

DEDUKTÍVNE SYSTÉMY LOGIKY NEOSTRÝCH TERMÍNOV

JÁN SZOMOLÁNYI, Katedra logiky, FFUK, Bratislava

SZOMOLÁNYI, J.: Deductive Systems of the Fuzzy Logic.
Filozofia 39, 1984, No. 5, p. 574—585.

In the paper the axiomatic and semantic representation of a conception of the fuzzy logic is given. The invalidity of some classical principles for this logic, especially of the rule of the conditional modus ponens, is the cause that the given axiomatization comprises the rules of various metalanguage levels and it is, therefore, not Hilbertian axiomatization. That is why in this paper the examined logic is represented by a system of natural deduction in the sense of the relation of the „conditional assertion” of D. Scottus. Also the correctness of this system and its equivalence with the original axiomatic calculus is demonstrated.

V prácach [3] a [4] bol podaný axiomatický systém F_0 logiky neostrých termínov, založenej na neklasickom chápaní implikácie, ako zovšeobecnej operácie rezídua, definovanej pomocou neklasickkej konjunkcie, tzv. operátora kontextu. V uvedených prácach je tiež zavedená sémantická teória modelov Kripkeho typu a dokázaná korektnosť a úplnosť systému F_0 vzhľadom na uvedenú sémantiku.

V [5] bolo demonštrované, že niektoré druhy neklasických logík nemožno reprezentovať vo forme axiomatického deduktívneho systému hilbertovského typu. Vo väčšine prípadov to možno napraviť modifikáciou pojmu pravidla alebo pojmu odvodenia, obvykle však na úkor ich pôvodného chápania. Najvhodnejším riešením sa ukazuje byť, v takomto prípade deduktívna reprezentácia uvažovanej logiky vo forme nejakej prirodzenej dedukcie.

Uvedené výsledky použijeme teraz pri deduktívnej výstavbe istej pozitívnej výrokovkej logiky neostrých termínov, označenej ako F_1^+ . Zadáme systém prirodzenej dedukcie uvedenej logiky v zmysle relácie „podmieneneho tvrdenia“ D. Scotta [pozri [2]], a dokážeme jeho ekvivalenciu s pôvodne uvedenou nehilbertovskou axiomatikou tejto logiky.

Okrem predmetného jazyka obsahujúceho logické spojky $\&$, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, budeme používať aj čiastočne formalizovaný metajazyk, ktorého zodpovedajúce logické operátory budú $\wedge$, $\vee$, $/$, $=>$, $=<=>$, $\exists$ a $\forall$.

Uvedieme najprv axiomatický systém logiky F_1^+ , ktorý bude zadaný nasledovnými postulátmi.

Postuláty axiomatického systému F_1^+ :

Schémy axiom:

- (A1) $A \rightarrow A$
- (A2) $\{A \rightarrow B\} \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
- (A3) $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
- (A4) $\{(A \& B) \rightarrow C\} \rightarrow \{A \rightarrow (B \rightarrow C)\}$

- (A5) $(A \& B) \rightarrow A$
 $(A \& B) \rightarrow B$
 (A6) $A \rightarrow (A \vee B)$
 $B \rightarrow (A \vee B)$
 (A7) $((A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \& C))$
 (A8) $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$
 (A9) $((A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

Odvodzovacie pravidlá

- (MP) Ak je $\vdash A \rightarrow B$ a $\vdash A$, potom je $\vdash B$
 (PZK) $A, B \vdash A \& B$
 (PC) $A \vdash B$, ak $\vdash A \rightarrow B$
 (POK) Ak $A_1, \dots, A_n \vdash B$, potom $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n \vdash B$

POZNÁMKA. Pravidlo (PC) nemôže byť nahradené pravidlom

$$A_1, \dots, A_n, A \vdash B, \text{ ak } A_1, \dots, A_n \vdash A \rightarrow B$$

pretože potom by bolo z F_1^+ -teorémy $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ odvoditeľné

$$(CMP) \quad A, A \rightarrow B \vdash B$$

čo nie je v F_1^+ -logike korektné.

Pre lepšie porovnanie tohto systému s inými systémami nekласickej logiky uvedieme niektoré jeho najdôležitejšie teorémy.

