

K OBTÍŽÍM MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ

IVO ZAPLETAL, Ústav filozofie a sociologie, ČSAV, Praha

ZAPLETAL, I.: Difficulties of Mathematical Modelling. *Filozofia* 38, 1983, No. 1, p. 21–26

In the paper the basic problems of mathematical modelling are analyzed by which the creating of mathematical models of some non-mathematical region or a part of reality is understood.

Specific attention is paid to some difficulties of mathematization of scientific cognition. In the paper there are five of them brought: 1. Mathematicians often do not know the region quite well which their theory is going to be applied to and the other way round, the specialists in non-mathematical disciplines do not know the latest knowledge in mathematics. 2. Empty mathematization — the transcription of verbal assertions of a substantial theory into a symbolic mathematical theory in order to achieve the semblance of the scientific method. 3. Insufficient elaboration of a substantial theory. 4. Temporary non-existence of mathematical means which would be able to express (model) adequately complex phenomena and processes. 5. Variety of models, appropriate to describe a definite substantial theory.

Za klíčový problém matematizace vědeckého poznání považujeme *problém redukce klasické (tradiční) teorie* způsobené zavedením jejího matematického modelu. Některé kardinální otázky matematizace se pokusíme ukázat na problematice matematického modelu a matematického modelování. (Pomineme ovšem výpočetní, tedy čistě metrické aplikace matematiky). K tomu je ovšem třeba si vytvořit patřičnou pojmovou aparaturu.

Mějme danu nějakou „klasickou“ (obsahovou, tradiční) teorii (OT), ať již přírodovědeckou či společenskovední o nějaké části skutečnosti — objektu (o). Matematickým modelem (MT) této teorie budeme nazývat soubor matematických pojmů, teorií a metod, který je v jistých kontextech schopen zastupovat zkoumanou teorii.

Studium tohoto souboru přináší obvykle novou informaci o zkoumané části skutečnosti o .¹

Mezi obsahovou teorií OT a jejím matematickým modelem MT jako dvěma systémy existuje vztah homomorfismu nebo dokonce izomorfismu.²

¹ Uvedené pojetí matematického modelu teorie (pozor na rozdíl pojmů model teorie a model skutečnosti) vychází z obecného pojetí modelu, jak je prezentováno např. v práci: Morozov, K. E.: *Matematičeskoe modelirovanije v naučnom poznanii*. Moskva 1969, s. 40.

² Izomorfní se nazývají takové dva systémy A, B , pro něž platí:

a) každému objektu $a \in A$ je jednoznačně přiřazen objekt $b \in B$ a naopak

b) každému objektu $b \in B$ je jednoznačně přiřazen objekt $a \in A$ a naopak.

c) jestliže nějaké objekty $\{a_1, a_2, \dots\}$ jsou spjaty v systém relací R ($a_1, a_2, \dots$), pak odpovídající objekty v B musí být spjaty relací R_1 ($b_1, b_2, \dots$) a naopak.

Homomorfni se nazývají takové dva systémy A, B , mezi nimiž není vzájemně

Jinak řečeno je matematický model obsahové teorie jistá matematická teorie (teorie matematických objektů), která určitým způsobem koresponduje s touto obsahovou teorií. Objektům z OT (někdy ne všem) odpovídají matematické objekty z MT , pravdivým tvrzením z OT by měly odpovídat platná tvrzení z MT a naopak. Často však tento poslední druh korespondence není zaručen a hovoříme potom o hypotetickém modelu teorie.

Matematickým modelováním budeme rozumět vytváření matematických modelů nějaké matematické oblasti nebo části skutečnosti (obsahové situace).

V tomto smyslu je v podstatě veškeré užití matematiky založeno na matematickém modelování. Dokonce existují matematické modely, které popisují skutečnost dvěma rozdílnými způsoby, které však někdy bývají sui generis ekvivalentní (například „vlnová“ a „maticová“ varianta kvantové mechaniky).

Teorie matematického modelování, teorie vytváření matematických modelů v tomto smyslu není dosud propracována.³ Nyní se na jednoduchém schématu matematického modelování pokusíme ilustrovat možná úskalí, včetně možností, ale i mezí matematického modelování.

