedali na otázku „ako": Ako vyriešiť rovnicu tretieho, či štvrtého stupňa? Galois a Abel sa nepýtajú, ako ich vyriešiť, lebo boli presvedčení, že otázka je nezodpovedateľná. Pýtajú sa „prečo": Prečo sa rovnica piateho stupňa nedá vyriešiť? Ak odpoveďou na otázku „ako" bol návod, tak odpoveďou na otázku „prečo" je teória. Vzniká algebraická teória, ktorá je hlboká v svojej podstate. Jej základnými pracovnými objektmi už nie sú len čísla, ale vzťahy.

Ukázali sme, ako sa na začiatku 18. stor. geometria a algebra zamerali na rozvoj myšlienok infinitezimálneho počtu. Mohlo by sa nám zdať, že história neakceptovala Descartesovo úsilie. To je však omyl. S obidvomi uvedenými prúdmi prichádza ďalší — descartesovský. Jeho hlavným objektom záujmu je štúdium javov, ktoré sú v súčasnosti súčasťou disciplíny nazvanej lineárna algebra. Ide o analýzu viacrozmerných priestorov, rôznych súradnicových systémov (barycentrické súradnice, rovinové súradnice, priamkové súradnice, atď.). Na scénu vystupuje algebraická geometria a teória geometrických transformácií. Prvým veľkým objavom súvisiacim s týmto prúdom je zrod vektorového počtu (19. stor.). Nehľadiac na mnohé možnosti využitia (v diferenciálnej geometrii, v teórii polynómov, v kinematike, atď.) prináša objav vektorového počtu z metodologického hľadiska novú inšpiráciu Descartesovej myšlienky. Descartesova transformácia viazala navzájom geometriu a čísla. Vektorový počet štiepi tento izomorfizmus tým, že medzi obidva descartovské fenomény vkladá medzičlánok, ktorým je vektor. Hlavná prednosť vektorov je v tom, že vnášajú do oboch doteraz partnerských zložiek geometrie a aritmetiky štruktúry. Je to štruktúra algebraická, myšlienkovo priamo napojená na objavy Galoisa a Abela. Ďalší vývoj Descartesovej myšlienky bol rozdelený v zmysle schémy



Obr. 2

Väzba vektor $\longleftrightarrow$ usporiadaná trojica čísiel sa rozpracovala do algebraických teórií lineárnej algebry. Samotný vektor našiel ďalšie zovšeobecnenia v teórii polynómov, vo fourierových radoch, v diferenciálnych rovniciach a pod. Jadro descartovského myslenia ostalo zachované vo väzbe

bod $\longleftrightarrow$ vektor

Nebola to už tá jednoduchá a napriek n-dimenzionálnym priestorom predsa len názorná väzba medzi euklidovskou štruktúrou geometrie a lineárnou štruktúrou vektorov. Štruktúra geometrického priestoru sa značne rozšírila. Po objave Lobačevského priestoru vznikajú priestory ďalšie a ďalšie (projektívny, afinný, priamkový, sférický, atď.).

Rovnako bohato sa prediferencováva aj myšlienka algebraickej štruktúry. Vznikajú grupy, okruhy, obory integrity, polia, zväzy, kvázigrupy, lupy a mnohé ďalšie príklady algebier. Je mimoriadne zaujímavé a užitočné, že tieto separátne sa rozvíjajúce prúdy štruktúr geometrických a algebraických bolo možné v Descartesovom duchu na kvalitatívne vyššej úrovni znovu spájať. Tak ako v 17. stor., aj teraz prinieslo spojenie geometrie a algebry nové hlboké poznanie. Algebre pomohlo gestaltovým videním svojich štruktúr v jednotlivých geometrických schémach a geometrii dalo do ruky jemný a prepracovaný aparát k podrobnej analýze svojich pojmov. Algebraik, študujúci niektorú algebraickú štruktúru, hľadá jej geometrický model, aby získal názornejšiu orientáciu v svojej problematike. Geometer, analyzujúci jednotlivé vzťahy nejakého geometrického priestoru, nachádza v jeho algebraickom stvárnení aparát presnej analýzy a dobrého sprievodcu pri prekročení hraníc názornosti.