Teorémy F_1^+

- (T1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 (T2) $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
 (T3) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$
 (T4) $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C))$
 (T5) $(A \rightarrow (B \& C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C))$
 (T6) $((B \rightarrow A) \vee (C \rightarrow A)) \rightarrow ((B \& C) \rightarrow A)$
 (T7) $((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$
 (T8) $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$
 (T9) $(A \vee B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

POZNÁMKY. 1. Zo systému F_1^+ získame pridaním axiómy

$$(A10) \quad ((A \circ B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

a definície

$$(D1) \quad A \rightarrow B = (A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow A)$$

systém F_0^+ , t. j. systém F_0 ohraničený na jazyk s pozitívnymi formulami, obsahujúcimi operátory $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ a $\circ$; teda s formulami, ktoré neobsahujú operátor negácie $\sim$. Ďalšiu axiómu systému F_0 , týkajúcu sa operátora $\circ$,

$$(A11) \quad B \rightarrow (A \rightarrow (A \circ B))$$

možno odvodiť z axiém (A10), (A1) a (A3). Pridaním axiómy (A10) a definície (D1) sa stáva axióma (A4) závislou od ostatných axiém, je totiž odvoditeľná z (A10), (A7), (A2) pomocou pravidla (MP):

2. Zo systému F_0^+ získame, pridaním axióm

$$(A12) \quad \sim \sim A \rightarrow A$$

$$(A13) \quad A \rightarrow \sim \sim A$$

a pravidla

$$(PTR) \quad \text{Ak } \vdash A \rightarrow B, \text{ potom } \vdash \sim B \rightarrow \sim A$$

axiomatický systém F_0 . V tomto prípade sa odvodiiteľnými axiómami stávajú axiomy typu (A1) a (A6).

Sémantika uvažovanej logiky neostrých termínov je zadaná nasledovne.

DEFINÍCIA 1. Pod F_n^+ — modelom rozumieme usporiadanú štvoricu

$\langle G, R, O, \models^\varphi \rangle$, kde G je neprázdna množina možných svetov, R je ternárna relácia relatívnej dosiahnuteľnosti definovaná na G a spĺňajúca tieto podmienky

$$(f1) \quad a < a$$

$$(f2) \quad Rabc \Rightarrow a < c$$

$$(f3) \quad R^2abcd \Rightarrow Rabc$$

kde $R^2abcd \Leftrightarrow (\exists f) (Rabf \wedge Rfcd)$ a

$$a < b \Leftrightarrow ROab$$

pričom a, b, c, d sú z G ; a O je „skutočný“ svet.

Valuácia φ je funkcia, ktorá každej výrokovej premennej p priraduje podmnožinu $\varphi(p)$ množiny G , pričom platí

$$(1) \quad \text{Ak je } a < b \text{ a } a \in \varphi(p), \text{ potom aj } b \in \varphi(p)$$

$$(2) \quad \text{Ku každému } p \text{ existuje také } c \in G, \text{ že } c = \min \varphi(p). \text{ Relácia}$$

pravdivosti $\models^\varphi$ spĺňa nasledovné podmienky,

$$\models_a^\varphi p \Leftrightarrow a \in \varphi(p)$$

$$\models_a^\varphi A \& B \Leftrightarrow \models_a^\varphi A \wedge \models_a^\varphi B$$

$$\models_a^\varphi A \vee B \Leftrightarrow \models_a^\varphi A \vee \models_a^\varphi B$$

$$\models_a^\varphi A \rightarrow B \Leftrightarrow [\forall b, c \in G] (Rabc \wedge \models_b^\varphi A \Rightarrow \models_c^\varphi B)$$

V prípade F_0^+ — modelov pribudne podmienka

$$\models_a^\varphi A \circ B \Leftrightarrow [\exists b, c \in G] (Rbca \wedge \models_b^\varphi A \wedge \models_c^\varphi B)$$

Formula A sa nazýva *pravdivou pri (valuácii) φ v (svete) a* , keď $\models_a^\varphi A$.

Formula A sa nazýva *$\underline{M}$ -platnou*: (platnou v modeli $\underline{M}$), ak je pravdivá vo svete O . A je F_1^+ — *platná* ak je $\underline{M}$ -platná pre každý F_1^+ -model $\underline{M}$.

