

O JEDNEJ METÓDE VÝSTAVBY LOGIKY PRVÉHO STUPŇA

SVÄTOSLAV MATHĚ

Medzi pozoruhodné výsledky dosiahnuté v oblasti matematickej logiky v poslednom období rozhodne patrí aj Smullyanova metóda analytických tabiel výstavby logiky prvého rádu. Autor tohto článku sa domnieva, že Smullyanovej metóde môže konkurovať len veľmi málo metód, najmä pokiaľ ide o jednoduchosť, eleganciu, aplikabilitu a veľmi ľahkú zvládnuteľnosť tejto metódy.

Rozhodli sme sa preto podať v našej práci viac-menej intuitívny výklad tejto metódy, pretože článok by mal slúžiť čo najširšiemu okruhu čitateľov tohto časopisu. Po pozornom prečítaní textu a po vyriešení pripojených príkladov každý, kto je oboznámený s tabuľkovou metódou výstavby výrokového kalkulu a zároveň pozná najzákladnejšie pojmy z oblasti logiky prvého rádu, môže nadobudnúť schopnosť vyčerpávajúcym spôsobom zvládnuť výstavbu oboch kalkulo.

V texte sa zámerne vyhýbame striktným definíciám a snažíme sa čo najjednoduchšie objasniť príslušné pojmy, ako aj celú metódu, ktorá je v Smullyanovej knihe *First order logic* vybudovaná prísne formálnym spôsobom. Pretože takýto postup má zákonite mnoho úskalí, autor článku si uvedomuje, že nie vždy sa mu zamýšľaný postup vydaril.

Výrokový kalkul

Ako vieme, vo výrokovom kalkule pracujeme s formulami, ktoré sú zložené z logických spojok, zátvoriek a výrokových premenných, ktorých oblasťou premennosti je dvojprvková množina pravdivostných hodnôt $\{P, N\}$.

Každý výrokovej premennej môžeme udeliť jednu z tzv. pravdivostných hodnôt P alebo N . V ďalšom texte budeme toto udelenie hodnôt nazývať „interpretácia premenných“. Teda ak chceme zistiť pravdivostnú hodnotu (ohodnotenie) formuly výrokovej logiky, interpretujeme najprv jej premenné a až potom môžeme zistiť pravdivostnú hodnotu tejto formuly, ktorá bude determinovaná už spomínanou interpretáciou a vymedzením výrokových spojok. Ak výsledkom ohodnotenia formuly je pravdivostná hodnota P , potom o tejto formule hovoríme, že je pravdivá, v opačnom prípade o nej hovoríme ako o nepravdivéj formule.

Na základe tabuľkového¹ vymedzenia výrokových spojok môžeme uviesť:

A₁: Formula $\sim X$ nadobudne hodnotu P , ak X nadobudne hodnotu N , a N ak X nadobudne hodnotu P .

¹ Na osvieženie pamäti uvádzame tabuľkové vymedzenie našich základných spojok:

p	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
P	N	$P \wedge P$	$P \vee P$	$P \rightarrow P$
N	P	$P \wedge N$	$P \vee N$	$P \rightarrow N$
		$N \wedge P$	$N \vee P$	$N \rightarrow P$
		$N \wedge N$	$N \vee N$	$N \rightarrow N$

- A₂: Formula $X \wedge Y$ nadobudne hodnotu P , ak X a Y súčasne nadobudnú hodnotu P .
 V ostatných prípadoch $X \wedge Y$ nadobudne hodnotu N .
 A₃: Formula $X \vee Y$ nadobudne hodnotu P , ak aspoň jedna z formúl X, Y nadobudne hodnotu P ; inakšie $X \vee Y$ nadobudne hodnotu N .
 A₄: Formula $X \rightarrow Y$ nadobudne hodnotu N , ak X nadobudne hodnotu P a Y hodnotu N ; vo zvyšných prípadoch $X \rightarrow Y$ nadobudne hodnotu P .

Příklad: Majme formulu $[(p \rightarrow q) \vee \sim r] \rightarrow (r \rightarrow q)$. Jednotlivé premenné interpretujeme takto: $p-N, q-N, r-P$. Hodnota formuly $p \rightarrow q$ bude P (na základe A₄), $\sim r$ bude N (na základe A₁), teda antecedent danej formuly bude mať hodnotu P (na základe A₃) a konzekvent hodnotu N (na základe A₄), a teda celá formula hodnotu N (na základe A₄). Ak by sme interpretovali premenné, povedzme takto: $p-P, q-P, r-N$, naša formula by nadobudla hodnotu P (prečo?).

Hovoríme, že ohodnotenie (danej formuly), ktoré spĺňa uvedené podmienky A₁ až A₄, nazýva sa booleovským ohodnotením.

Formula, ktorá je pravdivá aspoň pri jednom booleovskom ohodnotení (teda aspoň vzhľadom na jednu interpretáciu), nazýva sa splniteľnou (satisfiable). Naproti tomu formula, ktorá je pravdivá v každom booleovskom ohodnotení, nazýva sa tautológiou (teda je pravdivá vzhľadom na každú interpretáciu). Formula, ktorá nie je pravdivá ani v jednom booleovskom ohodnotení, nazýva sa nesplniteľnou (unsatisfiable).²

Příklad: $[(p \rightarrow q) \vee \sim r] \rightarrow (r \rightarrow q)$ je splniteľná formula, $p \vee \sim p$ je tautológia a $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \wedge p$ je nesplniteľná formula.

Náš záujem sa sústreďí predovšetkým na formuly, ktoré sú tautológiami, a náš kalkul bude vlastne kalkulom, na základe ktorého budeme jednoznačne môcť rozhodnúť, ktoré formuly sú tautológiami a ktoré nimi nie sú.

Je niekoľko metód výstavby výrokového kalkulu.³ Smullyan si vybral metódu prirodzenej dedukcie s formou nepriameho dôkazu, kde pri dôkaze (rozhodovaní) danej formuly používa techniku stromového dôkazu, ktorá spočíva v konštruovaní tzv. tably negácie danej formuly. Celá konštrukcia tably má analytický charakter, čoho dôkazom sú nasledujúce pravidlá rozkladu, ktoré aplikujeme pri konštrukcii tabiel.⁴

$$B_1: \frac{\sim \sim X}{X}$$

$$B_2: (a) \frac{X \wedge Y}{X} \quad (b) \frac{\sim (X \wedge Y)}{\sim X \mid \sim Y}$$

² Niekedy sa spomínané tri druhy formúl označujú v slovenčine ako: neutrálna formula, vždy pravdivá formula (logický zákon, logicky pravdivá formula), vždy nepravdivá formula (kontradikcia).

