FILOZOFICKÉ PRÚDY A PROBLÉMY V SÚČASNEJ MATEMATIKE

KAROL NEMOGA, Matematický ústav SAV, Bratislava

Vo svojom krátkom príspevku ostanem nadpisu mnoho dlžný. Nebudem sa totiž dotýkať otázok, ktoré sú často nazývané základnými filozofickými problémami matematiky, ako sú: čo je podstatou matematiky, aký je jej vzťah k realite, aký má byť vzťah medzi rozvojom teórie a aplikácií... Zameriam sa na otázky, ktoré vyplývajú z protikladných tendencií pri rozvoji matematiky, pri rozvoji jej základov so zameraním na teóriu množín. Keď chceme hovoriť o týchto problémoch, myslím, že nemožno nespomenúť zlomy vo vývoji matematiky, ktorými boli krízy vyplývajúce z toho, že formálne pojmy, ktoré matematika používa, fixujú iba jednu z protirečivých stránok reality. Tieto krízy silne ovplyvnili vývoj matematiky a podnietili skúmanie jej základov. V súčasnej literatúre sa hovorí o troch väčších krízach.

Prvá z nich bola vyvolaná objavom iracionality odmocniny z 2 pytagorejcami a zbúrala súlad aritmetiky a geometrie. Zároveň s tým sa objavili paradoxy vyplývajúce z nesprávneho chápania nekonečne malého a nekonečne veľkého (napr. to, že úsečka konečnej dĺžky sa dá rozdeliť na nekonečne mnoho úsečiek nenulovej dĺžky, bolo chápané ako paradox).

Druhá kríza sa objavila koncom 17. a zač. 18. stor., keď bol budovaný infinitezimálny počet na intuitívnom základe. Neskôr bol formalizovaný pojem limity a vytvorený diferenciálny a integrálny počet na tomto základe. Dovtedy boli napr. úvahy Eulera, Lagrangea, Cauchyho často veľmi intuitívne a hmlisté. Dnes, keď sú formalizované aj pojmy nekonečne malý a veľký (1960 — A. Robinson), táto intuícia sa ukázala byť správna.

Tretia kríza nastala vtedy, keď si vývoj vynútil používanie množín ako univerzálneho základu. Chápanie pojmu množiny nebolo presné a z predpokladu, že ku každej vlastnosti existuje množina množín, ktoré túto vlastnosť majú, vyplynulo množstvo paradoxov, z ktorých snáď najznámejší je Russelov (ide o existenciu množiny $Y = \{X / X$ nie je prvkom $X\}$). Táto posledná kríza podnietila veľký rozvoj logiky a skúmania základov matematiky. Objavilo sa viac škôl, ktoré tento problém rôzne riešili a ktoré silne ovplyvnili a ovplyvňujú aj súčasnú matematiku. Východiská boli dve. Prvé spočívalo v zmenšení univerza množín, chybu hľadalo v nesprávnej tvorbe množín. Druhé spočívalo v „oprave" logiky, chybu hľadalo v nesprávnom uvažovaní.

K prvému sa priklonila škola axiomatická alebo formalistická, ktorej zakladateľom bol D. Hilbert. Táto sa snažila vytvoriť axiomatický systém, ktorý by bol úplný a bezosporný, na ktorom by bola vybudovaná celá matematika. Gödelove výsledky (1931) ukázali, že tento prístup má svoje hranice a už z tohto dôvodu si nemôže nárokovať byť jedinou matematickou metódou. Formalizmus v absolútnej forme redukuje matematiku na hru s formulami, ktoré nemajú obsah a akýkoľvek vzťah k realite. V teórii množín znamenal tento prístup vytvorenie viacerých typov axiomatík Zermelom, Frankelom, Gödelom, Bernaysom a von Neumannom.