DEFINÍCIA 2. Nech $\underline{M} = \langle G, R, O, \models^\varphi \rangle$ je nejaký F_1^+ -model a U nech

je konečná množina formúl. Potom výraz $U \models_a B$ bude označovať, že formula $B \in F_1^-$ vyplýva z množiny formúl U vo svete a , pričom

$$U \models_a B \iff ((\forall A \in U) \models_a A) \implies \models_a B$$

Formula $B \in F_1^+$ vyplýva z množiny U v modeli $\underline{M}$ (pri valuácii φ), symbolicky $U \models^\varphi B$, práve vtedy, keď $U \models_a B$ pre všetky $a \in G$.

Formula $B \in F_1^+$ vyplýva z množiny U , $U \models B$ vtedy a len vtedy, keď $U \models^\varphi B$ vo všetkých modeloch F_1^+ (pri všetkých valuáciách φ).

LEMA 1. Pre práve definovaný pojem F_1^+ -vyplývania platí, že

$$U \models^\varphi B \iff \models_b \hat{U} \rightarrow B$$

kde $\hat{U}$ je konjunkcia obsahujúca všetky prvky a iba prvky z U .

DŮKAZ. Z uvedených podmienok pre reláciu $\models^\varphi$ sa dá indukciou cez stupeň formuly A dokázať, že

$$(a < b \wedge \models_a A) \iff \models_b A$$

Z toho plynie, že

$$U \models^\varphi B \iff U \models_0^\varphi B$$

Z tejto ekvivalencie a z tvrdenia ROaa, plynúceho z {f1}, dostávame, že

$$\begin{aligned} U \models \implies \models^\varphi B &\iff (\forall a \in G) ((\forall A \in U) \models_a^\varphi A \implies \models_a^\varphi B) \iff (\forall a \in G) (\models_a^\varphi U \implies \\ &\implies \models_a^\varphi B) \iff \models_0^\varphi \hat{U} \rightarrow B \iff \models^\varphi \hat{U} \rightarrow B \end{aligned}$$

DŮSLEDOK. Zovšeobecnením lemy 1 dostávame

$$U \models B \iff \models \hat{U} \rightarrow B$$

LEMA 2. Pre reláciu F_1^+ -vyplývania platia nasledovné tvrdenia

$$\begin{aligned} A \models B &\iff \models A \rightarrow B \\ A, A \rightarrow B &\not\models B \\ (A \models B \wedge \models A) &\implies \models B \end{aligned}$$

Základnými požiadavkami, kladenými na axiomatický systém konštruovaný k danej sémantike, sú jeho korektnosť a úplnosť vzhľadom na túto sémantiku. V našom prípade to znamená, že pre systém F_1^+ musí platiť

$$U \vdash_{F+1} B \iff U \Vdash_{F+1} B$$

Pre axiomatické systémy má však výraz typu $U \vdash B$ špecifický význam. Znamená existenciu odvodu formuly B z množiny formúl U . Kľúčové pravidlo pre implikáciu je

$$(C|-) \frac{A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}$$

Toto dvojpravidlo je totožné so Suszkovou podmienkou (pozri [1]) pre operátor $\rightarrow$, aby mohol byť tento považovaný za logickú implikáciu. Pretože pojem dôkazu je pri axiomatickom systéme prvotný, malo by byť $(C|-)$ odvoditeľné. Uvažujme teraz, čo je k tomu potrebné. Budeme analyzovať osobitne obidve zložky dvojpravidla. Pravidlo

$$(DT) \frac{\vdash A \rightarrow B}{A \vdash B}$$

je slabou formou vety o dedukcii a tvrdí, že ak existuje odvodenie formuly B z A , potom existuje aj dôkaz formuly $A \rightarrow B$. Nech postupnosť formúl $B_1, \dots, B_m$ je dôkazom B z A . Potom sa ľahko dokáže, že

- a) pre každé $1 \leq i \leq m$, $\vdash A \rightarrow B_i$
- b) $A \rightarrow B_1, \dots, A \rightarrow B_m$ je dôkazom formuly $A \rightarrow B_m (= A \rightarrow B)$.

K dôkazu týchto tvrdení postačujú, v prípade F_1^+ , axiómy $(A1)$, $(A2)$, $(A7)$ a pravidlo (PC) . (Podrobnejšie v dôkaze vety 2: všeobecnejšie v [5]).