V [4; 5; 6] je ukážka symbiózy geometrie a algebry. Pôvodcom skúmanej štruktúry je geometria — presnejšie afinná štruktúra a jej významný pojem „ťažisko". Metóda spracovania tejto problematiky nesie štandardnú pečať naznačeného postupu. Najprv sa intuitívne názorné väzby algebraizujú do idempotentnej, mediálnej a komutatívnej kvázigrupy a potom sa v algebraickom jazyku modeluje všetko, čo v geometrickej štruktúre nachádzame. Vybudovaná algebraická štruktúra preberá od geometrie vedúcu úlohu a pomáha modifikovať pôvodné, intuitívne názorné geometrické situácie, do nových, už nie tak názorných variant.

Geometrické štruktúry v druhej polovici minulého storočia nadobudli takú pestrosť, že ich ďalší vývoj bytostne potreboval objaviť jednotiaci princíp. Ten r. 1872 ukázal mladý Felix Klein v chýrnom *Erlangerskom programe.* Podobne algebraické štruktúry boli v tomto storočí „zastrešené" teóriou kategórií. Veľkou prednosťou tejto abstraktnej myšlienky je možnosť vyhľadávať spriaznenosť jednotlivých algebier. Tým sa umožňuje isté napojenie sa menej známych ,na periférii výskumu ležiacich, alebo práve sa rodiacich algebraických štruktúr na štruktúry známejšie a prepracovanejšie. Po vnútornom preskúmaní každej algebraickej štruktúry je prirodzená snaha jej napojenia sa na niektorú z nosných algebraických štruktúr.

LITERATÚRA

1. DESCARTES, R.: Rozprava o metóde. SAV, Bratislava 1954.
2. POLYA, G.: Mathematical Discovery. John Wiley, New York—London, 1962 a 1965.
3. HEJNÝ, V. — HEJNÝ, M.: Prečo je matematika taká ťažká? In: Pokroky matematiky, fyziky a astronómie 2, 1978.
4. GATIAL, J.: Some geometrical examples of an IMC — quasigroup. In: Matematický časopis 1969.
5. GATIAL, J.: Über die IMC — Quasigruppe und den Schwerpunkt eines Dreieckes. In: Mathematischen Nadrichten 1972.
6. GATIAL, J.: Die Schwerpunkte der Dreiecken in einigen endlichen Quasigruppen Mathematica Slovaca 1978.

ВОЗРОЖДЕНИЕ ИДЕЙ ДЕКАРТА

Ян Гатиал — Милан Гейны

Статья посвящена методологическому анализу Декартова метода трансформации как метода решения проблем и идеи универсализма — тезиса о существовании глобального метода изучения мира. На примерах из истории математики показано, как декартовский метод семантической трансформации вел к открытию аналитической геометрии и привел к открытию структурального морфизма и изоморфизма, представленных теориями геометрических и алгебраических структур.

ZWEI ARTEN VON RENAISSANCE DESCARTESCHER GEDANKEN

Ján Gatial — Milan Hejný

Die Studie ist gewidmet der methodologischen Analyse der Descarteschen Methode der Transformation als Methode der Lösung von Problemen und der Idee des Universalismus — der These über die Existenz einer globalen Methode der Welterforschung. An Beispielen aus der Geschichte der Mathematik wird illustriert, wie Descartes' Methode der semantischen Transformation zur Entdeckung der analytischen Geometrie geführt hat und in der Entdeckung des strukturellen durch Theorien geometrischer und algebraischer Strukturen repräsentierten Morphismus und Isomorphismus mündete.