K druhému sa priklonila škola intuicionistická. Jej korene možno nájsť už u Kroneckera, známeho vetou: „Celé čísla vytvoril náš milý boh, všetko ostatné je dielom človeka", ktorý vystúpil proti Cantorovej teórii množín (1887) publikovanej r. 1879—1884. Jej zakladateľom je však L. E. J. Brouwer. Počiatočné pozície intuicionizmu boli tieto: Prirodzené čísla sú dané čistou intuíciou; matematické dôkazy musia byť úplne elementárne a ich správnosť je určovaná prvotnou intuíciou. Sama intuícia bola daná takto: je to myšlienková činnosť mozgu, nezávisí od jazyka, nemôže byť jazykom úplne opísaná, má apriórny charakter, nezávisí od subjektu. (podľa 2) Tieto požiadavky sú veľmi hmlisté a idealistické. Neskôr myšlienky intuicionizmu vykryštalizovali, intuicionistická logika bola formalizovaná Heytingom a na tomto základe sa vyvinul smer nazývaný konštruktivizmus. Zaujímavé je napr., že v tejto logike neplatí zákon vylúčenia tretieho — mocná zbraň klasickej logiky a matematiky a napr. non non $x P(x)$ nemusí byť ekvivalentné s $\exists x P(x)$. Konštruktivistický prístup sa snaží dať matematickým výrokom a pojmom jasný zmysel tým, že vychádza z prirodzených čísel, vylučuje aktuálne nekonečno a používa výhradne konečné konštrukcie. Implantovanie klasickej matematiky do takéhoto systému bolo však zatiaľ uskutočnené iba v oblasti reálnej analýzy a aj to za cenu mnohých ťažkostí a odpadnutia mnohých silných výsledkov. (Napr. v konštruktívnej analýze existuje postupnosť integrovateľných funkcií F_n na $(0;1)$, ktoré rovnomerne konvergujú k 0 na $(\int^1_0;1)$, ale pritom $\int^1_0 F_n \geq \frac{1}{2}$ pre každé prirodzené číslo n.) Tento prístup je však celkove redukciou nezodpovedajúcou ani zďaleka celej matematickej činnosti. Reakcia na tento prúd bola spočiatku tiež mimoriadne odmietavá (napr. u Hilberta). Poznatky, ktoré priniesol, sú ale pozitívne, využívané a ďalej prehlbované. Hlavná chyba oboch prístupov spočíva v absolutizovaní iba jednej stránky poznávacieho procesu, v úsilí riešiť otázky základov bez širšieho filozofického fundamentu.

V rámci axiomatickej teórie množín sa objavujú problémy aj v súvislosti s voľbou postulátov. Prístupov je možných viac. Za základnú axiomatiku sa považuje Zermelova-Fraenkelova (ZF) alebo Gödelova-Bernaysova spolu s axiómou výberu (AC). Oprávnenosť používania AC však nie je zrejmá. Objavujú sa aj ďalšie axiómy, napr. axióma determinovanosti (AD) a iné, pričom $ZF + AC + AD$ je sporná, a preto „matematika" budovaná na $ZF + AC$ je iná ako na $ZF + AD$.

Ďalším zaujímavým problémom je problém nazývaný „ontologický status množín", o ktorom sa diskutuje v trochu inej forme už od staroveku. Vzhľadom na postoj k tejto otázke je možné rozlíšiť niekoľko smerov.

Platonizmus napr. v absolútnej forme predpokladá existenciu univerza množín, na ktoré možno aplikovať systematicky kalkul, t. j. napr., že ak máme nejakú vlastnosť (formula s volnou premennou v nejakej teórii), možno o každej množine univerza povedať, či túto vlastnosť má alebo nie a vytvoriť množinu všetkých objektov, ktoré ju majú ako objekt. V absolútnej forme je tento prístup (ako už bolo ukázané) neudržateľný, ale v zúženej forme pretrváva (zermelovské východisko tvorby množín). Pre lepšiu predstavu možno uviesť tieto príklady: ak $P(x)$ je nejaká vlastnosť, tak platonizmus predpokladá existenciu objektu (množiny) Y všetkých množín x, pre ktoré platí $P(x)$. Tento prístup tu nebol vždy. Euklides vo svojich základoch napr. postuloval, že ak máme dva body, možno *zostrojiť* priamku, ktorá nimi prechádza. V Hilbertovej geometrii ale už máme množinu bodov a množinu priamok a hovorí sa, že ku každým dvom rôznym bodom *existuje* priamka (zvonku, zo systému všetkých priamok), ktorá nimi prechádza. V klasickej matematike sa tiež hovorí napr. o systéme všetkých grúp (ako o objekte), ktorý potom podrobujeme ďalšiemu skúmaniu. Hodnota tohto prístupu je v tom, že poskytuje modely abstraktným predstavám, vyznačuje sa jednoduchosťou a logickou silou a je vlastne živnou pôdou klasickej matematiky. Nevýhodou je nekonštruktívnosť, totalita celých čísel, pripustenie aktuálneho nekonečna, prípadne celej ich hierarchie.