Na druhej strane, odvodiť pravidlo

$$(PC) \frac{\vdash A \rightarrow B}{A \vdash B}$$

znamená dokázať, že z existencie dôkazu pre formulu $A \rightarrow B$ vyplýva existencia odvodu formuly B z A . Nevyhnutným predpokladom, i vo všeobecnosti, k získaniu požadovaného dôkazu je prítomnosť pravidla podmieneného modus ponens

$$(CMP) \quad A, A \rightarrow B \vdash B$$

Z lemy 2 vidieť, že sémantický ekvivalent tohto pravidla, t. j. tvrdenie $A, A \rightarrow B \models B$ neplatí. Pravidlo (CMP) nemôže byť teda odvodzovacím pravidlom systému F_1^+ . Rovnaká situácia nastáva napríklad aj v prípade Łukasiewiczových viachodnotových logík. Absencia tohto pravidla medzi odvodzovacími pravidlami systému F_1^+ diskvalifikuje reláciu F_1^+ odvodu v jej vzťahu k relácii F_1^+ -vyplývania. Situáciu možno síce riešiť tak, že sa pravidlo (PC) vezme za postulát axiomatického systému, tak ako sme to fakticky urobili v prípade uvedenej axiomatiky F_1^+ . Potom však už nemožno interpretovať výraz $U \vdash B$ ako odvoditeľnosť formuly B

z množiny predpokladov U , i keď ekvivalencia $A \vdash_{F_{+1}} B \iff A \models_{F_{+1}} B$ zostáva v platnosti.

Pravidlo (PC) možno eliminovať ohraničením aparátu axiomatického systému iba na dokázateľné formuly, teda nedefinovaním odvodu z predpokladov. V tomto prípade prítomnosť pravidla (MP) a vynechanie pravidla (PZK) dáva súbor postulátov, ktorý je korektný vzhľadom na uvažovanú sémantiku a stačí k dôkazu každej F_{+1} -platnej formuly.

Iný spôsob, ako sa vyhnúť pravidlu (PC), spočíva v konštrukcii deduktívneho systému pre F_{+1} -logiku ako súboru pravidiel. Týmto sa problém vyvoditeľnosti presúva do metametajazyka. Uvedieme teraz takýto súbor pravidiel, o ktorom dokážeme, že najmenšia relácia, ktorá ich spĺňa, je zhodná s $\vdash_{F_{+1}}$.

DEFINÍCIA 3. Nech A, B, C, D sú ľubovoľné formuly v jazyku $J_{F_{+1}}$ a U, V, U', V' konečné množiny formúl tohto jazyka. Potom nech $\Vdash_1$ je najmenšia relácia $\Vdash$ spĺňajúca nasledujúce pravidlá

$$(R) \quad U \Vdash V, \text{ ak } U \cap V \neq \emptyset$$

$$(M) \quad \frac{U \Vdash V}{U, U' \Vdash V, V'}$$

$$(TR) \quad \frac{U \Vdash A, V \quad U, A \Vdash V}{U \Vdash V}$$

$$(\&) \quad \frac{A, B \Vdash A \& B \quad A \& B \Vdash A \quad A \& B \Vdash B}{A, B \Vdash A \& B}$$

$$(V) \quad \frac{A \vee B \Vdash A, B \quad A \Vdash A \vee B \quad B \Vdash A \vee B}{A \vee B \Vdash A, B}$$

$$(\rightarrow_1) \quad \frac{A, U \Vdash C}{A \rightarrow U \Vdash A \rightarrow C}$$

$$(\rightarrow_3) \quad A \rightarrow (B \rightarrow C) \Vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$(\rightarrow_4) \quad (A \& B) \rightarrow C \Vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$(\rightarrow_2) \quad \frac{A \Vdash V, C}{V \rightarrow C \Vdash A \rightarrow C}$$

$$(\rightarrow_5) \quad \frac{\Vdash A \rightarrow B}{A \Vdash B}$$

$$(V_1) \quad \frac{U, B \Vdash V \quad U, C \Vdash V}{U, B \vee C \Vdash V}$$

kde, $A \rightarrow U = \{A \rightarrow D \mid D \in U\}$ a $V \rightarrow C = \{E \rightarrow C \mid E \in V\}$. Tento súbor pravidiel označíme PF_1^+ . Z uvedených základných pravidiel sú potom odvoditeľné niektoré ďalšie dôležité pravidlá.