³ Uvedme aspoň tri základné: tabuľková metóda, axiomatická metóda a metóda prirodzenej dedukcie.

⁴ Pravidlá sú založené na platnosti nasledujúcich faktov, ktoré vyplývajú z A₁ až A₄:

1. Ak $\sim X$ je nepravdivé, potom X je pravdivé.
2. a) Ak konjunkcia $X \wedge Y$ je pravdivá, potom X a Y sú pravdivé.
 b) Ak konjunkcia $X \wedge Y$ je nepravdivá, potom buď X je nepravdivé, alebo Y je nepravdivé.
3. a) Ak disjunkcia $X \vee Y$ je pravdivá, potom buď X je pravdivé, alebo Y je pravdivé.
 b) Ak disjunkcia $X \vee Y$ je nepravdivá, potom X a Y sú nepravdivé.
4. a) Ak $X \rightarrow Y$ je pravdivé, potom buď X je nepravdivé, alebo Y je pravdivé.
 b) Ak $X \rightarrow Y$ je nepravdivé, potom X je pravdivé a Y nepravdivé.

$$B_3: (a) \frac{X \vee Y}{X | Y} \quad (b) \frac{\sim (X \vee Y)}{\sim X \vee \sim Y}$$

$$B_4: (a) \frac{X \rightarrow Y}{\sim X | Y} \quad (b) \frac{\sim (X \rightarrow Y)}{X \wedge \sim Y}$$

Príklad: Nasledujúca množina formlí je tabľou formuly $[(p \rightarrow q) \vee \sim r] \rightarrow (r \rightarrow q)$.

- (1) $[(p \rightarrow q) \vee \sim r] \rightarrow (r \rightarrow q)$
- (2) $\sim[(p \rightarrow q) \vee \sim r]$ (1) | (3) $r \rightarrow q$ (1)
- (4) $\sim(p \rightarrow q)$ (2) (6) $\sim r$ (3) | (7) q (3)
- (5) $\sim \sim r$ (2)
- (8) p (4)
- (9) $\sim q$ (4)
- (10) r (5)

Vysvetlenie:

a) danú formulu postavím na začiatok tably — hovorím o nej ako o začiatku a označím ju vľavo číslom (1).

b) Na základe pravidla $B_{4(a)}$ rozložím formulu (1) na formuly označené vľavo (2) a (3). Vpravo si označím obidve tieto formuly číslom (1), aby som vedel, z ktorej formuly boli odvodené.

c) Na základe pravidla $B_{3(b)}$ rozložím formulu (2) na formuly označené vľavo (4) a (5) a podpíšem ich v tomto poradí pod seba. Vpravo označím každú číslom (2), aby som vedel, z ktorej formuly boli odvodené.

d) Na základe pravidla $B_{3(a)}$ rozložím formulu (3) na formuly (6) a (7) a graficky ich umiestnim pod formulu (3) vedľa seba. Vpravo označím obidve tieto formuly číslom (3), aby som vedel, z ktorej formuly boli odvodené.

e) Na základe pravidla $B_{4(b)}$ rozložím formulu (4) na formuly (8) a (9) a podpíšem ich v tomto poradí pod seba [budú umiestnené pod formulou (5)]. Vpravo ich označím číslom (4), aby som vedel, z ktorej formuly boli odvodené.

f) Na základe pravidla B_1 rozložím formulu (5) na formulu (10) a podpíšem ju pod formulu (9). Vpravo ju označím číslom (5), aby som vedel, z ktorej formuly bola odvodená.

g) Tabľu považujem za ukončenú, ak som rozložil všetky zložené formuly a ak po tomto rozklade sa nachádzajú v tabli iba atomické formuly, ktoré sú už ďalej nerozložiteľné. Rozklad robím systematicky od začiatku tably smerom nadol, pričom začínam prvou vetvou zľava.

Poznámka: Vidíme, že systematicky ukončená tabľa má ako svoje koncové body výlučne iba atomické formuly. Každý koncový bod nám signalizuje tzv. vetvu tably, alebo povedané inakšie, koľko má tabľa koncových bodov, toľko má aj vetiev. Teda v našom prípade tabľa má 3 vetvy: prvú vetvu tvoria body — (10), (9), (8), (5), (4), (2), (1), druhú (6), (3), (1), a tretiu — (7), (3), (1). Všimnime si, že začiatok tably je v každej vetve. Je zrejme, že označenie šíslicami pri bežnej konštrukcii tably nie je potrebné.

Na základe uvedeného príkladu a pripojeného vysvetlenia hovoríme, že na základe pravidla B_1 môžeme z $\sim \sim X$ priamo odvodiť X (v tom zmysle, že môžeme X pripojiť (pripísať, podpísať) ku každej vetve, ktorá prechádza cez $\sim \sim X$). Pravidlo B_2 chápeme tak, že $X \wedge Y$ priamo dáva X a Y , kým $\sim (X \wedge Y)$ sa vetví na $\sim X$ a $\sim Y$. Pravidlá B_3 a B_4 chápeme analogicky. Vidíme, že pravidlá B_1 , $B_{2(a)}$, $B_{3(b)}$ a $B_{4(b)}$ sú priameho typu, ostatné nepriameho typu (záver sa vetví). Pre ďalšiu prácu bude výhodné zhrnúť premisy pravidiel priameho typu pod označenie „ α “ a premisy nepriameho typu pod „ β “⁵.

⁵ Teda „ α “ budeme označovať formulu, ktorá má jednu z týchto štyroch foriem: $\sim \sim X$, $X \wedge Y$, $\sim (X \wedge Y)$, $\sim (X \rightarrow Y)$; β -formuly: $\sim (X \wedge Y)$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$.

Samozrejme, aj závery dostanú svoje označenie: pri pravidlách priameho typu — α_1 a α_2 , pri nepriamych pravidlách — β_1 a β_2 .