Neonominalizmus je jazykom teórie „calculus of individuals". Tu je množina chápaná ako súbor indivíduí. Z nich možno vytvárať ďalšie množiny, z nich ďalšie... a takto vytvoriť celú hierarchiu množín. Pri implantovaní matematiky nastanú isté ťažkosti, aj keď menšie ako, povedzme, u konštruktivizmu. Kladom je tu podpora pracovnej matematiky a zbavenie sa veľkej hierarchie nekonečna. Tento prístup je plodne využívaný napr. pri tvorbe neštandardných modelov.

Podľa neokonceptualizmu každý „rozumný" predikát definuje množinu, ale táto sa vytvára konštruktívnym spôsobom z už vytvorených množín.

Sami matematici sa však neuzavreli do úzkej stavby niektorého z týchto alebo skôr spomínaných prúdov. Využívajú všetky prístupy, ktoré dali mnoho pozitívneho a majú svoje miesto v budove matematiky. Pokiaľ ide o sám pojem množiny, tento sa stal skutočne univerzálnym stavebným kameňom matematických teórií a matematického jazyka; aj tak je však v tom či onom prístupe používaný skôr intuitívne, s istou opatrnosťou a obmedzeniami, aby sa vyhlo známym antinómiám.

Ďalším zaujímavým novým prvkom v matematike je rozvoj tzv. neštandardnej analýzy, ktorý sa začal r. 1960 A. Robinsonom. Tu je formalizovaný pojem nekonečne malého a veľkého čísla a sú uskutočnené pôvodné myšlienky Leibnitza. Na tomto základe je možné nachádzať nové matematické výsledky a tiež získať nový pohľad na už dosiahnuté. Matematická analýza postavená na neštandardnej reálnej osi sa už pokusne (s dobrými výsledkami) vyučuje na niektorých univerzitách.

S podobným úsilím prišla aj pražská skupina okolo P. Vopěnku, ale s tým rozdielom, že pri formalizácii infinitezimálnych veličín použili vlastný nový množinový základ — alternatívnu teóriu množín. Táto je zbavená veľkej hierarchie nekonečna a má nahradiť používanú teóriu množín.

Uvedený príspevok je iba mimoriadne stručným náčrtom, vôbec nepokrývajúcim celú šírku problematiky. Do pozornosti čitateľa odporúčam článok Egberta Brieskorna *O dialektike v matematike,* ktorého zatiaľ prvá časť vyšla v *Pokrokoch matematiky, fyziky a astronómie,* roč. 24, 1979, s. 33—43 a ďalšie majú nasledovať v 2. a 3. čísle.

LITERATÚRA

1. ŽUKOV, N. I.: Filozofskije problemi matematiky. Minsk 1977.
2. CURRY, H. B.: Foundations of mathematical logic. McGraw-Hill 1963, rusky — Moskva 1969.
3. FRAENKEL, A. A., BAR-HILLEL, Y.: Foundations of set theory. Amsterdam 1958, rusky — Moskva 1966.
4. STRUIK, D. J.: Dějiny matematiky. Orbis, Praha 1963.
5. HEYTING, A.: History of the foundations of mathematics. Nieuw Archief voor Wiskunde 26 (1978), 1—21.
6. FENSTAD, J. E.: The axiom of determinateness. V Proc. 2nd Scand. Logic Symp., Oslo 1970, 41—62, North Holland 1971.
7. BERNAYS, P.: On platonism in mathematics. V. zbor. P. Benaceraf, H. Putnam (Eds.): Philosophy of mathematics. Prentice Hall 1964.