

Vplyv filozofie na vedu a spätný vplyv vedy na filozofiu je všeobecne známy. Vznik skoro každej novej vednej disciplíny, teórie, každý nový objav majú bezpochyby vzťah k filozofii, prípadne k jej niektorej časti. Avšak súčasne mnohokrát bol ich vznik podmienený istými filozofickými stimulmi, názormi.¹

Nie je to inakšie ani pri vzniku a rozvoji kľúčovej matematickej disciplíny, teórie množín, ktorá hrá centrálnu úlohu pri rozvoji modernej (novodobej) matematiky.² Jej tvorcom je nemecký matematik Georg Cantor. Patril do berlínskej školy, pre ktorú bola typická tzv. aritmetizácia matematiky. Stručne, tejto škole išlo o prevedenie princípov analýzy na jednoduché aritmetické pojmy. Podľa popredného predstaviteľa tohto smeru Kroneckera celá matematika musí byť založená na číslach a všetky čísla opäť na prirodzených číslach.³ Kronecker však odmieta aktuálne nekonečno. Definície matematických pojmov uznáva iba vtedy, ak sú vytvorené prostriedkami s konečným charakterom. To, pravda, bolo v hlbokom rozpore s ideami Cantora. U neho práve základný princíp, pomocou ktorého buduje svoju teóriu transfinitných kardinálnych čísiel, je matematické zvládnutie aktuálneho nekonečna.

Nekonečno ako predmet filozofických úvah sa prakticky datuje od vzniku gréckej filozofie. Už prvé výskumy vedú však k mnohým paradoxom.⁴ Preto raz sa nekonečno zatracuje, raz obhajuje. Nekonečno si všíma aj stredoveká scholastická filozofia.⁵ Galilei vyvracia vžitý názor, že časť je menšia ako celok práve pomocou nekonečných množín (celkov). Cantor sa vedome hlási k dvom predchodcom, k sv. Augustínovi a B. Bolzanovi. Obhajoval neobmedzené uznanie aktuálneho nekonečna práve pomocou argumentov sv. Augustína. Začal uplatňovať nekonečno ako nekonečný proces proti skoro absolútnej väčšine matematikov.⁶ Cantor dosiahol za krátky čas úplné uznanie. B. Russell ukázal, že teória transfinitných čísiel obsahuje isté logické ťažkosti. To zapríčinilo intenzívne skúmanie základov matematiky, čo dodnes pokračuje s veľkou intenzitou. Teória množín sa takto dostáva do pozornosti nielen matematikov, ale aj logikov a filozofov.

1. Z tohto dôvodu nás veľmi potešil populárny výklad základných problémov teórie množín, ktorý nachádzame v práci sovietskeho matematika N. J. Vilenkina, *Neznámy svet nekonečných množín*.⁷ Túto prácu je potrebné privítať aj z dôvodu, že čiastočne zaplnila medzeru, ktorá u nás

¹ Pripomeňme si, že často významní vedci boli súčasne aj významnými filozofmi, a naopak: Pytagoras, Platón, Aristoteles, Bacon, Galilei, Descartes, Leibniz, Newton, Kant, Poincaré, Einstein, Plank, Russel a ďalší.

² Bourbaki: N.: „Dnes už vieme, že z logického hľadiska je možné dedukovať skoro celú matematiku z jedného prameňa — z teórie množín.“ Vopěnka, P.: Teorie množin je v súčasnej dobe svetom matematiků, v němž se veškerá matematika odehrává.“

³ „Celé čísla sú výtvorom nášho milostivého Boha, všetko ostatné je dielom človeka.“ Kronecker tak zamieňa Platónovo „boh geometrizuje“ svojím „boh aritmetizuje“.

⁴ Na základe pojmu nekonečna dokazuje napr. Zenón nemožnosť pohybu.

⁵ Išlo o dosť závažný „problém“: koľko anjelov sa zmestí na špičku ihly, konečne alebo nekonečne mnoho?

⁶ Pozri základnú prácu: Grundlagen einer allgemeiner Mannigfaltigkeitslehre.