Mějme nějakou reálnou situaci (část skutečnosti) o , která je předmětem jisté obsahové (klasické) teorie OT . MT je pak matematický model této teorie (viz schéma 1)

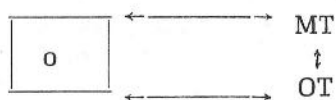


Schéma 1

Je zřejmé, že mezi o , OT a MT jsou vztahy jistého morfismu. V tomto kontextu je možné připomenout moderní partii matematiky — teorii kategorií, pro kterou se právě v tomto ohledu nabízejí možnosti uplatnění při popisu procesu matematického modelování.

Uvedené schéma je vlastně schématem klasického typu aplikace matematiky v obecném smyslu. Z hlediska teoretické (tzv. čisté) matematiky jsou možnosti vytvoření MT v principu dvojí. Existuje jistá „čistě“ matematická teorie, která je pak základem jistého matematického modelu. Jde o situaci, v níž *zdánlivě* zcela mimo praktické potřeby vědy či společensko-historické praxe někde, ať již uprostřed či na okraji moderní matematiky, vzniká teorie, která se hodí k matematickému

jednoznačné přiřazení (jeden ze systémů je pouze zjednodušenou „kopíí“ druhého). V jistém smyslu je každá teorie homomorfním modelem (systémem) vzhledem k systému studované části skutečnosti.

³ Pozor na omyl, který může vzniknout srovnáváním, nabízejícím se z teorií modelů jako matematickou disciplínou, zabývající se matematickými systémy, které modelují (interpretují) formální teorie. K tomu viz např. práce A. Robinsona.

modelování jistých obsahových teorií (či zprostředkovaně k popisu jisté části reality). Příkladem tohoto způsobu tvorby *MT* je např. aplikace teorie grup na problémy teoretické fyziky nebo aplikace Lobačevského geometrie v teorii relativity. Druhá možnost je vytváření matematického aparátu (teorie) přímo pro potřeby formalizace a matematizace jisté oblasti.

Nematematické vědní discipliny kladou totiž požadavky na samotnou matematiku a řada matematických teorií vznikla přímo pro teorii matematické teorie her v souvislosti se studiem konfliktních situací a nebo v oblasti psychologie vznik faktorové analýzy v souvislosti s výzkumem lidských schopností. Tato druhá možnost — vznik matematické teorie vhodné k modelování nematematických teorií — v sobě skrývá problém, který spočívá v tom, že dosavadní matematické prostředky vznikaly převážně v souvislosti s potřebami přírodních věd (převážně fyziky), a proto nejsou vhodné ke studiu společenských jevů a procesů. V poslední době se proto pozornost vědců pracujících v mezních disciplínách (matematická biologie, matematická psychologie, matematická ekonomie) soustřeďuje na vypracování matematické aparatury, vhodné ke studiu jevů a procesů složitějších a mnohotvárnějších.⁴

Obě možnosti vzniku *MT*, jak byly popsány, vedly v úvahách některých autorů i k terminologickému rozlišení disciplin, které se jimi zabývají. (Rozlišení biologické matematiky a matematické biologie u M. K. Chytila, obě discipliny se pak souhrnně nazývají biomatematika).

V souvislosti s úvahami o vzniku modelu *MT* se dostáváme k formulaci 1. obtíže matematizace vědeckého poznání, která spočívá v tom, že *matematikové často neznají dobře oblast, na kterou bude jejich teorie aplikována a naopak, odborníci v nematematických oborech neznají nejnovější poznatky matematiky*. Uvedená obtíž se dá odstranit a částečně se i odstraňuje organizačně tak, že vzniká studium matematiky v kombinaci s netradičními obory (biologie, sociologie atd.). Současně s tím však vznikají spory kompetenčního a statutárního charakteru, které ve vědecké praxi mají někdy značný význam pro motivaci činnosti v této oblasti. Může se např. stát, že jistá práce na pomezí matematiky a ekonomie je označována matematiky za výbornou práci z oblasti ekonomie a ekonomové ji zase označují za vynikající matematickou studii.

Další, 2. obtíž matematizace vědeckého poznání souvisí s „pokusy“ matematizovat *OT* tak, že se provede *pouhý přepis verbálních tvrzení OT do symbolické podoby MT za účelem vytvoření zdání vědeckosti*. ([Jde o tzv. prázdnou matematizaci.] Je to jistý druh pseudomatematizace či lépe pseudosymbolizace, která vlastně ani matematizací není.

⁴ Více o tom viz například M. K. Chytil: Acta Bioteoretica 1977, 26. I když některá tvrzení autora jako například, že matematika jakožto univerzální metoda je *apriori* schopna popsat libovolný jev reálného světa, se nám jeví jako nesprávná.