Po tomto zjednotení označení sa pozrieme na naše pravidlá B_1 až B_4 trochu inakšie. Zatiaľ sme ich používali pri konštrukcii danej tably na rozklad formúl, teda môžeme povedať, že sme ich aplikovali v syntaktickom zmysle: ak máš v table dosiaľ nerozloženú formulu typu α , rozlož ju na základe príslušného pravidla priameho typu na α_1 a α_2 a podpíš ich pod seba na každú vetvu, ktorá prechádza cez α . Ak máš v table dosiaľ nerozloženú formulu typu β , rozlož ju na základe príslušného pravidla nepriameho typu na β_1 a β_2 a podpíš ich vedľa seba na každú vetvu, ktorá prechádza cez β , inakšie povedané — každá príslušná vetva θ sa nám rozvetví na dve vetvy: (a) θ , β_1 , (b) θ , β_2 .

Každé dôsledkové pravidlo v logike, a teda aj naše pravidlá B_1 až B_4 môžeme interpretovať aj sémanticky: ak je pravdivý (splniteľný)⁶ predpoklad, potom bude pravdivý (splniteľný) aj záver, alebo inakšie povedané: ak je pravdivý predpoklad, potom sa nemôže stať, aby záver bol nepravdivý. Konkrétne: ak je α pravdivá formula (teda ak je predpoklad v pravidle priameho typu pravdivý), potom musia byť pravdivé súčasne formuly α_1 a α_2 (teda záver v pravidle priameho typu). Ak je β pravdivá formula (ide o pravidlo nepriameho typu), potom musí byť pravdivá aspoň jedna z formúl β_1 , β_2 .

Ako sa konštruujú tably pre dané formuly, ozrejmili sme si na príklade v predchádzajúcom texte. Samozrejme, môžeme povedať, že takto skonštruovanú tablu chápeme (podobne ako naše pravidlá) syntakticky. Ako interpretovať napr. schému nasledujúcej tably sémanticky?

α (Začiatok)

(Predpoklad, že α_1 je typu β) α_1 } (Výsledok rozkladu priamym pravidlom)
 (Predpoklad, že α_2 je typu α) α_2 }

β_1 | β_2 (Výsledok rozkladu α_1 (ide o β -typ!)
 nepriamym pravidlom)

α_{11} α_{11} } (Výsledok rozkladu α_2 (ide o α -typ!)
 α_{22} α_{22} } priamym pravidlom)

(Predpokladajme, že body α_{11} , α_{22} sú koncové, a teda tabla je ukončená)

Teda ak α je pravdivá, potom α_1 a α_2 sú taktiež pravdivé. Pretože α_1 je pravdivé a α_1 je formulou (podľa predpokladu nami určeného) typu β , bude pravdivá aspoň jedna z formúl β_1 a β_2 , povedzme, že β_2 . Pretože však aj α_2 je pravdivé, pravdivé budú aj formuly α_{11} a α_{22} . Teda vidíme, že pravdivosť alfy (začiatku) sa „dedí“, prenáša sa v table smerom nadol po vetvách; v našom prípade bude vetva: α , α_1 , α_2 , β_2 , α_{11} , α_{22} pravdivou vetvou, kým o druhej vetve niečo také nemôžeme vyhlásiť, pretože sme predpokladali pravdivosť β_2 , zatiaľ čo β_1 môže a nemusí byť pravdivou.⁷ Všeobecne môžeme teda vyhlásiť (na základe princípu matematickej indukcie), že ak

⁶ Splniteľný, teda pravdivý aspoň pri jednom booleovskom ohodnotení. Samozrejme, pri tej istej interpretácii premenných.

⁷ Nezabudnime, že ak β je pravdivá, potom aspoň jedna z formúl β_1 , β_2 je pravdivá. Teda nevylučuje sa prípad súčasnej pravdivosti oboch formúl (β_1 , β_2).

začiatok tably je pravdivý (splniteľný) aspoň pri jednom booleovskom ohodnotení, potom táto pravdivosť (splniteľnosť) sa prenáša aspoň na jednu vetvu v table, a o takejto vetve hovoríme, že je pravdivou vzhľadom na toto booleovské ohodnotenie. O takejto vetve taktiež hovoríme, že je otvorená.⁸ Samozrejme, začiatok tably môže byť pravdivý vzhľadom na niektoré (všetky) interpretácie. Aby sme ich zistili, stačí postupovať takto: v každej otvorenej vetve vyhlásime každú atomickú formulu (ktorá sa na tejto vetve nachádza) typu p za pravdivú. Tak isto vyhlásime za pravdivú každú atomickú formulu typu $\sim p$ (teda v takomto prípade bude p nepravdivé — prečo?). Ak ani p , ani $\sim p$ sa v danej vetve nenachádza, potom vyhlásime p za pravdivé alebo nepravdivé (podľa ľubovôle). Na základe našich podmienok A_1 – A_4 vieme už jednoznačne určiť pravdivostnú hodnotu každej formuly, ktorú daná vetva obsahuje, a teda aj pravdivostnú hodnotu začiatku.⁹

Príklad:

$$\begin{array}{c} [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim p \\ \sim [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \mid \sim p \\ \sim (p \rightarrow q) \mid \sim (p \rightarrow \sim q) \\ \begin{array}{cc} p & p \\ \sim q & \sim \sim q \\ & q \end{array} \end{array}$$

Interpretácia premenných formúl prvej vetvy zľava: $q-N$, $p-P$, druhej zľava: $p-P$, $q-P$, tretej zľava: $p-N$, $q-N$ alebo $p-N$, $q-P$.

Nech sa čitateľ na základe A_1 – A_4 presvedčí o tom, že každá vetva je vzhľadom na uvedené interpretácie pravdivá (splniteľná). Pretože všetkých možných interpretácií je 4 (2^n = počet interpretácií formuly, n = počet premenných) a vzhľadom na všetky je začiatok pravdivý (prečo?), je formula $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim p$ tautológiou.

Zamyslime sa nad výsledkom, ktorý sme dosiahli. Na to, aby sme zistili, že predchádzajúca tabla je tablou tautológie, najprv sme museli skonštruovať tablu a potom zistiť interpretácie, na základe ktorých je začiatok pravdivý (splniteľný).¹⁰ Samozrejme, takáto metóda je zdĺhavá a málo operatívna. Iste každý bude namietať v tom zmysle, že namiesto tejto metódy je výhodnejšie použiť tabulkovú metódu.