LEMA 3. V súbore pravidiel PF_1^+ sú odvoditeľné pravidlá

$$\text{(GDT)} \frac{\begin{array}{c} + \\ U, B \parallel_1^- C \end{array}}{\begin{array}{c} + \\ U \parallel_1^- B \rightarrow C \end{array}}$$

$$\text{(DT)} \frac{\begin{array}{c} + \\ A \parallel_1^- B \end{array}}{\begin{array}{c} + \\ \parallel_1^- A \rightarrow B \end{array}}$$

$$\text{(MP)} \frac{\begin{array}{c} + \\ \parallel_1^- A \\ + \\ \parallel_1^- A \rightarrow B \\ 1 \end{array}}{\begin{array}{c} + \\ \parallel_1^- B \\ 1 \end{array}}$$

POZNÁMKY. 1. Pri pravidle $(\rightarrow_1)$ je dôležité, že na pravej strane výrazu nad čiarou pravidla sa vyskytuje C, reprezentujúce jednoprvkovú množinu formúl a nie množinová premenná V. V takom prípade by sa dalo

dokázať, že $\parallel_1^- A \rightarrow B, B \rightarrow A$, pritom však formula $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ nie je F_1^+ -platná. Súbor pravidiel obsahujúci pravidlo $(\rightarrow_1)$ v takom tvare by teda nebol, vzhľadom na danú F_1^+ -sémantiku, korektný.

2. Pravidlo $(\rightarrow_5)$ nemôže byť v tvare

$$\frac{U \parallel_1^- A \rightarrow B}{U, A \parallel_1^- B}$$

teda otočením pravidla (GDT), lebo by to viedlo k tvrdeniam v F_1 neprípustným, napríklad k metatvrdeniu

$$\vdash \{ (A \& B) \rightarrow C \} \leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

VETA 1. Nech $\vdash_{F_1^+}$ a $\parallel_1^-$ sú zavedené relácie. Potom platí, že $\vdash_{F_1^+} C \parallel_1^-$

DÔHODA. V ďalšom texte, pokiaľ to nebude viesť k omylu, budeme namiesto výrazu $\vdash_{F_1^+}$ písať iba $\vdash$ a namiesto $\parallel_1^-$ iba $\parallel^-$.

DŮKAZ (vety 1). Dokážeme, že ak A je axióma systému F_1^+ , potom je

$\parallel_1^- A$ a že každé pravidlo systému F_1^+ je odvoditeľné zo súboru pravidiel

PF_1^+ (pravda, pri zámene $\vdash_{F_1^+}$ na $\parallel_1^-$).

Schémy axióm:

- (A1) (1) $A \Vdash A$ (R)
 (2) $\Vdash A \rightarrow A$ z (1); (DT)
- (A2) Z pravidiel $\{\rightarrow_3\}$ a z (R) je ľahko odvoditeľné
 (1) $B \Vdash (B \rightarrow C) \rightarrow C$
 (2) $A \rightarrow B \Vdash A \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow C\}$ z (1); $\{\rightarrow_1\}$

a ďalej použitím $\{\rightarrow_3\}$,

- (3) $A \rightarrow B \Vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 (4) $\Vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$
- (A3) (1) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ $\{\rightarrow_3\}$
 (2) $\Vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow \{(B \rightarrow (A \rightarrow C))\}$ z (1); (DT)
- (A4) (1) $(A \& B) \rightarrow C \Vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$ $\{\rightarrow_4\}$
 (2) $\Vdash \{(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))\}$ z (1); (DT)

(A5) a (A6) vyplývajú priamo z $\{\&\}$ resp. $\{V\}$.

- (A7) (1) $B, C \Vdash B \& C$
 (2) $A, B, C \Vdash B \& C$ z (1); (M)
 (3) $A \rightarrow B, A \rightarrow C \Vdash A \rightarrow (B \& C)$ z (2); $\{\rightarrow_1\}$
 (4) $\Vdash \{(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C)\} \rightarrow (A \rightarrow (B \& C))$ z (3); (DT)

- (A8) Pomocou pravidiel $\{\&\}$ a $\{V\}$ získame (1) a (2),
 (1) $A, B \Vdash (A \& B) V (A \& C)$
 (2) $A, C \Vdash (A \& B) V (A \& C)$
 (3) $A, B V C \Vdash (A \& B) V (A \& C)$ z (2) a (3); $\{V_1\}$
 (4) $\Vdash (A \& (B V C)) \rightarrow \{(A \& B) V (A \& C)\}$ z (3); (DT)

- (A9) (1) $A V B \Vdash A, B$
 (2) $A V B \Vdash A, B, C$ z (1); (M)
 (3) $A \rightarrow C, B \rightarrow C \Vdash (A V B) \rightarrow C$ z (2); $\{\rightarrow_2\}$
 (4) $\Vdash \{(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{(A V B) \rightarrow C\}$ z (3); (DT)

Odvodzovacie pravidlá: Pravidlá (MD), (PZK) a (PC) sú vlastne (MP), $\{\&\}$, resp. $\{\rightarrow_5\}$ a pravidlo (POK) je odvoditeľné z $\{\&\}$ a (TR).