Přesto se s ní setkáváme a ne tak příliš málo, jak by se zdálo. Příklady pusté matematizace se často vyskytují v nepříliš rozvinutých disciplínách, kde se jejich vnitřní obsahová nedostatečnost kamufluje matematickou formální symbolikou. V pedagogice jde např. o to, že pouhým označením učitel: U , žák: Z a jejich vzájemný vztah: $U \rightarrow Z$ se snaží vzbudit někteří autoři zdání, že toto banální schema je vědecko-teoretickou úvahou. Pochopitelně o tom, zda se jedná o prázdnou (pustou) matematizaci, může rozhodnout pouze speciálněvědní odborník, na jehož obor se matematika aplikuje. Existují situace, kdy izomorfismus mezi OT a MT vede minimálně k větší názornosti, ovšem existují i příklady opačné. (Srovnej např. situaci tří mužů kolem stolu popisovanou Hao Wangem v jeho učebnici logiky).

3. *obtíž* matematizace vědeckého poznání spatřujeme v *nedostatečné rozpracovanosti (rozvinutosti) OT*. Z historie vědy plyne, že matematizace slavila úspěchy tam, kde existují jednoznačně definované objekty. Z nepřesné vědy žádná matematizace přesnou vědu neudělá. („Matematizovaná společenská věda zůstává především společenskou vědou a je-li špatná, žádná matematizace z ní neudělá vědu dobrou“ — H. A. Simon). Požadavek na rozpracovanost OT , resp. jejího pojmového aparátu se jeví z hlediska možností matematizace jako podstatný. Vždyť na nerozpracovanosti OT , a tím pádem na jejím neadekvátním modelu MT ztroskotat pokus o globální modelování, např. v podání M. Mesaroviče a E. Pestela.

Fyzika je jednou z nejvíce matematizovaných věd, neboť její pojmy jsou relativně přesné. Matematizovat lze to, co říká B. Engels, že aplikace matematiky v biologii = O , ale v současné době již existuje samostatná vědní disciplína — biomatematika, která řeší úspěšně řadu vědeckých problémů a to díky tomu, že se za posledních sto let rozvinula nejen samotná matematika, ale zejména biologie. Analogická situace je i v psychologii, jazykovědě, ekonomii, ale i sociologii.

4. *obtíž* — matematizace vědeckého poznání spočívá v tom, že *neexistují dosud matematické prostředky, která by by schopny adekvátně vyjádřit (modelovat) složité jevy a procesy* (např. sociální reality).

Situaci lze vyjádřit tak, že „co potřebujeme, nemáme a co máme, nepotřebujeme“. Lze dokonce říci, že matematika ve vztahu k aplikacím na společenské vědy je dnes v období, ve kterém byla matematika vzhledem k přírodním vědám před objevením infinitesimálního počtu. Neadekvátnost matematických prostředků je způsobena také tím, že byly vytvářeny po staletí, ať již přímo nebo nepřímo pro potřeby přírodních, a to zejména fyzikálních věd, resp. pro potřeby techniky.

Dalším problémem — obtíží, je problém bezprostředně související s matematickým modelováním, a to je *mnohost modelů*, vhodných k popisu jisté reálné (obsahové) situace, resp. její OT a s tím související otázka výběru OT .

Matematická teorie, která tvoří model jisté oblasti skutečnosti, je

velmi často speciálním příkladem obecnější matematické teorie, která již vesměs takový bezprostřední vztah ke skutečnosti nemá. Z matematického hlediska jde např. o geometrie, které mají bezprostřední souvislost s praxí. Historie vědeckého poznání ukázala, že zdánlivě od reality vzdálená a odtaziťatá neeuklidovská geometrie, která je značně obecnější než běžnou realitu modelující geometrie euklidovská, má reálné aplikace v teorii relativity. Mnohost možných *MT* činí aplikace matematiky v nematematických oborech sice na jedné straně obtížnějšími (problém výběru adekvátních modelu), ale na druhé straně je činí heuristicky zajímavějšími.

