

O FILOZOFICKOM ROZMERE MATEMATIKY

Alojz RITOMSKÝ, Ústav filozofie a sociológie SAV, Bratislava

RITOMSKÝ, A.: On the Philosophic Dimension of Mathematics. *Filozofia* 38, 1983. No. 1, p. 33—45

Marxism requires that even when creating the conception of mathematics we must not forget basic historical connections. In the paper certain philosophic-methodological aspects of the development of mathematics, its relation to practice and to other sciences, the development of the relation of the theoretical and applied orientation in mathematics, etc. are analyzed.

The author outlines the procedure from a simple mathematical abstraction through multi-level specific [mathematical] idealizations to mathematical formalisms and from there the reverse motion through semantic and empirical interpretations which represents the reduction of the complex logical genesis of mathematics to its relatively simple form. Theories of concrete sciences become the source of new impulses for mathematics when certain antithetical relations between objects of mathematical theory are able to produce quite new mathematical objects, new mathematical concepts in order to become immediately the mediators of mutually fruitful relations between new substantial and formal mathematical theories on the one hand and theories of concrete sciences on the other hand. The last part of the paper deals with the relation of mathematics and dialectical materialism.

Produkcia ideí o spoločnosti na jednej strane a matematických ideí na strane druhej len ako bezprostredný vnútorný moment materiálnej výroby sú pre nás relatívne dávnu minulosťou. Deľba práce medzi fyzickou a duševnou prácou vytvorila podmienky pre vznik a relatívne samostatný vývin mnohých vied, medzi nimi i matematiky.

Preto štruktúrna analýza súčasnej matematiky sotva môže byť dostatočným základom pre dialektické pochopenie matematiky. Podobne pokusy aplikovať v špeciálnej vede nejakú matematickú štruktúru bez zreteľa na jej „históriu“ sotva môžu byť úspešné.

Do polovice 19. stor. predmet matematiky, nech sa akokoľvek menil, tvorili hlavne priestorové formy a kvantitatívne vzťahy objektívnej skutočnosti. Matematické teórie neskôr zaznamenali mohutný rozvoj a *bezprostredný* predmet hlavne axiomatických teórií sa „vzdaloval“ od pôvodného predmetu matematiky v objektívnej skutočnosti.

Otázka vzťahu bezprostredného predmetu matematiky a predmetu matematiky v objektívnej skutočnosti je osobitne dôležitá pre správne pochopenie pozície matematiky vo vede i v praxi. „... mnohí materialisti v snahe stanoviť predmet matematiky v objektívnej skutočnosti do určitej miery rozširujú klasickú definíciu matematiky a definujú ju ako vedu o všetkých možných priestorových formách a kvantitatívnych vzťahoch skutočného sveta i o formách a vzťahoch, ktoré sú im podobné“. [13, s. 98]

Čím je súčasná matematika pre vedu a prax? Na túto otázku sa

treba pozeráť z hľadiska toho, ako matematika v dejinách vznikala, akými hlavnými etapami vo svojom vývoji prechádzala.

V období búrlivého prenikania matematiky do všetkých vied nemôžno stáť v spore medzi materialistickým a idealistickým pohľadom na matematiku v neutrálnej pozícii. Snaha „zvedečťovať“ vedný odbor matematikou bez správneho filozofického a historického pohľadu na ňu vedie k nekritickému preberaniu predovšetkým novopozitivistických myšlienok a prístupov, v konečnom dôsledku k podceňovaniu praxe, k úniku od ideologických otázok, k porušovaniu princípu triednosti, k podceňovaniu života spoločnosti ako rozhodujúceho kritéria pravdivosti poznania.

Poznámky k historickému obrazu matematiky

Matematika sa v priebehu dejín nesporne menila. Ako je nám dobre známe, historický proces jej rozvoja nie je rovnomerný, štádiá pomalejšej evolúcie striedajú búrlivé obdobia revolúcií, obdobia hlbokých zvratov a premien starých predstáv.

Marxizmus vyžaduje „nezabúdať na základnú historickú súvislosť, na každý problém pozeráť z hľadiska toho, ako určitý jav v dejinách vznikol, akými hlavnými etapami prechádzal vo svojom vývoji a z hľadiska tohto jeho vývoja usudzovať, čím sa daná vec stala teraz“. (1, s. 418) Napriek tomu štruktúrny ráz súčasnej matematiky je akcentovaný a preferovaný, a to takým spôsobom, ktorý často potláča genetický aspekt.

Nie je našim cieľom prebádať priestorové a časové následnosti udalostí v historickom procese matematiky, sledovať vývin jej metód, základných pojmov a teórií. Z historickej genézy matematiky vyzdvihujeme niektoré jej stránky, ako je vývin vzťahu matematiky a praxe, vzťahu matematiky a iných vied, vývin vzťahu teoretickej a aplikovanej orientácie v matematike a pod., ktoré považujeme pre pochopenie filozofickej zložitosti matematiky, ako aj pre adekvátne aplikácie matematiky za dôležité.