LEMA 4. a) Pre axiomatický systém F_1^+ platí nasledovná ekvivalencia

$$A_1, \dots, A_n \vdash B \iff A_1 \& \dots \& A_n \vdash B$$

b) V súbore pravidiel PF_1^+ je odvoditeľné $U \Vdash \hat{V}$ kde $\hat{V}$ je disjunkcia všetkých prvkov a iba prvkov z V .

DOKAZ. a) $\{ \Rightarrow \}$ Toto je vlastne pravidlo (POK).

$\{ \Leftarrow \}$ Nech $B_1, \dots, B_m$ je odvodenie B z $A_1 \& \dots \& A_n$. Potom bude zrejmé postupnosť $A_1, \dots, A_n, A_1 \& A_2, \dots, A_1 \& \dots \& A_n, B_1, \dots, B_m$ odvodenie formuly B z formúl $A_1, \dots, A_n$.

b) Z pravidiel (V) vyplýva, že $A, B \vdash A V B$. Pomocou tohto sa už ľahko odvodí dokazované tvrdenie.

VEĽA 2. Pre ľubovoľné U, A spĺňajú relácie $\vdash_{F^+_1}$ a $\vdash_1$ tvrdenie

$$U \vdash_1 A \Rightarrow U \vdash_{F^+_1} A$$

DÔKAZ. Dokážeme, že všetky pravidlá zo súboru PF^+_1 sú odvodiťelné pravidlá axiomatického systému F^+_1 . Z toho vyplýva, že dôkaz nestratí na všeobecnosti, ak položíme $U = \{B\}$ a $V = \{D\}$. Navyše, podľa lemy 4, postačuje dokázať tieto pravidlá v upravenej forme, kde namiesto pôvodného výrazu $U \vdash V$ bude vystupovať výraz $\hat{U} \vdash \hat{V}$.

$$\begin{array}{ll} (R) \quad (1) \quad \vdash A \rightarrow A & (A1) \\ (2) \quad A \vdash A & z (1); (P1) \end{array}$$

(DT) Toto pravidlo budeme potrebovať pri odvodzovaní väčšiny ostatných pravidiel zo súboru PF^+_1 , a preto dokážeme, že je pravidlom pre F^+_1 i keď ide o pravidlo, ktoré je vzhľadom na $\vdash_1$ druhotné.

Máme teda dokázať, že ak $A \vdash_{F^+_1} B$, potom $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow B$.

Predpokladajme teda, že postupnosť $B_1, \dots, B_n$ je ododenie formuly B z A . Ukážeme, že potom bude postupnosť $A \rightarrow B_1, \dots, A \rightarrow B_n$ dôkazom formuly $A \rightarrow B$ ($= A \rightarrow B_n$). Presnejšie, dokážeme, že pre všetky $1 \leq i \leq n$ je $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow B_i$ a že postupnosť $A \rightarrow B_1, \dots, A \rightarrow B_n$ spĺňa podmienky odvo-

denia, t. j. že ak B_j bolo získané z $B_{i1}, \dots, B_{ik}$ pomocou istého pravidla, tak $A \rightarrow B_j$ je odvodiťelné z $A \rightarrow B_{i1}, \dots, A \rightarrow B_{ik}$.

Nech $i = 1$. B_1 je axiómou, alebo $B_1 = A$. Ak je B_1 axiómou, potom dokazované tvrdenie vyplýva z nasledujúceho metaododenia,

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \vdash B_1 & \text{predpoklad} \\ (2) \quad \vdash B_1 \rightarrow (A \rightarrow B_1) & (T1) \\ (3) \quad \vdash A \rightarrow B_1 & z (1) \text{ a } (2); (MP) \end{array}$$

Ak $B_1 = A$, potom $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow B_1$ vyplýva priamo z (A1).

Indukčný krok. Predpokladajme, že pre všetky $j < i$ je už dokázané, že $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow B_j$. Treba ukázať, že potom $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow B_i$. Ak sa B_i rovná A , alebo ak je axiómou, potom stačí úvaha z prvého kroku indukcie. B_i však mohlo byť získané pomocou niektorého z odvodzovacích pravidiel.