Obráťme sa znova (ako už niekoľkokrát v tomto texte) na naše podmienky A_1 – A_4 . Čo nám hovorí hneď prvá podmienka? Formula X je pravdivá práve vtedy, ak $\sim X$

⁸ Aby sme zistili, či je vetva otvorená, alebo nie, stačí nám postupovať úplne mechanicky (vizuálne): ak sa na tej istej vetve nevyskytujú dve formuly typu X a $\sim X$, vyhlásime takúto vetvu za otvorenú (samozrejme, „vyhlásenie“ robíme až po ukončení tably!). V opačnom prípade je vetva uzavretá. Teda všeobecne: ak má tabla čo len jednu otvorenú vetvu, nazývame ju otvorenou tablou, ak nemá nijakú vetvu otvorenú, potom ide o uzavretú tablu. O otvorenej vetve súčasne hovoríme, že je splniteľná. Množina formúl sa nazýva splniteľnou, ak existuje aspoň jedna interpretácia všetkých jej výrokových premenných, vzhľadom na ktorú je každá formula tejto množiny pravdivá. Napríklad: $\{p \vee q, r \vee p \rightarrow \sim q, r \rightarrow p\}$, interpretácia $p-P$, $q-N$, $r-N$. Vzhľadom na túto interpretáciu je naša množina formúl splniteľná.

⁹ Všeobecne povedané: každá otvorená vetva je pravdivá aspoň pri jednom booleovskom ohodnotení, a teda vzhľadom aspoň na jednu interpretáciu. Túto vetu (nazývanú Hintikkovu vetvu) Smullyan dokázal.

¹⁰ Nech si čitateľ nemyslí, že tieto interpretácie nie je potrebné zisťovať. Alebo inakšie: nestačí len zistiť, že všetky vetvy sú v danej table otvorené, aby som mohol vyhlásiť začiatok za tautológiu. Napr. tabla formuly $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (r \rightarrow p)$ má tak isto všetky vetvy otvorené, pravda, nejde o tautológiu, ako to čitateľ ľahko môže zistiť!

je nepravdivé, a naopak. Pravda, to súčasne znamená aj to, že X je pravdivá práve na základe tých interpretácií, v ktorých nie je pravdivá $\sim X$, a opačne! Teda ak tautológia (o tie nám práve ide v kalkule!) je pravdivá na základe všetkých interpretácií, jej negácia nie je pravdivá v nijakej. To, pravda, znamená, že nemá ani jednu vetvu pravdivú, teda otvorenú, a všetky vetvy má uzavreté!

Tu sme vlastne pri podstate veci: ak chceš zistiť, či nejaká formula X je tautológiou, znevej ju a skonštruuj pre ňu tabuľku známym systematickým spôsobom. Ak bude každá vetva tejto tabuľky uzavretá (teda ak bude obsahovať dve navzájom sa vylučujúce formuly), môžeme pôvodnú formulu X vyhlásiť za tautológiu. A teraz vidíme, že naša metóda je súčasne veľmi elegantná, efektívna, a pritom má mechanický charakter.

Príklad:

$$\begin{array}{l} \sim [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim p \\ [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \\ \sim \sim p \\ p \rightarrow q \\ p \rightarrow \sim q \\ p \\ \sim p \mid q \\ \sim p \mid \sim q \mid \sim p \mid \sim q \\ \times \quad \times \quad \times \quad \times \end{array}$$

Všimnime si, že kvôli lepšiemu prehľadu je výhodné označiť každú uzavretú vetvu krížikom. Vidíme, že pod každou vetvou je krížik, teda každá vetva je uzavretá. Teda formula $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim p$ je tautológia.

Zatiaľ sme budovali naše tabuľky systematicky. Sú však prípady, keď je výhodnejšie skonštruovať tabuľku skrátenú. Vtedy dávame prednosť v tabuľke formulám typu α a až po nich rozkladáme formuly typu β . Tak isto keď narazíme vo vetve na dve navzájom sa vylučujúce formuly, môžeme vetvu hneď uzavrieť, nemusíme ďalej pokračovať v jej konštrukcii. V niektorých prípadoch nám táto metóda umožní podstatne skrátiť a zjednodušiť tabuľku, ako nám to demonštruje nasledujúci príklad.

Príklad:

$$\begin{array}{l} \sim [(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))] \\ p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \sim [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)] \\ p \rightarrow q \\ \sim (p \rightarrow r) \\ p \\ \sim r \\ \sim p \mid q \rightarrow r \\ \times \quad \sim p \mid q \\ \quad \times \quad \sim q \mid r \\ \quad \quad \times \quad \times \end{array}$$

Tabuľka je skonštruovaná skrátená, obsahuje 13 formúl včítane začiatku. Nech čitateľ skonštruuje tabuľku pre tú istú formulu systematicky. Tabuľka v tomto prípade bude obsahovať 23 formúl. Všimnime si, že vetvy prvú zľava a druhú zľava sme uzatvorili hneď, ako sa na nej objavili súčasne formuly typu p a $\sim p$.

Poznámka: Teraz je už hádam každý presvedčený, že metóda tabiel je veľmi účinnou a jednoduchou metódou dokazovania vo výrokovej logike. Je istotne aspoň taká jednoduchá a účinná ako tabuľková metóda. Jej výhoda sa demonštruje až v nasledujúcom texte, pretože metóda tabiel použitá v predikátovom kalkule je v logike nová a zatiaľ nepoužívaná. Z tohto hľadiska je teda táto metóda rozhodne metódou rozsahove širšou a na rozdiel od tabuľkovej metódy aplikovateľnou na celú logiku prvého rádu (ako uvidíme ďalej).