Hybné sily rozvoja matematiky majú dva základné, objektívne existujúce zdroje. *Vonkajši*, historický prvotný zdroj je spätý s vznikajúcimi potrebami, ktoré majú vo väčšej alebo menšej miere praktický charakter. Pohyb matematiky vzniká a je podnecovaný úlohami praxe, techniky, vedy atď. Sformovaná matematika nadobúda vnútorný rozmach a vychádza za hranice bezprostrednej užitočnosti. *Vnútny* zdroj vyplýva z nutnosti systematizovať získané poznatky, objaviť ich väzby, zjednocovať ich pomocou zovšeobecnených koncepcií do teórie, rozvíjať túto teóriu podľa vlastných vnútorných zákonitostí.

Treba povedať, že hranica medzi týmito dvomi zdrojmi je relatívna. Relatívne samostatné sú aj smery rozvoja matematiky, aplikovaný a teo-

retický, ktoré im zhruba zodpovedajú. Ich vzájomný vzťah prešiel rozličnými dejinnými metamorfózami. História ukázala, že úroveň rozvoja matematiky, akcentácia tej či onej orientácie rozvoja je koniec koncov podmienená úrovňou a potrebami rozvoja ľudskej praxe. *Bezprostredne* je matematika podmienená na jednej strane úrovňou rozvoja konkrétnych vied a na druhej strane úrovňou rozvoja filozofie.

V ranom štádiu rozvoja matematiky obidve orientácie pôsobili na seba pomerne slabo, takže možno hovoriť o dvoch takmer autonómnych odvetviach matematiky — o aplikovanej a teoretickej (čistej) matematike. Kým v Egypte, podobne aj v Mexiku i u niektorých iných národov bola matematika výlučne aplikovaná, v starovekom Grécku, kde zrejme vznikla čistá matematika (v spätosti so sofistickou) najprv, sa aplikovaná matematika veľmi zreteľne odlišovala od čistej matematiky. Podobná situácia bola v stredoveku v islamskom svete i u algebraikov stredovekej Európy.

Predmetom štúdia čistej matematiky staroveku a stredoveku boli čísla a priestor a podľa toho sa členila na dve súčasti: na aritmetiku a geometriu.

Aspoň v hrubých črtách si všimnime filozofickú klímu tohto obdobia, predovšetkým jej dôsledky v čistej matematike. Na prvý pohľad by sa zdalo, že takéto pozastavenie sa z hľadiska našich cieľov je nepotrebné, ba priam nevhodné. Bolo by tomu tak, keby v našich hlavách nestrašili „odpadky starej metafyziky“.

Treba si najprv pripomenúť, ako sa interpretoval v tých dobách [a nielen vtedy, ale až po Hegla] kategoriálny aparát teórií vývinu. Výber a interpretácia kategórií vývinu, ako vieme, bol založený na *princípe totožnosti metód poznania a kategórií filozofie*. Vzťah medzi určitými metódami a kategóriami je podľa tohto princípu jedno-jednoznačný. (2, s. 106) Kategória kvality je v jedno-jednoznačnej korešpondencii s kvalitatívnymi metódami, kategórii kvantity zodpovedajú kvantitatívne metódy, kategórii formy — geometria a formálna logika, kategórii obsahu — obsahové metódy a pod.

Kvantita a kvantitatívne zmeny sa skúmajú v absolútnej abstrakcii od kvality a kvalitatívnych zmien, o abstrahovaní od iných kategórií ani nehovoriac. V takejto situácii čistá matematika nemohla byť inou než *mechanickým súčtom* aritmetiky a geometrie.

V teórii vývinu obidve súperili o primát univerzálnosti. V pytagorejskej škole bol priznaný kvantitatívnym metódam, keďže podstatu všetkých vecí podľa pytagorejcov možno vyjadriť pomocou celých čísel a vzťahov medzi nimi. Aristotelov výber kategórie formy a hmoty ako základných kategórií teórie vývinu posúva kvantitatívne metódy do úzadia a ich pozíciu zaujíma „geometrická algebra“.

Princíp totožnosti metód poznania a kategórií filozofie a jeho výraz v matematike v súčasnosti ešte len dožíva, preto sa k nemu neskôr ešte vrátíme.

Renesančná prírodoveda znamená pre matematiku kvalitatívne novú etapu v jej vývine. Matematika bola v tomto období veľmi tesne spätá s úlohami poznania prírodovedy a potrebami praxe. Do popredia sa dostalo najmä bádanie v oblasti mechanického pohybu. Práve problémy pohybu boli hlavným podnetom utvárania matematickej analýzy. Význam matematickej analýzy pre výskum javov prírody, procesov ich rozvoja Engels vyjadril slovami: „Až diferenciálny počet umožňuje prírodovede matematicky znázorniť nielen *stavy*, ale i *procesy*: pohyb.“ (3, s. 545)

Teoretická a aplikačná orientácia v matematike boli vtedy veľmi úzko prepojené a vzájomne sa obohacovali. Typický obraz ich vzájomného vzťahu má takýto charakter: vznik a počiatkový vývoj matematického pojmu bol diktovaný úlohami prírodovedy, vzápätí pojem nadobudol svoj samostatný život a jeho ďalší vývin pokračoval podľa vnútorných matematických zákonitostí; niektoré z výsledkov toho „čistého“ vývinu sa opäť použili v prírodovede, čo viedlo k objavu nových matematických pojmov atď.