⁷ Nakladatelství technické literatury, Praha 1971, s. 115. Z ruského originálu Rasskazi o množstvach, Moskva 1965, preložil Alois Kufner. Systematický a náročný výklad môže čitateľ nájsť v prácach: ALEXANDROV, P. S.: Úvod do obecné teorie množin a funkcí, Praha 1954 a ČECH, E.: Bodové množiny, Praha 1967. Vilenkinova práca je vôbec prvým u nás vydaným populárnym výkladom. V slovenčine nemáme, žiaľ, nijakú samostatnú publikáciu z tejto oblasti.

existuje pri vydávaní publikácií z oblasti teórie množín.⁸ Treba povedať, že práca ozaj spĺňa všetky požiadavky kladené na diela podobného charakteru. Vilenkin stál pred neľahkou úlohou, ktoré problémy z tejto dnes už veľmi obsiahlej disciplíny nadhodit, uprednostniť a predovšetkým, ako ich populárne vysvetliť. Túto úlohu splnil vynikajúco. Za každým problémom, za každou myšlienkou cítime autorovu zasvätenosť a erudíciu. Problémy objasňuje veľmi názorne (pokiaľ je to možné), intuitívne jasne a vynikajúco ich dopĺňa príkladmi. Kniha obsahuje vyše 50 obrázkov, ktoré veľmi vhodne dopĺňajú text. Osobitne by sme chceli upozorniť na množstvo historických faktov a problémov, ktoré v čase vzniku teórie množín stáli pred jej tvorcami. Kniha je rozdelená do štyroch kapitol (časťí), ktoré (s výnimkou prvej) sa zas delia na množstvo krátkych, ale obsažných pokapitol. Na konci knihy je uvedený zoznam 21 problémov a príkladov, nad ktorými by sa mal čitateľ zamyslieť (riešiť ich).

2. Prvá kapitola je azda najoriginálnejšou časťou celej knihy. Na jednom príklade a vypožičanej literárnej postave Ijona Tichého zo známej knihy Stanislava Lema autor nesmierne prístupne, populárne, ale pritom veľmi presne zoznamuje čitateľa s problémami, ktoré bude vysvetľovať na ďalších stránkach knihy. Počas celého ďalšieho výkladu sa k tomuto príkladu (k jeho častiam) neustále vracia. Krátko, autor zasväcuje touto formou čitateľa do centrálneho problému teórie množín: aktuálneho nekonečna a jeho vlastností.

3. V druhej kapitole nás autor zoz-

namuje s pojmom množiny,⁹ ako môžeme množinu určiť, pričom poukazuje na isté ťažkosti, ktoré tu vznikajú. V ďalšej podkapitole sa zameriava práve na tieto ťažkosti a poukazuje na ich hlbšie príčiny, súvisiace so spomínanými známymi paradoxami teórie množín. Zavádza pojem prázdnej a univerzálnej množiny, ako aj pojem podmnožiny. V závere kapitoly nás zoznamuje so základnými operáciami na množinách, množinovou algebrou a Booleovou algebrou.

4. Tretia, ústredná kapitola hovorí o jadre teórie množín, mohutnosti množín. Autor najprv porovnáva nekonečné množiny. Tu sa už začína problematika zaujímajúca filozofa: máme iba jedno nekonečno, alebo viac? Ako ich môžeme porovnať? Alebo inakšie: čoho je viac, racionálnych, alebo prirodzených čísel? Upozorňuje na to, že nekonečné množiny nie je možné porovnať takými metódami ako konečné. Metóda porovnávania sa robí vzájomne jednoznačným priradením, pričom z dvoch porovnávaných množín utvoríme presne vymedzeným spôsobom usporiadané dvojice. Tým sa získa tzv. rovnaká mohutnosť alebo ekvivalencia dvoch porovnávaných množín.¹⁰ Ďalej autor zavádza veľmi dôležitý pojem tzv. *spočítateľnej množiny*. Spočítateľná množina je taká množina, ktorá má rovnaký počet prvkov ako množina prirodzených čísel. Ďalej z hľadiska filozofie zaujímavý problém nastoľuje autor otázkou: existuje aj iná množina, ako množina spočítateľná? Alebo inakšie: existujú nekonečné množiny, pri ktorých má zmysel hovoriť o väčšej alebo menšej množine? Autor ukazuje, že spočítateľná množina je najmenšia

⁸ Pri tejto príležitosti nemôžeme neuviesť doslovnú Cantorovu definíciu s upozornením na jej skôr filozofické, ako logické a prísne matematické vymedzenie: „Množinou rozumiem každý súbor M určitých, dobre rozlíšiteľných objektov nášho nazerania alebo nášho myslenia, zhrnutých do jedného celku.“

⁹ Podobne riešil tento problém B. Bolzano ešte pred Cantorom. Ustúpil však pred ťažkosťami, ktoré táto metóda prinášala. Metóda vzájomne jednoznačného priradenia vyžadovala rozlíčiť sa s mnohými vžitými dogmami.