Začnime takouto úvahou: o výraze „ $(\forall x) (\exists y) Pxy$ “ hovoríme, že je výrokom. Mal by byť pravdivý, alebo nepravdivý. Akú hodnotu má teda uvedený výrok? Vidíme, že jeho hodnotu nevieme určiť, kým neurčíme, čo nám bude označovať predikátová premenná P (teda kým ju neinterpretujeme¹¹) a akou oblasťou premennosti (univerzom) nám budú prebiehať premenné x a y . Interpretujme P ako vzťah „byť menší ako“ a oblasť premennosti (univerzum) určíme ako množinu všetkých prirodzených čísel $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Teraz už môžeme povedať, že náš výrok je pravdivý. Na základe čoho sme mohli vyhlásiť, že $(x) (\exists y) Pxy$ je pravdivý? Na základe toho, že ku každému prirodzenému číslu vieme priradiť väčšie prirodzené číslo, napr.:

1, 2, 3, 4, 5, 6 n
2, 3, 4, 5, 6, 7 $n+1$

Teda pre každé prirodzené číslo existuje také prirodzené číslo (oblasť premennosti x aj y je tá istá!), ktoré je väčšie, alebo ináč povedané: napr. každý z nasledujúcej postupnosti výrokov (ide o nekonečnú postupnosť) je pravdivý $1 < 2, 2 < 3, 3 < 4 \dots$. Vidíme teda, že interpretácia predikátorovej premennej si vynucuje ohodnotenie atomických formlí ($1 < 2, 2 < 3 \dots$), na základe ktorého vieme určiť hodnotu celého výroku (formuly $(\forall x) (\exists y) x < y$). Inakšie povedané: naša interpretácia (dosadenie za premennú P symbol „ $<$ “) nám napr. vymedzuje nekonečnú množinu usporiadaných dvojíc $\{<1, 2>, <2, 3>, \dots <n, n+1> \dots\}$, ktoré splňujú¹² výrokovú funkciu $x < y$ (samozrejme, vždy prvý člen z usporiadanej dvojice dosadíme za x a druhý za y !).

Situácia sa nám však trochu komplikuje, ak chceme ohodnotiť ofrmulu, v ktorej sú síce premenné viazané kvantifikátormi, ale ktorá obsahuje aj výrokové spojky. Vtedy musíme operovať aj s booloevským ohodnotením.

Příklad:

$(\forall x) (\exists y) [Pxy \rightarrow \sim Pyx]$	P	$ $	interpretácia
$(\forall x) (\exists y) [x < y \rightarrow \sim y < x]$	$\{1, 2, 3, 4 \dots n, \dots\}$		univerzum
$1 < 2 \rightarrow \sim (2 < 1)$			
$2 < 3 \rightarrow \sim (3 < 2)$			
$3 < 4 \rightarrow \sim (4 < 3)$			
$\vdots$			
$n < n+1 \rightarrow \sim (n+1 < n)$			
$\vdots$			

Vidíme, že na základe booleovského ohodnotenia sú všetky implikácie vypísané (ide o nekonečnú postupnosť) pod trhanou čiarou pravdivé (prečo?), a teda pravdivá bude aj (pri uvažovanej interpretácii) formula $(\forall x) (\exists y) [Pxy \rightarrow \sim Pyx]$

Všeobecne môžeme teda povedať, že ohodnotenie formuly A v predikátovom kalkule (čiže predikátové ohodnotenie — first order valuation) je:

(C_1) samozrejme aj booleovským ohodnotením tejto formuly, pravda, súčasne sa musia splniť nasledujúce dve ďalšie podmienky:

¹¹ Samozrejme, pojem „interpretácia“ používame v predikátovom kalkule v inom (aj keď veľmi blízkom) zmysle než vo výrokovom kalkule.

¹² Prvok k z univerza U spĺňa výrokovú funkciu Ax vtedy, ak po dosadení mena tohto prvku za premennú x v Ax výsledná formula Ak nadobudne hodnotu P .

$[C_2(a)] (\forall x) A(x)$ je pravdivé vzhľadom na predikátové ohodnotenie vtedy a len vtedy, ak pre každý prvok k z univerza¹³ U platí, že $A(k)$ je pravdivé vzhľadom na toto ohodnotenie.

$[C_2(b)] (\exists x) A(x)$ je pravdivé vzhľadom na predikátové ohodnotenie vtedy a len vtedy, ak aspoň pre jeden prvok k z univerza U platí, že $A(k)$ je pravdivé vzhľadom na toto ohodnotenie.

Samozrejme, aj definíciu splniteľnej formuly v predikátovom kalkule musíme pripôsobiť podmienkam C_1-C_2 . Hovoríme, že formula A je splniteľná (v zmysle predikátového kalkulu) vtedy a len vtedy, ak je pravdivá aspoň v jednej interpretácii a aspoň v jednom univerze. V opačnom prípade je nespĺniteľná. Naproti tomu ak formula A je pravdivá vo všetkých možných univerzách a interpretáciách, potom o nej hovoríme, že je platnou formulou. Je teda určitou analógiou — iba analógiou! — tautológiu vo výrokovom kalkule.

Zamyslime sa teraz nad definíciou platnej formuly. Musí byť (1) pravdivá v každej interpretácii, teda ak v nej dosadíme mená ľubovoľných relácií (vlastností) za jej predikátové premenné, vždy musí byť pravdivá, a súčasne (2) oborom premennosti (univerzom) jej premenných je každé univerzum. Preto bude výhodné (o tom sa presvedčíme ďalej) zaviesť do nášho jazyka okrem premenných (výrokových a individuálnych), zátvoriek, kvantifikátorov a výrokových spojok aj tzv. parametre. Voľne povedané, parameter je meno prvku z univerza, ktoré nemáme bližšie určené. Parameter nám teda môže zastupovať hocakú konštantu, a teda hociktorý prvok daného univerza, pravda, iba jednu (jeden) z tohto univerza. Alebo inakšie povedané: premenná nám zastupuje každé meno prvku z univerza, kým parameter iba jedno. Konkrétne, ak máme výrokovú funkciu Px , táto funkcia nám zastupuje nekonečnú postupnosť výrokov (Univerzum = všetky prír. čísla) $P(1), P(2), P(3), P(4), \dots$, kým výroková funkcia Pa iba jeden výrok z tejto postupnosti, aj keď nevieme, ktorý. Uvedená postupnosť nám môže zastupovať (ak chceme pracovať s parametrami) iba nekonečnú postupnosť výrokových funkcií $P(a_1), P(a_2), P(a_3), P(a_4) \dots$ (za predpokladu, že parametre $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ sú rôzne). Teda parameter má iba jednu hodnotu, kým premenná ich môže mať nekonečne mnoho. Vidíme teda, že ak máme nekonečné univerzum parametrov $a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$, môžeme k nemu akoby „relativizovať“ každú platnú formulu, pretože toto univerzum nám môže „zastúpiť“ konkrétne univerzum. V ďalšom texte budeme niekedy pre parametre používať aj označenia a, b, c atď., a to vtedy, ak budeme pracovať iba s niekoľkými parametrami.