Prechod od elementárnej matematiky k matematike premenných veličín znamenal vo vývine matematiky veľký obrat. Táto situácia zrodila zvlášť v matematickej analýze veľa vážnych, akoby neriešiteľných metodologických problémov. Výstižne charakterizuje stav matematiky tohto obdobia Engels, keď píše: „So zavedením premenných veličín a s rozšírením ich premennosti až po nekonečne malé a nekonečne veľké upadla matematika — inak tak prísnych mravov — do hriechu; okúsila jablko poznania, ktoré jej otvorilo cestu k obrovským úspechom, ale tiež k omylom. Panenský stav absolútnej platnosti, nezvratnej dokázanosti všetkého matematického bol naveky tentam; nastúpila ríša kontraverzií a prišli sme tak ďaleko, že väčšina ľudí diferencuje a integruje nie preto, že by rozumela tomu, čo činí, ale z rýdzej viery, pretože to až dosiaľ vždy správne vyšlo.“ (3, s. 103)

Jasnosti bolo v diferenciálnom a integrálnom počte naozaj málo. Grécky ideál axiomatickej kryštalizácie a systematickej dedukcie stratil svoj vplyv. Matematici, bezradní, pokiaľ ide o filozofiu, bezúspešne premýšľali o významoch nových termínov matematiky. Vzniká Newtonov a Leibnizov „mystický diferenciálny počet“, Eulerov a d’Alambertov „racionálny diferenciálny počet“, Lagrangeov „čisto algebraický počet“. Ako je známe, rozhodujúcu účasť na prekonávaní metafyzických a špekulatívnych hypotéz a výkladov, na odstránení nepodložených viet, vedecky nezmyselných slov a obratov, ktoré sa v tomto období búrlivého rozmachu rodili nie menej búrlivo, majú Marx a Engels. (3; 4, s. 600)

Pokladali si za povinnosť ukázať, ako sa aplikuje materialistická dialektika i v matematike. Výsledky ich štúdiu v tejto oblasti obohatili výrazne nielen matematiku, ale znamenajú aj prínos v rozvoji dialektickej metódy.

Niet sporu o tom, že matematika a matematická prírodoveda v tomto období dosiahli úspechy. Avšak *kvantitatívne metódy* ani na začiatku

19. stor. nemali to *univerzálne, všeobecné použitie*, ktoré im Descartes predvídal na úsvite novej epochy. Matematika a kvantitatívne metódy sa používali prevažne pri opise *jednoduchých* javov a procesov neživej prírody, kým vo výskume živej prírody, spoločnosti, poznania alebo procesov vývinu vo vlastnom zmysle slova vcelku nenašli svoje uplatnenie. Lakonicky, ale výstižne charakterizuje túto situáciu Engels v *Dialektike prírody*. „Použitie matematiky je v mechanike tuhých látok absolútne, v mechanike plynov približné, v mechanike kvapalín už obtiažnejšie — vo fyzike skôr skusmo a relatívne — v chémii praobyčajné jednoduché rovnice prvého stupňa — v biológii = 0.“ (3, s. 546)

V čistej matematike sa nahromadilo veľké množstvo nových poznatkov, vznikli viaceré teórie a s nimi celkom zákonite aj nové protirečenia. Matematici sa sústredili v období, počínajúc zhruba polovicou 19. stor., predovšetkým na znovuosporiadanie základov matematiky, na zjednotenie jej teoretickej časti. Rodia sa Cantorove štúdie z teórie množín a Weierstrassove idey z topológie, ktoré hlboko poznačili ďalší vývin matematiky. Teoretická orientácia v dôsledku svojich úspechov získala primát a určovala svoj štýl celej matematike. Do matematiky sa teda vracia klasický ideál presnosti a strohosti dôkazov, aby prevýšil i jeho grécky vzor.

Zatiaľ čo sa čistá matematika úspešne vysporadúvala so svojou minulosťou, orientácia na aplikácie, vyzbrojená klasickým matematickým aparátom, našla výborného partnera vo fyzike.

Hoci kdesi na horizonte sa už črtali protirečenia v teórii množín, úspechy teoreticko-množinovej orientácie, jej jazyk a prístupy pôsobili tak silne, že zrodili predstavu o akoby absolútnej úrovni dosiahnutej prísnosti. Mnohí matematici, no ešte väčšmi nematematici, nehladiac na všeobecne platnú tézu o relatívnosti poznania, i dnes pripisujú matematike onen atribút absolútnej prísnosti a presnosti.

Tým, že teoretická orientácia diktovala celej matematike jednotnú úroveň prísnosti, v aplikovaných úlohách sa vyostril rozpor medzi fyzikálnou úrovňou presnosti, na ktorej sa formulovala úloha a interpretovalo riešenie matematickou presnosťou, ktorá sa vyžadovala od matematických riešení. Je to rozpor, ktorý v predchádzajúcom období ani zďaleka nedosiahol takú hĺbku. Táto etapa má v sebe naozaj veľa poučného i pre súčasný proces matematizácie.