¹⁰ Jeho dosť voľná formulácia znie asi takto: Ak je daná nekonečná množina nekonečných množín, je možné z každej množiny vybrať po jednom prvku, hoci sme predtým neudali pravidlá tohto výberu.

z nekonečných množín. Ďalej zavádza veľmi dôležitý pojem nespočítateľnej množiny (nespočítateľná je napr. množina všetkých reálnych čísel). Tu však vzniká problém: ak chceme ukázať, že množina je spočítateľná, stačí vymyslieť predpis, podľa ktorého môžeme túto množinu 1—1 *priradiť* (očíslovať) k množine prirodzených čísel. Ak však chceme dokázať nespočítateľnosť nejakej množiny, musíme ukázať, že takýto predpis neexistuje. Cantorov génus sa vyrovnal aj s týmto problémom: nespočítateľnosť určitej množiny demonštruje tzv. diagonálnou metódou. Matematici sa napr. len s ťažkým srdcom lúčili s takým intuitívne zrejším faktom, že na nekonečnej priamke nie je presne toľko bodov ako na úsečke. Ba sám Cantor na fakt, že vo štvorci je rovnaké množstvo bodov ako na úsečke, reagoval slovami: „Vidím to, ale neverím tomu!“ No aj sám veľký Cantor nevládol ďalší problém: Existuje množina, ktorá by mala viac prvkov ako množina prirodzených čísel a menej ako množina reálnych čísel? Tento problém nie je s konečnou platnosťou vyriešený ani dnes a v literatúre figuruje ako tzv. hypotéza kontinua, ktorá odpovedá záporne. Ďalší, z filozofického hľadiska veľmi závažný, je nasledujúci problém: existuje množina najväčšej mohutnosti? Ku každej množine A je možné zostrojiť množinu B , ktorá má väčšiu mohutnosť. Preto neexistuje množina s najväčšou mohutnosťou. V ďalšej časti tejto kapitoly autor vytvára tzv. aritmetiku kardinálnych čísel, alebo inakšie: aritmetiku nekonečna. Zavádza aj pojem usporiadanej množiny a ordinálneho čísla. Z filozofického hľadiska i z hľadiska teórie množín je nemenej zaujímavá tzv. exioma

výberu.¹¹ Táto axioma vedie k celkom nekonštruktívnym dôkazom. Avšak rešpektovanie tejto axiomy vedie k istému druhu paradoxov.¹² Matematikom sa napr. podarilo rozdeliť guľu na štyri rovnaké časti, tak, že z dvoch častí možno zostaviť celú guľu s tým istým polomerom.

4. Posledná, štvrtá kapitola s exotickým názvom¹³ je už trochu špeciálna a vyžaduje si isté matematické znalosti a orientáciu. Aj napriek tomu si však myslíme, že obsahuje veľa zaujímavého tak pre matematika, ako aj pre filozofa. Ide, zhruba povedané, o aplikáciu výsledkov a aparáturu teórie množín na niektoré problémy funkcionálnej analýzy, geometrie. Autor demonštruje na historickom vývine príslušného problému z uvedených disciplín operatívnu a užitočnosť aparátu teórie množín na jeho riešení. Ukazuje, že veľa problémov sa vyriešilo alebo presne explikovalo práve pomocou tohto aparátu. Ukazuje sa, že síce pomocou teórie množín je možné veľmi presne a pritom veľmi jednoducho vymedziť také pojmy, ako krivka, čiara, štvorec, priestor, oblasť, rovina atď. Pravda, opäť sa vynárajú už spomínané „paradoxy“, ktoré veľmi „útočia“ na vžitú názory o intuícii a bežnom chápaní. Známy francúzsky matematik a filozof H. Poincaré ich hodnotí takto: „Ako nás mohla intuícia sklamať až v takej miere!“ V celej kapitole je pritom mnoho podobných výsledkov s príslušným komentárom a dôsledkami.