Poznámka: Nasledujúce úvahy sú veľmi zjednodušené a z hľadiska budovania predikátového kalkulu veľmi „silné“. Je potrebné chápať ich iba ako intuitívnu „pomôcku“ výkladu práce s parametrami. Ak sme v predošlom texte hovorili o „všetkých univerzitách“, automaticky sme tým mysleli napr. aj univerzá (množiny) mohutnosti kontinua, avšak pre tieto množiny neplatia nasledujúce úvahy.

Predpokladajme, že uvažujeme iba univerzá buď konečné, alebo nekonečné, pravda, spočítateľné. Predpokladajme ďalej, že každé univerzum je usporiadané (prečíslené) tak, že prvý prvok má index 1, druhý 2, n -tý prvok index n atď. To isté platí aj o našom „univerzálnom“ univerze parametrov.

Vidíme teda (pretože predpokladáme, že aj univerzum parametrov je spočítateľné), že v každom univerze sa dá identifikovať miesto (poradie) každého prvku podľa jeho indexu, tak isto samozrejme aj v našom univerze parametrov. Vidíme teda, že a_1 nám môže zastupovať prvok každého univerza, pravda, nie ľubovoľný prvok, ale vždy prvý (s indexom 1), a_2 druhý prvok atď. Na základe nášho prečíslenia univerzum parametrov nám môže zastupovať hociaké univerzum, a teda stačí povedať, že „formula je platná vtedy, ak je pravdivá v každej interpretácii a v našom univerze parametrov“.

¹³ S podmienkou, že univerzum U je neprázdna množina!

a_1	a_2	a_3	a_4	a_n		(univerzum parametrov)
1_1	2_2	3_3	4_4	n_n	...	(prirodzené čísla)
hviezda ₁	hviezda ₂	hviezda ₃	hviezda ₄	...		(hviezdy vesmíru)
logik-1	logik-2	logik-3	...	logik- n		(všetci logici)
						n = konečné číslo

Příklad: Ak teda vyhlásime napr. formulu $(\forall x) P(x)$ za platnú, potom každá atomická formula z nekonečnej postupnosti: $P(a_1) P(a_2) P(a_3) \dots$ je pravdivá, nech už P interpretujeme akokoľvek. Teda ak napr. $P(a_1)$ by nám mala zastupovať hociktorý výrok z nasledujúcich nekonečných postupností výrokov: 1_1 je párne číslo, 1_1 je deliteľná desiatimi..., hviezda₁ je drevená, hviezda₁ svieti..., logik₁ je roztržitý, logik₁ je plešivý.... To isté platí o $P(a_2) P(a_3)$, atď.

Samozrejme, všetky tieto výroky by mali byť podľa podmienky $C_2(a)$ pravdivé. Ako vidíme, mnohé z nich určite nie sú pravdivé (a stačí, ak nie je aspoň jeden-prečo?), a teda podľa tej istej podmienky ($C_2(a)$) formula $(\forall x) P(x)$ nie je platná. Vidíme teda, že stačí poznať pravdivostnú hodnotu atomických formul danej testovanej formuly (teda hodnotu formul typu $P(a)$, $\sim P(a)$, $P(b)$, $\sim P(b)$ atď. pri danom predikátovom ohodnotení, aby sme mohli určiť jej pravdivostnú hodnotu pri tomto predikátovom ohodnotení).

Po týchto zjednodušených a intuitívnych úvahách môžeme pristúpiť na základe podmienok $C_2(a)$ a $C_2(b)$ k vymedzeniu pravidiel konštrukcie tabiel¹⁴ pre predikátový kalkúl: B_1 až B_4 platia samozrejme aj pre predikátový kalkúl.

$$B_5(a) \frac{(\forall x) A(x)}{A(a), \text{ kde } a \text{ je každý parameter}}$$

$$(b) \frac{\sim(\exists x) A(x)}{\sim A(a), \text{ kde } a \text{ je každý parameter}}$$

$$B_6(a) \frac{(\exists x) A(x)}{A(a), \text{ kde } a \text{ je nový parameter}}$$

$$(b) \frac{\sim(\forall x) A(x)}{\sim A(a), \text{ kde } a \text{ je nový parameter}}$$

Poznámka: B_5 chápeme takto: ak sa nachádza v table formula typu $\sim(\exists x) A(x)$ alebo $(\forall x) A(x)$, potom ju rozlož' na nekonečnú postupnosť formul typu $\sim A(a_1)$, $\sim A(a_2)$ systematickým spôsobom (pozri ďalší text), resp. $A(a_1)$, $A(a_2)$ B_6 chápeme zase takto: ak sa nachádza v table formula typu $\sim(\forall x) A(x)$ alebo $(\forall x) A(x)$, potom ju rozlož' na formulu typu $\sim A(a)$, resp. $A(a)$, kde a je parameter, ktorý sa v table dovtedy nevyskytol.

¹⁴ Tably môžeme však konštruovať iba pre tzv. uzavreté formuly, kde sú iba premenné viazané kvantifikátormi, kvantifikátory, výrokové spojky a zátvorky. Ak však máme správne utvorenú formulu aj s voľnými premennými a chceme sa presvedčiť, či je táto formula platná (celú metódu vlastne budujeme na testovanie platných formul), zaviazeme tieto premenné generálnym kvantifikátorom a takto vzniknutú formulu testujeme podľa ďalej uvedeného návodu (napr. $(\forall x) Px \rightarrow Py : (\forall y) [(\forall x) Px \rightarrow Py]$). Ak na základe tohto testovania zistíme, že táto formula je platná, potom bude platná aj formula s voľnými premennými. Podobne postupujeme s formulami, ktoré obsahujú parametre: každý výskyt parametra nahradíme premennou, ktorá sa ešte vo formule nenachádza, a zaviazeme ju generálnym kvantifikátorom (napr. $(\forall x) Px \rightarrow Pa : (\forall y) [(\forall x) Px \rightarrow Py]$). Smullyan pripúšťa konštrukciu tabiel pre uzavreté formuly, ktoré však môžu obsahovať aj parametre. Naše obmedzenie sme museli urobiť z dôvodu, aby sme sa vyhli istým komplikáciám, ktoré tu nebudeme bližšie uvádzať. Platnosť formuly sme definovali pre všetky univerzá (resp. pre univerzá parametrov), tak isto rozklad formuly (pozri ďalej uvedené pravidlá) sme definovali iba pre parametre, preto ani formuly s konštantami netestujeme našou metódou tabiel.