Ťažkosti, ktoré vznikli koncom 19. stor. v súvislosti s odhalením paradoxov teórie množín, podnietili matematikov k dôslednej analýze všetkých východiskových predpokladov svojich teórií i logických prostriedkov používaných v dôkazoch, t.j. pri odvodzovaní teorém a axiémov. Pozoruhodné výsledky v tomto smere dosiahol kolektív francúzskych matematikov, vystupujúcich pod pseudonymom N. Bourbaki. Ich úsilie vyjadriť všetky existujúce matematické teórie kombináciou, resp. syntézou určitých základných abstraktných štruktúr udáva v súčasnej čistej matematike tón. V dôsledku toho získava čistá matematika podo-

bu akejsi grandióznej budovy. Objavili sa však už aj jej slabé stránky. Analýza systému axióm teórie množín ukázala, že niektoré základné tézy „rozumějúc sa samy sebou“ v skutočnosti môžu, byť ale aj nemusia byť prijaté, čo môže viesť k rovnoprávnej koexistencii rozličných, medzi sebou neekvivalentných „teoreticko-množinových matematík“.

Ďalší vážny nedostatok teoreticko-množinovej matematiky sa obnažuje vo vzťahu k aplikovanej matematike. V aplikáciách holé tvrdenie o existencii matematických objektov, napr. tvrdenie, že „riešenie danej úlohy existuje“, je zrejme nedostatočné. Žiaľ, súčasná čistá matematika je veľmi bohatá na nekonštruktívne dôkazy existencie.

A aký je dnes vzťah matematiky k ostatným vedám, k technike a praxi?

„Sústava tvorby takých poznatkov, ktoré sú orientované predovšetkým a prevažne na vytvorenie novej techniky, technológie a materiálnych hodnôt“, to je podľa Volkova „tradičná veda“ [12, s. 139], ktorá postupne odumiera. Zároveň sa rodí nová veda, veda orientovaná na človeka. A tak keď matematika postupne „našla svoj domov“ v prírodných vedách a v technike, nutne v týchto premenách vedy všeobecne musí nájsť svoje miesto i v spoločenských vedách, resp. spoločenské vedy sa stanú významným vonkajším zdrojom, vysoko potenčnou silou jej ďalšieho rozvoja. Rodí sa nová veda a s ňou nová matematika a *éra všeobecnej matematizácie*.

Poznámky k logicko-genetickému obrazu matematiky

Dodnes pretrváva predstava o matematike ako vede odtrhnutej od praxe, ktorá pochádza z tej historickej etapy, keď bola čisto špekulatívnou vedou, keď sa úloha vedeckých disciplín videla v ideálnom konštruovaní sveta, a nie v jeho pretváraní. Zapustila svoje korene tak hlboko, že ešte dnes je potrebné s ňou zápasiť. V skutočnosti „matematika rovnako ako všetky ostatné vedy vznikla z ľudských potrieb: z merania pôdy a obsahu nádob, z počítania času a z mechaniky“. (3, s. 60)

Prax a matematika sú v dialektickom vzťahu, ku ktorému treba pristupovať z hľadiska historického materializmu, na základe správneho poňatia vzťahu medzi spoločenským bytím a spoločenským vedomím.

Ak sa chceme zameriavať na podstatu matematiky, musíme si všímať nielen momentálny prierez jej štruktúrou, ale je potrebné prihliadať aj na jej genetickú stránku, na jej základné protirečenia. Pri jej logickej rekonštrukcii musíme najprv abstrahovať z javových foriem, *postupovať späť*, od neurčitej empirickej predstavy o matematike k jej zárodočnému momentu.

Tvrdenie, že „produkcia ideí, predstáv, vedomia sa najprv bezprostredne prelína s materiálnou činnosťou a s materiálnymi stykmi ľudí...“ (5, s. 40), je samozrejme platné aj pre matematické idey. *Podstata* matematiky je daná jej miestom v spoločenskej praxi, resp. v jej genetic-

kom začiatku, základe — v materiálnej výrobe. Opäť sa potvrdzuje téza, že „hladisko života, praxe musí byť prvým a základným hladiskom teórie poznania“. (6, s. 125)

Fáza vzniku predmetu matematiky je fázou predhistórie matematiky. V tejto fáze sa v podmienkach daných praxou ešte len rodia vnútorné sily matematiky. V tomto období svojej nehotovosti matematika ešte nezačala absolvovať svoj vlastný historický pohyb, určený svojimi vnútornými protikladmi.

Prax však neprestala a neprestáva rodiť nové sily matematiky ani vo chvíli, keď matematika nadobudla svoj vlastný pohyb. „Bunka“ matematiky nie je raz navždy daná, ale je v pohybe, rozvíja sa, tak ako sa rozvíja sama spoločenská prax.

Samovývin matematiky je iba relatívny. Matematika v celom svojom vývinovom procese transformuje vonkajšie podmienky na vnútorné stránky tohto procesu, čerpá nové sily, a to nielen z praxe, ale aj z vedy. Treba poznamenať, že hoci sme zatiaľ naznačili vo vývine matematiky len jeden smer vzťahu matematiky a jej podmienok, je to len dočasné, pretože tento vzťah je v skutočnosti *dialekticky* dvojsmerný. Zákonite totiž dochádza k určitému obratu, kedy matematika ako výsledok pretvára podmienky, ktorých pôsobením vznikla.