V závere by som chcel spomenúť aj preklad. Je potrebné povedať, že tak zaujímavo a pritom erudovane napísaná kniha sa musela iste dobre prekladať. Aj tak musíme s obdivom oceniť brilantný preklad a najmä zvládnutie i zjednotenie veľkého množstva odborných termínov.¹⁴

¹¹ Filozof B. Russell sa o tejto axiome vyjadruje takto: „Najprv sa zdá táto axioma zrejmu: čím ďalej sa však do nej vmýšľaš, tým podivnejšie sa ti zdajú jej dôsledky. Nakoniec už prestávaš chápať, čo vlastne axioma znamená.“

¹² Podivuhodné funkcie a krivky alebo prechádzky po matematickej klenotnici.

¹³ Ide, pochopiteľne, o náš subjektívny dojem.

Musíme pochváliť aj kvalitnú prácu vydavateľstva a tlačiarne. Kniha neobsahuje preklepy a skomolenia matematických symbolov, formúl, vzorcov a obrázkov.

Vyzdvihujem túto skutočnosť, pretože na našom knižnom trhu je to takmer ojedinelý zjav!

Svätoslav Mathé

VLASTNOSTI ČASU

Pojem času patrí medzi najzákladnejšie pojmy súčasnej vedy. Špeciálne vedy ho však i dnes používajú bez bližšieho určenia jeho zmyslu a precízneho definovania jeho základných vlastností. Sama fyzika sa zamerala skôr na technické problémy vyčíslenia a zmerania časových intervalov.

V poslednom období sa objavujú práce, ktoré sa sústreďujú práve na základné vlastnosti času. Práca poľského filozofa a fyzika Z. Augustyneka *Vlastnosti času*¹ je pokusom o systematický výklad a analýzu topologických i symetrických vlastností času, ktorými operuje súčasná fyzika. Autor si v práci kladie dve úlohy. Sformulovať precízne definície daných vlastností, ako aj sformulovať a analyzovať tvrdenia, na základe ktorých sa tieto vlastnosti času pripisujú. Ide predovšetkým o problémy epistemologického statusu týchto tvrdení a o predpoklady ich teoretickej explikácie. Analyzuje prvotné pojmy, z ktorých sú výpovede konštruované a ktoré sú základom fyzikálnej teórie času obsiahnutej v teórii relativity.

Prvá časť práce je venovaná rozboru a definíciám dvoch druhov časových pojmov. Do prvej skupiny patria objektové pojmy *čas*, *časový moment*, *časový interval*, do druhej matematické pojmy *mera časového intervalu*, *vzdialenosť dvoch časových momentov* atď. Na základe informácií, ktoré poskytuje súčasná fyzikálna relativistická teória času, kvantová mechanika, kvantová teória poľa, kozmológia a iné vedy, snaží sa autor využívaním formálnologického a množinového aparátu riešiť tri problémy:

1. Konštrukcia definície času prostredníctvom abstrakcie s vyjasnením pojmov, ktoré sa v definícii použili.
2. Analýza konzekvencií, ktoré vyplývajú zo špeciálnej teórie relativity pre takto definovaný čas.
3. Preskúmanie dôsledkov, ktoré vyplývajú z danej definície ako filozofický problém.

Autorova definícia času je založená na pojme *materiálny svet* a na relácii *súčasnosť*.

Materiálny svet — S je množina všetkých bodových fyzikálnych procesov x , y , z , kde pod „bodovým fyzikálnym procesom“ rozumie sa proces, ktorý nie je časovopriestorove rozľahlý. Z takejto množinovej definície materiálneho sveta vyplýva, že procesy nie sú jeho časťami, ale prvkami. Z danej definície nie je však jasné, či okrem bodových procesov existujú aj nebodové, ktoré nie sú v tejto interpretácii zahrnuté do materiálneho sveta. Ak by takéto procesy existovali, potom by materiálny svet bol len časťou reality. Z kontextu danej práce ťažko možno robiť takýto záver. Bolo by však zaujímavé sledovať, ako by autor definoval čas, keby množinu S rozšíril o nebodové procesy.

Pod reláciou *súčasnosť* — R rozumie autor dvojčlennú reláciu medzi procesmi priestorove odlahlými, ktoré sú obsiahnuté v S . Dva procesy x a y prebiehajú súčasne v priestorových bodoch x' a y' , ak z nich vychádzajúce elektromagnetické signály sa súčasne stretávajú v bode x' a y' . V tejto definícii sa objavujú dva rozličné pojmy súčasnosti:

¹ AUGUSTYNEK, Z: *Vlastności czasu*. Warszawa 1970, s. 178