Vidíme, že obe pravidlá sú priameho typu. Tak isto ako vo výrokovom kalkule, zavedieme si aj tu zjednotenie označení premís a záverov. Formuly typu $(\forall x) A(x)$ a $\sim (\exists x) A(x)$ budeme označovať symbolom „ γ ” a formuly typu $A(a)$ a $\sim A(a)$, kde a je každý parameter, symbolom „ $\gamma(a)$ ”. Formuly typu $(\exists x) A(x)$ a $\sim (\forall x) A(x)$ symbolom „ δ ” a formuly $A(a)$, $\sim A(a)$, kde a je nový parameter, symbolom „ $\delta(a)$ ”.

Poznámka: obmedzenie v pravidle B_5 na nový parameter objasníme touto intuitívnou úvahou: Predpokladajme, že sme dokázali, že prvok x má istú vlastnosť P , teda dokázali sme vetu $(\exists x) P(x)$. Potom môžeme povedať, že a je práve takým x , a teda výrok $P(a)$ je pravdivý. Ak dokážeme ďalej vetu $(\exists x) Q(x)$, teda že x má vlastnosť Q , nemôžeme bez nebezpečenstva neadekvátnosti vyhlásiť, že pravdivý je aj výrok $Q(a)$, pretože nevieme, či naše a má zároveň obe vlastnosti P , Q . My sme totiž vyhlásili iba to, že P platí pre najmenej jedno a , nie pre všetky a , teda môže sa stať, že iba $P(a)$ je pravdivým výrokom (ináč povedané iba jediné x ; má vlastnosť P), pričom v prípade vlastnosti Q môžu existovať napr. dva prvky, ktoré majú túto vlastnosť, pravda, obidva môžu byť rozdielne od a , napr. $P(b)$, $P(g)$. Tak isto sa však môže stať, že platí $P(a)$ a $Q(a)$. Aby sme vylúčili možnosť takejto neadekvátnosti, zoberieme nový parameter b , vyhlásime, že b je takým x , ktoré má vlastnosť Q , a môžeme písať $Q(b)$.

Samozrejme, ak vyhlásim, že $P(a)$ a $Q(b)$, nevylučujem tým ešte prípad, že môže platiť rovnosť $a = b$.

Príklad:

- (1) $(\exists y) [(\exists x) Px \rightarrow Py]$
- (2) $(\exists x) Px \rightarrow Pa$
- (3) $\sim (\exists x) Px \mid (4) Pa$
- (5) $\sim Pa$
- (6) $\sim (\exists x) Px$
- (7) $\sim Pb$
- (8) $\sim (\exists x) Px$
- (9) $\sim Pc$
- ⋮

Vysvetlenie:

a) Na základe pravidla $B_6(a)$ sme rozložili formulu (1) na formulu (2) a podpísali sme ju pod (1).

b) Na základe pravidla $B_4(a)$ sme rozložili (2) na (3) a (4) a rozvetvíme tabu.

c) Na základe $B_5(b)$ sme rozložili (3) na (5), podpísali sme ju pod (3) a pod ňou (teda pod (5)) sme znova napísali (3), pravda, tento raz nám figuruje ako (6).

d) Keďže máme nekonečný počet parametrov a formula (3) je γ typu, operáciu opísanú pod bodom (c) opakujeme do nekonečna. Takým spôsobom dostávam body (7), (8), (9) ... Vidíme teda, že takto získaná vetva je otvorená a súčasne nekonečná.

Poznámka: Vidíme teda, že naše tably môžu byť nekonečné, pretože sa v nich môže vyskytnúť aspoň jedna nekonečná vetva. Všeobecne teda môžeme povedať, že tablu systematicky konštruujeme tak, že začíname rozklad formúl od začiatku smerom nadol (podľa daných pravidiel), zľava doprava (po vetvách) tak, že každú formulu X rozložíme takto: ak je typu α alebo β , rozložíme ju známym spôsobom. Ak je typu δ , potom zoberieme parameter a , ktorý sa ešte nenachádza v table, a rozložíme ju na $\delta(a)$ a podpíšeme ju pod každú vetvu, ktorá prechádza cez δ . Ak X je typu γ , potom zoberieme prvý parameter a taký, že $\gamma(a)$ sa nenachádza na žiadnej z vetví, ktoré prechádzajú formulou γ , a podpíšeme ju $[\gamma(a)]$ pod každú túto vetvu. Súčasne podpíšeme pod každé takto získané $\gamma(a)$ opäť formulu γ . Takýmto postupom si 1. zabezpečíme, že všetky formuly budú rozložené až na ich atomické časti, a 2. zároveň zabezpečíme tým rozklad každej formuly typu γ na nekonečnú postupnosť formúl typu $\gamma(a)$. Preto odporúčame čitateľovi rozložiť tieto formuly: $(\forall y) [(\forall x) P(x) \rightarrow Py]$, $\sim (\exists y) \rightarrow [(\forall y) ((\exists x) P(x) \rightarrow P(y))]$.

Návod:

- (1) $\sim (\exists y) Py \rightarrow [(\forall y) [(\exists x) Px \rightarrow Py]]$
- (2) $\sim \sim (\exists y) Py \mid (1)$
- (3) $(\forall y) [(\exists x) Px \rightarrow Py] (1)$

Poznámka: Prv než pristúpime k jej opisu, zamyslime sa nad nasledujúcou úvahou: predpokladajme, že sme dokázali vetu $(\forall x) P(x)$ (ide o typ γ). Potom podľa pravidla predpokladáme $P(a)$. Teda v tomto prípade zápis $P(a)$ nám vlastne zastupuje formuly: $P(a_1), P(a_2), P(a_3) \dots$. Ak, pravda, neskôr dokážeme vetu $(\exists x) Q(x)$, môžeme písať bez nebezpečenstva $Q(a)$, pretože vlastne $P(a)$ sme získali z $(\exists x) P(x)$, čo nám hovorí, že výroková funkcia $P(x)$ je splnená vo všetkých hodnotách premennej x , a teda aj v $P(a)$. Ak teda vyhlásime, že a má vlastnosť P a zároveň Q , nedopúšťame sa neadekvátnosti, pretože či už a alebo b , alebo hociaký iný parameter má vlastnosť Q , bude mať súčasne aj vlastnosť P , čo nám zaručuje zápis $(\forall x) P(x)$.