Známa Marxová prvá téza o Feuerbachovi, vytvárajúca nosný pilier nového svetonázoru, v ktorej uvádza: „Hlavným nedostatkom každého doterajšieho materializmu... je, že sa predmet, skutočnosť, zmyslovosť poníma len vo forme *objektu*, čiže *nazerania*, nie však ako ľudská zmyslová činnosť, prax, nie subjektívne“ (7, s. 342), len teraz výraznejšie mení predstavy o matematike.¹

Matematika, to nie sú len formalizované teórie, ona obsahuje aj empiriu. Na matematiku je potrebné pozeráť ako na určité špecifické empirické a teoretické poznávanie založené na praxi. Tvrdenie, že v praktickej činnosti sa nachádzajú v nedeliteľnej, bezprostrednej jednote aj zmyslová danosť predmetu (fixované empirickým poznaním), aj jeho podstatná určenosť (odhaľovaná na teoretickej úrovni) (8, s. 159), platí aj pre predmet matematiky.

Predmet matematiky sa v empirickej rovine poznania zobrazuje neúplne, povrchno, jednostranne, čiže abstraktne. Zmyslovo názorný obraz predmetu matematiky vytvárajú predovšetkým určité javové formy reálnych kvalitatívnych a kvantitatívnych vzťahov a priestorových foriem skutočnosti. Abstrakcie, ktorými sa redukujú dané individuálne javové formy na ich všeobecnú javovú formu, sú púhymi elementárny-

¹ Veď v našej didaktike sa len prednedávnom začala uplatňovať myšlienka o tom, že aj matematické poznávanie je založené na praktickej činnosti. Deti dneška začínajú získavať elementárne predstavy o množine, o číslach, o vzťahoch medzi veličinami, o najjednoduchších geometrických útvaroch, učia sa orientovať v priestore a čase nie pasívnym nazeraním na výklad učiteľa, ale formou detských hier, aktívnu prakticko-poznávacou činnosťou. Poznávací efekt je teda závislý od toho, aké prakticko-predmetové situácie sú im pedagógovia schopní navodiť.

mi, formálnymi abstrakciami. Tieto abstrakcie (nazvime ich matematickými abstrakciami, pretože majú svoje špecifikum), vytvorené empirickou cestou — cestou fixácie určitých bezprostredných vzťahov a vlastností, sú podmienkou tvorby matematických teoretických pojmov, ktorými sa určuje vzťah medzi empirickými predstavami. Teoretické pojmy tohto druhu (matematické pojmy prvej úrovne) sú zase predpokladom tvorby nenázorných obrazov hlbších podstát predmetu.

Elementárna abstrakcia je schopná myšlienково diferencovať reálny predmet skúmania na jeho javové formy, prenikanie do podstaty predmetu matematiky sa však uskutočňuje oveľa zložitejšími formami abstrahovania.

Prechod od empirických predstáv k teoretickým pojmom rôznej úrovne sa uskutočňuje prostredníctvom idealizovaných objektov, „ktoré zastupujú a predstavujú skúmaný predmet v jeho teoreticky zdôvodnenej aproximácii, v čistej, od rušivých okolností oslobodenej a teoreticky opravenej podobe“. [9, s. 32]

Idealizácia, na rozdiel od elementárnej abstrakcie, nerozbíja daný predmet, ale ho zobrazuje v jednote nevyhnutných, elementárnych momentov. „Idealizácia je určitou formou prechodu od rýdzo formálnej abstrakcie k dialektickej abstrakcii.“ [10, s. 70]

Matematika sa ešte dnes považuje za citadelu neprotirečivosti. Produkcia matematických ideí vo svojom celku však nemôže prebiehať bez hlbokých dialektických protirečení. Univerzálny dialektický zákon protirečenia má svoje miesto aj v matematike. Údajná neprotirečivosť matematiky ako celku je v skutočnosti len lokálnou a dočasnou formou riešenia protirečivých vzťahov v rámci určitého fragmentu matematiky.²

Ako sa rodili prvé teoretické matematické pojmy? Nie sú dané a priori, nie sú ani subjektívnymi konštrukciami, ako sa domnievajú idealisti, ale sú výsledkom empirického poznania spätého s praxou. Ich zdrojom sú určité protirečenia vo vzájomnom vzťahu javových foriem, ktoré na empirickej úrovni poznania nie je možné rozriešiť. Hľadajú sa teda kvalitatívne nové spôsoby poznávania. Medzi dve stránky vzájomného vzťahu vstupuje aspoň jeden tretí člen, ktorý vyjadruje podstatu tohto protirečivého vzťahu, nie je však redukovateľný na žiaden z jeho krajných členov, ani sa nedá z jednotlivých členov logicky odvodiť. Je to idealizovaný objekt, ktorý sa svojimi vlastnosťami a vzťahmi líši od javových foriem. V procese idealizácie, kedy sa v idealizovaných podmienkach formuje určitý idealizovaný objekt, utvára sa aj jeho obsah a formuje sa zároveň aj jeho pojem. Teoretické matematické pojmy sú teda svojím pôvodom a obsahom objektívne.

² Problém dialektického protirečenia v matematike je jeden zo zložitých problémov filozofie a histórie matematiky, ktorému bude potrebné v čo najbližšej budúcnosti venovať sústredenú pozornosť. Chápanie vnútornej protirečivosti matematiky je jedným z predpokladov správneho prístupu k štúdiu vzťahu matematiky a konkrétnych vied.