(PK): $B_i = B_k \& B_m$, kde $k, m < i$. Podľa indukčného predpokladu je potom $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow B_k$ a $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow B_m$. Z ododenia

$$\begin{array}{ll} (1) \quad A \rightarrow B_k & \\ (2) \quad A \rightarrow B_m & \\ (3) \quad ((A \rightarrow B_k) \& (A \rightarrow B_m)) & z (1) \text{ a } (2); (PK) \end{array}$$

je vidieť, že $\vdash_{F^+_1} (A \rightarrow B_k) \& (A \rightarrow B_m)$. Ale z toho a z axiomy (A7) dostávame, podľa (MP), že $\vdash_{F^+_1} A \rightarrow (B_k \rightarrow B_i)$, kde podľa indukčného predpokladu

je $\vdash A \rightarrow B_k$ a $\vdash A \rightarrow \{B_k \rightarrow B_i\}$. Ale $\{A \rightarrow \{B_k \rightarrow B_i\}\} \rightarrow \{B_k \rightarrow \{A \rightarrow B_i\}\}$ je axióma (A3) a dvojnásobným použitím (MP) dostávame, že $\vdash A \rightarrow B_i$.

Treba ešte dokázať, že ak $B_{i_1}, \dots, B_{i_k} \vdash B_j$, potom $A \rightarrow B_{i_1}, \dots, A \rightarrow B_{i_k} \vdash A \rightarrow B_j$. Požadovaný výsledok dostaneme z predchádzajúcich úvah použitím pravidiel (PZK), (MP) a (PC).

Tým sme dokázali, že pre všetky $1 \leq i \leq n$ a teda aj pre $i = n$ je $\vdash A \rightarrow B_i$, teda že $\vdash A \rightarrow B$.

(M) Ukážeme, že ak $A \vdash C$, potom $A \& B \vdash C \vee D$.

- (1) $A \vdash C$
- (2) $\vdash A \rightarrow C$
- (3) $\vdash \{A \& B\} \rightarrow A$
- (4) $\vdash \{A \& B\} \rightarrow C$
- (5) $\vdash C \rightarrow \{C \vee D\}$
- (6) $\vdash \{A \& B\} \rightarrow \{C \vee D\}$
- (7) $\{A \& B\} \vdash \{C \vee D\}$

(TR) Treba dokázať, že ak $A \vdash C \vee D$ a $A \& C \vdash D$, potom $A \vdash D$.

- (1) $A \vdash C \vee D$
- (2) $A \& C \vdash D$
- (3) $\vdash A \rightarrow A$
- (4) $\vdash A \rightarrow \{C \vee D\}$
- (5) $\vdash A \rightarrow \{A \& \{C \vee D\}\}$
- (6) $\vdash \{A \& \{C \vee D\}\} \rightarrow \{ \{A \& C\} \vee \{A \& D\} \}$
- (7) $\vdash A \rightarrow \{ \{A \& C\} \vee \{A \& D\} \}$
- (8) $\vdash \{A \& C\} \rightarrow D$
- (9) $\vdash \{A \& D\} \rightarrow D$
- (10) $\vdash \{ \{A \& C\} \vee \{A \& D\} \} \rightarrow D$
- (11) $\vdash A \rightarrow D$
- (12) $A \vdash D$

Dvojitá čiara v dôkaze označuje miesto, nazvime ho dedukčný skok, kde bolo použité niekoľko, obvykle triviálnych krokov, ktoré nie sú v postupnosti vyznačené.

($\rightarrow_1$) Ukážeme, že ak $A \& B \vdash C$, potom $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C$.

- (1) $A \& B \vdash C$
- (2) $\vdash \{A \& B\} \rightarrow C$
- (3) $\vdash A \rightarrow A$
- (4) $\vdash \{A \rightarrow A\} \rightarrow \{ \{A \rightarrow B\} \rightarrow \{A \rightarrow \{A \& B\}\} \}$
- (5) $\vdash \{A \rightarrow B\} \rightarrow \{A \rightarrow \{A \& B\}\}$
- (6) $\vdash \{A \rightarrow \{A \& B\}\} \rightarrow \{ \{ \{A \& B\} \rightarrow C \} \rightarrow \{A \rightarrow C\} \}$
- (7) $\vdash \{A \rightarrow B\} \rightarrow \{ \{ \{A \& B\} \rightarrow C \} \rightarrow \{A \rightarrow C\} \}$
- (8) $\vdash \{ \{A \& B\} \rightarrow C \} \rightarrow \{ \{A \rightarrow B\} \rightarrow \{A \rightarrow C\} \}$
- (9) $\vdash \{A \rightarrow B\} \rightarrow \{A \rightarrow C\}$
- (10) $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow C$