Ilustrácia: Majme pravdivú vetu „ $(\forall x) x$ je celé číslo“ a vetu „ $(\exists x) x$ je prvočíslo a súčasne párne číslo“. Vidíme teda, že platí: 1 je celé číslo, 2 je celé číslo, $\dots$, n je celé číslo $\dots$. Tak isto však platí (iba pre jednu hodnotu x), že 2 je prvočíslo a súčasne párne číslo (uvažujeme množinu všetkých prír. čísel!). Jasne vidíme, že hoci veta $(\exists x) P(x)$ platí iba pre jeden prvok univerza, tento prvok (v našom prípade číslo 2) bude mať okrem vlastnosti P aj inú vlastnosť (v našom prípade Q), ak je pravdivá veta $(\forall x) Q(x)$. Vidíme teda (všeobecne povedané), že v takýchto prípadoch môžeme vždy nájsť aspoň jeden prvok (nezáleží na tom, aký — tu vidí čitateľ výhodu parametra!), ktorý má obe vlastnosti P, Q (pravda, vety $(\exists x) P(x), (\forall x) Q(x)$ musia platiť!). Samozrejme, táto úvaha triviálne platí aj v prípade, že $P = Q$. Preto keď máme v table formulu typu $P(a)$, pričom $P(a)$ vzniklo z formuly typu γ , môžeme písať $Q(a)$, aj keď $Q(a)$ vzniklo z formuly typu δ , teda nemusíme dbať na obmedzenie, že „ a musí byť nový parameter“. Preto môžeme namiesto nášho striktného pravidla B_6 používať tzv. oslabené pravidlo B_6 : „ a je nový parameter, alebo a nebolo predtým zavedené pomocou pravidla B_6 a nevyskytuje sa v δ a nijaký parameter vo formule δ nebol predtým zavedený pomocou pravidla B_6 “.

Ak chceme skonštruovať tabuľu skrátenou metódou, mali by sme postupovať podľa týchto bodov: a) rozložíme najprv začiatok tabuľy a potom v každom ďalšom kroku b) najprv rozložíme formuly typu α , c) potom δ , d) pokračujeme typom β a e) nakoniec rozložíme formuly typu γ , tak ako sme to opísali pri rozklade formuly typu γ , pri systematickej konštrukcii tabuľy. Samozrejme, pri tomto postupe využijeme v maximálnej miere oslabenú formu pravidla B_6 . Pochopiteľne, rozklad formlí typu γ nie je potrebné dodržiavať do dôsledku, ale je potrebné postupovať pri rozklade individuálne od prípadu k prípadu, čo pochopiteľne, otvára pre „konštruktéra“ široké pole tvorivých možností a nápadov. Ak je však náhodou „konštruktér“ v „lenivej indispozícii“ — ako hovorí Smullyan — potom stačí postupovať čisto mechanicky, s rovnakým efektom. Je jasné, že ak postupujeme „tvorivou metódou“, potom každá tabuľka sa môže skonštruovať niekoľkými spôsobmi.

Príklad:

$$\begin{array}{llll}
 (a) \sim \{ (\exists y) [(\exists x) Px \rightarrow Py] \} & (b) \sim \{ \sim (\exists y) Py \rightarrow [(\forall y) ((\exists x) Px \rightarrow Py)] \} & (b') & \vdots \\
 \sim [(\exists x) Px \rightarrow Pa] & \sim (\exists y) Py & & \\
 (\exists x) Px & \sim [(\forall y) ((\exists x) Px \rightarrow Py)] & & \\
 \sim Pa & \sim [(\exists x) Px \rightarrow Pa] & & \\
 Pa & (\exists x) Px & (x) Px & \\
 \times & & & \\
 & \sim Pa & \sim Pa & \\
 & Pb & (prečo Pb & Pb \\
 & \sim Pa & a nie Pa?) & \sim Pb (prečo?) \\
 & \sim (\exists y) Py & \times & \\
 & \sim Pb & & \\
 & \times & &
 \end{array}$$

Príklad:

$$\begin{aligned}
 & \sim \{ (\exists x) Px \vee (\exists x) (Px \wedge Qx) \rightarrow ((\exists x) Qx) \} \\
 & \quad (\exists x) (Px \wedge Qx) \\
 & \sim [(\exists x) Px \vee (\exists x) Qx] \\
 & \quad \sim (\exists x) Px \\
 & \quad \sim (\exists x) Qx \\
 & \quad Pa \wedge Qa \\
 & \quad Pa \\
 & \quad Qa \\
 & \quad \sim Pa \\
 & \quad \sim Qa \\
 & \quad \times
 \end{aligned}$$

Príklad:

$$\begin{aligned}
 & \sim \{ [(\exists x) Px \vee (\exists x) \neg [x \supset (x \exists x) (Px \wedge Qx)] \\
 & \quad (\exists x) Px \vee (\exists x) Qx \\
 & \quad \sim (\exists x) (Px \wedge Qx) \\
 & \quad (\exists x) Px] (\exists x) Qx \\
 & \quad \text{(prečo?) } Pa \quad Qb \text{ (prečo?)} \\
 & \quad \sim (Pa \wedge Qa) \quad \sim (Pa \wedge Qa) \\
 & \quad \sim Pa \mid \sim Qa \quad \sim Pa \mid \sim Qa \\
 & \quad \times \quad \vdots \quad \sim (Pb \wedge Qb) \text{ (Ako sme to dostali?)} \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \sim Pb \mid \sim Qb \\
 & \quad \quad \quad \times
 \end{aligned}$$

Návrh: Navrhujeme čitateľovi zistiť, či $(H \wedge K) \rightarrow L$ je platná formula.

$H = (\forall x) (\forall y) [Rxy \rightarrow Ryx]$, $K = (\forall x) (\forall y) (\forall z) [(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz]$,

$L = (\forall x) (\forall y) [Rxy \rightarrow Rxx]$.

Literatúra:

1. SMULLYAN, R. M.: First-order logic, New York, Heidelberg, Berlin, 1968, s. 157.
2. SMULLYAN, R. M.: Trees and nest structures. J. S. L. 31, 1966, s. 303–321.
3. SMULLYAN, R. M.: A unifying principle in quantification theory. Proceeding of the National academy of science, 1963.
4. SMULLYAN, R. M.: Analytic natural deduktion, J. S. L. 30, 1965, s. 123–139.