Ak sa teoreticky vyriešili protirečenia javových foriem, vznikajú zároveň nové vzťahy, vzťahy medzi idealizovanými objektami (najnižšej úrovne) a rozvíjajú sa dve protikladné stránky tohto nového vzťahu, v lone ktorého sa rodí a formuje idealizovaný objekt vyššej (druhej) úrovne a s ním vyvinutejší teoretický pojem atď. Na tomto základe sa formujú matematické *obsahové* teórie ako komplexy tvrdení o konkrétnych (obsahových) systémoch idealizovaných objektov. Z genetického náčrtu je zrejmé, že matematické idealizované objekty, tak ako idealizované objekty vôbec, nemožno realizovať v jednotlivom, zmyslovo názornom predmete. Názornosť idealizovaných objektov nemá charakter zmyslovej názornosti, ale názornosti myšlienkového-konkrétneho obrazu. [9, s. 33] Napríklad obsahová aritmetika skúma konkrétne číselné systémy. Osobitný význam kvality pojmového aparátu a presnosti jazyka v obsahovej matematike spočíva práve v tom, že narába s nenázornými obrazmi.

Matematická teória sa vyvíja ďalej. Od myšlienkových operácií s nenázornými obrazmi podstát bezprostredných foriem javov prechádza k čisto logickým operáciám s jazykovými znakmi (symbolmi), k formálnym teóriám.

Triedy idealizovaných objektov tej istej kvality sa redukujú na sémanticky nevymedzené symboly, ktoré sú určené syntakticky ich pozíciou v určitom systéme výrokov. Idealizované objekty obsahovej matematickej teórie sa redukujú na symboly. Na základe obsahových matematických teórií sa stanovujú východiskové výroky (axiómy) formálnej matematickej teórie a formálne syntaktické pravidlá operovania s nimi, umožňujúce odvodiť nové výroky teórie (teorémy). Príkladmi formálnych matematických teórií sú: formálna geometria, formálna aritmetika, formálne algebraické teórie, akými sú teória grúp, teória ideálov atď.

Formálna matematická teória je určitým zovšeobecnením v tom zmysle, že je teóriou, ktorá odráža nie jednu predmetnú oblasť, ale celú triedu predmetných oblastí, zhodných medzi sebou podľa nejakého kritéria. Jedna a tá istá formálna matematická teória môže mať rôzne sémantické interpretácie. Môže byť aj určitým základom pre vytváranie *nových* obsahových matematických teórií.

Postup od jednoduchej matematickej abstrakcie cez mnohostupňové špeciálne (matematické) idealizácie k matematickým formalizmom a odtiaľ „spätný“ pohyb cez sémantické a empirické interpretácie predstavuje redukciu zložitej logickej genézy matematiky na jej relatívne jednoduchú formu. Pohyb sa ďalej rozvíja takým spôsobom, že zdrojom nových impulzov sa pre matematiku stávajú teórie konkrétnych vied, kedy určité protirečivé vzťahy medzi objektami nematematickej teórie sú schopné produkovať celkom nové matematické idealizované objekty, nové matematické pojmy, aby sa vzápätí stali sprostredkovateľmi obojstranne plodných vzťahov medzi novými obsahovými i formálnymi ma-

tematickými teóriami na jednej strane a teóriami konkrétnych vied na strane druhej.

K vzťahu matematiky a dialektického materializmu

Úloha dialektického materializmu spočíva v tom, aby metodologicky zjednocoval na fundamentálnom základe, ktorým disponuje, všetky najnovšie úspechy konkrétnych vied, aktívne rozpracúval a rozvíjal prostriedky vedeckého bádania, zdokonaľoval teóriu a metodológiu vedeckého poznania. Z tejto pozície máme možnosť adekvátne hodnotiť rôzne súčasné metodologické orientácie a najpresnejšie určiť miesto procesu matematizácie vo vedeckom poznaní z pohľadu marxisticko-leninskej filozofie.

Ako každý spoločenský jav, aj vedecké poznanie prešlo vo svojom vývine radom určitých periód, ktoré nesú v sebe nevyhnutne pečať svojej epochy. „Teoretické myslenie každej epochy, teda i našej, je historický produkt, ktorý v rôznych dobách dostáva veľmi rôznu formu a zároveň veľmi rôznu obsah.“ [3, s. 344]

V súčasnom vedeckom myslení je ešte dosť rozšírený názor, podľa ktorého sú filozofický a matematický pojem kvantitty totožné. S ním je úzko spätá predstava, že podstata matematických abstrakcií spočíva v zobrazení kvantitatívnych vzťahov v „čistej“ podobe, v absolútnej abstrakcii od kvality. Zabúda sa na to, že sú to pozostatky *princípu totožnosti metód poznania a kategórií filozofie* (spôsobu interpretácie filozofických kategórií, pri ktorom vzťah medzi určitými metódami a kategóriami sa chápe ako jedno-jednoznačný), ktorý sa rešpektoval v predhéglovských teóriách vývinu a ktorý dialektický materializmus odmieta.

Ako vieme, kategórie dialektiky, v ktorých sa zrkadlia najpodstatnejšie zákonitosti zmeny a vývinu, vyjadrujú základné zákony dialektiky: zákon prechodu kvantitatívnych zmien v kvalitatívne, zákon jednoty a boja protikladov, zákon negácie negácie.