($\rightarrow_2$) Toto pravidlo v prepise hovorí, že ak $A \vdash D \vee C$, potom $D \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

- (1) $A \vdash \{D \vee C\}$

- (2) $\neg A \rightarrow (D \vee C)$
- (3) $\neg (D \vee C) \rightarrow ((D \rightarrow C) \rightarrow C)$
- (4) $\neg A \rightarrow ((D \rightarrow C) \rightarrow C)$
- (5) $\neg (D \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- (6) $D \rightarrow C \mid \neg A \rightarrow C$

($\rightarrow_3$) Získa sa priamo z (A3) pomocou pravidla (PC).

($\rightarrow_4$) Použitím (PC) z axiómy (A4).

($\rightarrow_5$) Je to vlastne pravidlo (PC).

(V₁) (1) $A \& B \mid \neg D$

(2) $A \& C \mid \neg D$

(3) $\mid \neg (A \& B) \rightarrow D$

(4) $\mid \neg (A \& C) \rightarrow D$

(5) $\mid \neg (((A \& B) \rightarrow D) \& ((A \& C) \rightarrow D)) \rightarrow (((A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow D)$

(6) $\mid \neg ((A \& B) \rightarrow D) \& ((A \& ((A \& C) \rightarrow D))$

(7) $\mid \neg ((A \& B) \vee (A \& C)) \rightarrow D$

(8) $\mid \neg (A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$

(9) $\mid \neg (A \& (B \vee C)) \rightarrow D$

(10) $A \& (B \vee C) \mid \neg D$

Tým je dôkaz vety 2 ukončený.

LITERATÚRA

1. ROUPLEY, R. — MEYER, R. K.: Towards a General Semantical Theory of Implication and Conditionals. Reports on Mathematical Logic 1975 č. 4.
2. SCOTT, D.: Completeness and Axiomatizability in Many-valued Logic. In: L. Henkin (ed.), Proceedings of the Tarski Symposium. Am. Math. Soc. 1974.
3. SZOMOLÁNYI, J.: Completeness Proof for Fuzzy Logic. Philosophica 1980—1981.
4. SZOMOLÁNYI, J.: Kripekóvské modely pre logiku nepresných termínov. Kand. dizert. práca. Bratislava 1980.
5. SZOMOLÁNYI, J.: K problému axiomatizácie intenzionálnych a mnohohodnotových logík, Filozofia 1982, č. 3.

ДЕДУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ЛОГИКИ НЕОСТРЫХ ТЕРМИНОВ

Ян Сомолани

В работе дана аксиоматическая и семантическая репрезентация определенной логики неострых терминов. Недействительность для этой логики определенных классических принципов, прежде всего правила условного модус поненс, является причиной того, что указанная аксиоматизация включает в себя правила разных метаязыковых уровней и не является, таким образом, аксиоматизацией гильбертовской. Поэтому в настоящей статье автор размышляет о логике, представленной также системой естественной дедукции, в смысле реляции „условного утверждения“ Д. Скотта. Здесь продемонстрированы также корректность этой системы и ее эквивалентность первоначальному аксиоматическому исчислению.

Ján Szomolányi

In der Studie wird die axiomatische und semantische Repräsentation einer bestimmten Logik unscharfer Termini dargelegt. Die Ungültigkeit bestimmter klassischer Prinzipien für diese Logik, besonders der Regel des bedingten Modus ponens, bewirkt, dass die erwähnte Axiomatisierung Regeln verschiedener metasprachlicher Ebenen beinhaltet und stellt demzufolge keine Hilbertsche Axiomatisierung dar. Deswegen wird in dieser Studie eine Logik erwogen, die auch durch das System der natürlichen Deduktion repräsentiert ist, im Sinne der Relation „der bedingten Behauptung“ D. Scotts. Es wird auch die Korrektheit dieses Systems sowie seine Äquivalenz mit dem ursprünglichen axiomatischen Kalkül demonstriert.