Mnohost možných matematických modelů ovšem nikterak nesvědčí pro konvencionální povahu vědeckého poznání. Vždyť ve schématu 1 existuje vztah *o* a *MT*, který je oním kritériem, které umožňuje posoudit, zda *MT* se přibližuje či vzdaluje poznání *o*, zda je tedy matematizace poznání v tom či onom případě přínosem či nikoli. Mnohost modelů vyjadřuje jednak skutečnost, že poznání postupuje od poznání různých aspektů skutečnosti různými matematickými nástroji k stále úplnějšímu postižení reality, ale i skutečnost, že matematické prostředky jsou stále pružnější a vzájemně zaměnitelnější. (Existuje zde zdůvodnění, které vysvětluje různorodost matematických modelů tím, že jsou pouze homomorfním obrazem reálných situací na jedné straně a na druhé straně, že matematické teorie jsou vesměs *polyvalentní*, to je připouštějí rozličné interpretace, které jsou příslušné jako logické modely k jistěmu formalizovanému kalkulu).

Tím se ovšem dostáváme k problematice matematiky jako ideálního kalkulu (jazyka), k popisu různých jevů a procesů. Matematika se pak jeví jako „ideální technika“, která vytváří pojmovou aparaturu pro ostatní vědy. Niels Bohr, který chtěl podtrhnout obrovskou roli, kterou hraje matematika v rozvoji teoretického poznání, říkal, že matematika, to není pouze věda, ale i jazyk vědy. V soudobé logické terminologii by snad bylo vhodnější hovořit spíše o kalkulu nežli o jazyce. (T. j. jazyk = interpretovaný kalkul.)

Vztah přirozeného a formalizovaného matematického jazyka se studuje v matematické lingvistice, například v rámci možností strojového překladu.

Situace mnohosti matematických modelů nabývá ve světle úvah o jazyce matematiky následující podoby: vzhledem k pluralitě matematických jazyků existuje snaha volit při matematickém modelování takový jazyk, který je nejadekvátnější vzhledem k *OT*, resp. k *O*. Je pravdou, že matematické tematizovat se dá široká škála obsahových situací, ale vědecké poznání těchto situací vyžaduje stálý a přetržitý proces vytváření stále adekvátnějších matematických modelů.

Přes řadu jmenovaných i nejmenovaných obtíží, s nimiž se setkáváme při matematizaci vědeckého poznání, resp. při matematickém modelování tradičních teorií, dnes již těžko nalezneme vědce či technika,

terý by aplikaci matematických pojmů, teorií a metod zahrnoval. Matematizace a matematické modelování se stalo jednou z nejzákladnějších charakteristik současné vědy a dá se říci, že proniká stále více i do našeho každodenního života.

К ТРУДНОСТЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Иво Заплетал

В настоящей статье рассматриваются основные проблемы математического моделирования, под которым подразумевается создание математических моделей определенной нематематической области или части действительности.

Особое внимание уделено некоторым трудностям математизации научного познания. В статье отмечается пять таких трудностей.

1. Математики часто не знают хорошо той области, к которой будет применена их теория, и, наоборот, специалисты в области нематематических дисциплин не знакомы с новейшими знаниями математики.

2. Пустая математизация — перевод вербальных утверждений содержательной теории в символическую теорию с целью создания видимости научности.

3. Недостаточная разработка содержательной теории.

4. Отсутствие пока математических средств, которые были бы способны адекватно выразить (моделировать) сложные явления и процессы.

5. Множество моделей, подходящих для описания определенной содержательной теории.

ZU DEN SCHWIERIGKEITEN MATHEMATISCHER MODELLIERUNG

Ivo Zapletal

Im Aufsatz werden Grundprobleme der mathematischen Modellierung analysiert. Unter mathematischer Modellierung wird die Aufstellung mathematischer Modelle eines nichtmathematischen Bereichs oder Wirklichkeitssegments verstanden.

Besondere Aufmerksamkeit wird einigen Schwierigkeiten der Mathematisierung der wissenschaftlichen Erkenntnis gewidmet. Der Aufsatz zählt deren fünf auf.

1. Mathematiker kennen oft den Applikationsbereich ihrer Theorie nicht und umgekehrt kennen Fachleute in nichtmathematischen Disziplinen die neuesten Erkenntnisse in der Mathematik nicht.

2. Die leere Mathematisierung — die Transkription verbaler Behauptungen einer Inhaltstheorie in die symbolische mathematische Theorie, zum Zwecke der Wahrung des wissenschaftlichen Scheins.

3. Ungenügende Herausarbeitung der Inhaltstheorie.

4. Bisheriges Nichtvorhandensein mathematischer Mittel, die fähig wären komplizierte Erscheinungen und Prozesse adäquat auszudrücken (modellieren).

5. Die zur Beschreibung einer bestimmten Inhaltstheorie geeignete Modellenvielfalt.