Kvality a kvantitty predmetov sú diferencované z hľadiska rozmanitých aspektov — *do šírky* a z hľadiska prenikania k podstate — *do hĺbky*. Podľa Černíka je z hľadiska súčasnej úrovne vývinu poznania dôležité rozlišovať „*tri základné stupne vo vývine vedeckého zákona*: 1. zákon javu, resp. faktuálny zákon, 2. idealizovaný zákon a 3. imanentný zákon konkrétnych celkov“. [10, s. 26] S tým korešponduje Kuzminova interpretácia procesu poznania miery a teda aj kvality a kvantitty. Člení ju do troch stupňov, ktorým zodpovedajú osobitné formy miery: miera jednotlivého predmetu, ktorý berieme sám osebe (jednoduchá miera); miera predmetu ako prvku, časti určitého systému (systémová, substačná miera); miera predmetu ako súhrnu všetkých jeho skutočných vzťahov (reálna miera). [11, s. 213]

Jednoduchá miera je spätá s individuálnymi vlastnosťami javu, pričom podstata javu ešte nie je odhalená. Jav vystupuje izolovane a jeho

kvalita, kvantita a miera nadobúdajú najjednoduchšie charakteristiky. Na druhom stupni poznania miery sa jav študuje v jeho druhovom, systémovom bytí. Najvyššou formou miery je reálna miera, ktorej zodpovedá predstava javu ako výsledku pôsobenia všetkých podmienok. Miera javu je tu určená nielen prostredníctvom všetkých aktuálnych systémov a ich zákonov, ale aj konkrétno-historicky, s uvážením celého súhrnu pôsobiacich podmienok a vzťahov.

Treba povedať a zdôrazniť, že nielen kategoriálny aparát zákona prechodu kvantitatívnych zmien v kvalitatívne, ale aj ďalších zákonov, každá kategória vývinu má svoje miesto *na všetkých možných úrovniach poznania*, či už ide o úroveň poznania javu alebo podstaty, obsahu alebo formy a pod.

Čo plynie z týchto charakteristických črt dialektiky pre správne chápanie vzťahu matematiky a dialektiky? Ako sa nimi konkretizuje vzťah dialektiky a matematiky, vzťah, ktorý je vzťahom všeobecného a zvláštneho?

Kategórie dialektického materializmu vyjadrujú na všetkých úrovniach poznania to všeobecné a podstatné, čo je príznačné pre všetky javy objektívneho sveta. Matematika reprodukuje *to isté všeobecné*, ale v jeho *zvláštnej forme*. Má svoje miesto *na všetkých možných úrovniach poznania*. Jej pozícia je tam však iná, než je pozícia dialektiky. Na každom stupni vývinu vedeckého poznania je úroveň matematických abstrakcií vyššia oproti úrovni abstrakcií dialektiky, a to v tomto vzťahu, že vývin pojmov matematiky je založený na odhliadnutí od tých rozdielov (napr. rozdielov kvality a kvantity, kvalitatívnych a kvantitatívnych zmien, vývinu a jednoduchých druhov pohybu), ktoré určujú podstatu kategoriálneho aparátu dialektiky. Nemožno teda stotožňovať kategóriu kvantity s matematickým pojmom kvantity. Predmetom matematiky nie je len kvantita, ale všetka rozmanitosť vzťahov sveta, nevynímajúc z neho ani kvalitu v jednote s kvantitou, protiklady, náhodu, nutnosť atď., reprodukované na špecifickej úrovni abstrakcií, pri odhliadnutí od zvláštností týchto vzťahov v prírode, spoločnosti a myslení.

Črtajú sa však aj hranice možností matematiky. Sama matematika nie je schopná vyjadriť proces vzniku, fungovania, vývinu a zániku historicky konkrétnych celkov. Absolutizácia matematických postupov vo vedeckom bádání je naprijateľná a je treba proti nej vystupovať. Na druhej strane akékoľvek znižovanie významu matematiky pre poznanie vývinového procesu môže mať negatívne dôsledky.

Vzťah matematiky a dialektiky má dialektický charakter. Marx a Engels nám zanechali v *Matematických rukopisoch* a v *Dialektike prírody* klasické ukážky dialektickomaterialistického skúmania takých idealizovaných objektov, ako je napr. diferenciál (4, s. 542—544), pričom operovali, prirodzene, abstrakciami a idealizáciami matematiky s rešpektovaním zákonov a pravidiel tejto vedy. Tieto výskumy pomohli spresneniu filozofického i matematického aspektu analyzovaných abstrakcií

a zdokonaleniu rozvoja metód dialektickej analýzy, čo umožňuje v ďalšom ešte efektívnejšie používať dialektickú metódu pri riešení vlastných problémov matematiky.

Pred dialektikou stojí v oblasti matematiky veľa náročnej vedeckej práce. Neobyčajne závažné je ďalšie rozpracúvanie a používanie marxistickej dialektickej *metódy postupu od abstraktného ku konkrétnemu* v matematike. Podobne ako sa nám skúmaný predmet vyvíja od najnižších stupňov svojho bytia (od svojej „bunky“) k stále vyšším stupňom rozvoja, tak aj pri systematickej myšlienkovvej reprodukcii procesu jeho vývinu, to znamená v idealizovanej forme, metóda postupu v zovšeobecnenom tvare ukazuje tú istú postupnosť stupňov daného procesu. Pretože sa matematika len buduje, že jej základ utvára logický vývin myslenia o predmete, ktorý (vývin) *len sprostredkované* zobrazuje v zvláštnej forme všeobecný charakter vývinu prebiehajúceho od nižšieho k vyššiemu, od jednoduchého k zložitejšiemu a podľa toho od abstraktného ku konkrétnemu, úloha je to naozaj zložitá. Má však kľúčový význam nielen pre samu matematiku, ale zásadne ovplyvní charakter a efektívnosť prebiehajúceho procesu matematizácie konkrétnych vied.

LITERATÚRA

1. LENIN, V. I.: Spisy 29. Bratislava 1954.
2. BORODKIN, V. V.: Princip odnoprjadjkovosti zakonov dialektiki. In: Problemy dialektiki. Vyp. IV. Leningrad 1974.
3. MARX, K.-ENGELS, F.: Spisy 20. Praha 1966.
4. MARX, K.: Matematické rukopisy. Praha 1978.
5. MARX, K.-ENGELS, F.: Spisy 3. Praha 1958.
6. LENIN, V. I.: Spisy 14. Bratislava 1958.
7. MARX, F.-ENGELS, K.: Vybrané spisy II. [Tézy o Feuerbachovi]. Bratislava 1971.
8. DAVYDOVA, G. A.: Praktika — osnova empiričeskoj i teoretičeskoj stupeni poznaniya. In: Praktika i poznaniye. Moskva 1973.
9. ČERNÍK, V.: Myšlienkový experiment. Bratislava 1972.
10. ČERNÍK, V.: Problematika zákona v marxistickej metodológii vied. Bratislava 1977.
11. KUZMIN, V. P.: Kategorija mery v marxistskoj dialektike. Moskva 1966.
12. VOLKOV, G. N.: Sociológia vedy. Bratislava 1971.
13. MOROZOV, K. E.: Problém filozofického zdůvodnění matematiky a matematické logiky. In: Filozofické základy přírodních věd. Praha 1980.

О ФИЛОСОФСКОМ ИЗМЕРЕНИИ МАТЕМАТИКИ

Алойз Ритомски

Философские и общеметодологические вопросы имеют первоочередное значение для развития математики и для рефлексии этого развития. Марксизм требует и при создании представления о математике не упускать из виду основные исторические связи. Из истории

ческого генезиса математики в статье подчеркиваются некоторые его стороны, как развитие отношения между математикой и практикой, между математикой и другими науками, развитие отношения между теоретической и прикладной ориентациями в математике и т. п., которые важны для постижения философского компонента математики и для адекватного применения математики.

Во втором разделе статьи автор намечает движение от простой математической абстракции через многоступенчатые специальные (математические) идеализации к математическим формализациям, а оттуда „обратное“ движение через семантические и эмпирические интерпретации, которые представляют собой сведение сложного логического генезиса математики к ее относительно простой форме. Далее движение развивается таким образом, что источником новых импульсов для математики становятся теории конкретных наук, когда определенные противоречивые отношения между объектами математической теории способны производить совершенно новые математические идеализированные объекты, новые математические понятия, чтобы вслед затем стать посредниками взаимно плодотворных отношений между новыми содержательными и формальными математическими теориями, с одной стороны, и теориями конкретных наук, с другой стороны.

Последний раздел статьи посвящен отношению между математикой и диалектическим материализмом, который раскрывает уровни сложной структуры современной математики и границы ее возможностей.

ÜBER DIE PHILOSOPHISCHE DIMENSION DER MATHEMATIK

Alojz Ritomský

Philosophische und allgemein methodologische Fragen besitzen für die Entwicklung der Mathematik und deren Reflexion erstrangige Bedeutung. Der Marxismus postuliert die Berücksichtigung wichtigster historischer Zusammenhänge auch bei der Herausarbeitung eines Mathematikbildes. Von der historischen Genese der Mathematik werden im Aufsatz deren einige Aspekte, so die Entwicklung der Relation von Mathematik und Praxis, der Relation von Mathematik und anderen Wissenschaften, die Entwicklung der Relation der theoretischen und applizierten Orientierung in der Mathematik usw. hervorgehoben, die für das Begreifen der philosophischen Komponente der Mathematik sowie für die adäquate Applikation der Mathematik wichtig sind.

Im zweiten Teil des Aufsatzes beschreibt der Vf. das Fortschreiten von einfacher mathematischer Abstraktion über vielgradige spezifale (mathematische) Idealisierungen zu mathematischen Formalismen und von da aus das „Rückschreiten“ über semantische und empirische Interpretationen, das die Reduktion der komplizierten logischen Genese der Mathematik auf ihre relativ einfache Form darstellt. Die Bewegung wird weiterentwickelt in dem die Mathematik neue Impulse von den Theorien konkreter Wissenschaften erhält, wenn bestimmte kontradiktorische Relationen unter Objekten der mathematischen Theorie nicht fähig sind ganz neue mathematische idealisierte Objekte zu produzieren, um die neuen mathematischen Begriffe gleich zu Vermittlern beiderseitig ergebnisreicher Relationen zwischen Theorien mit neuem Inhalt und formal-mathematischen Theorien einerseits und Theorien konkreter Wissenschaften andererseits werden zu lassen.

Abschliessend wird Bezug auf die Relation von Mathematik und dialektischem Materialismus genommen. Der dialektische Materialismus erklärt die Ebenen der komplizierten Struktur gegenwärtiger Mathematik und die Grenzen ihrer Möglichkeiten.