

INTUICIONIZMUS A KONŠTRUKTIVIZMUS V ZÁKLADOCH MATEMATIKY

JÁN SZOMOLÁNYI

Objavenie antinómií na začiatku tohto storočia otriaslo vierou, že je riešiteľný každý matematický problém, takou pevnou v 19. storočí. Z tejto krízovej situácie sa hľadalo východisko rôznymi spôsobmi, a tak vznikajú nové prúdy v základoch matematiky, ktoré možno zhruba rozdeliť na logicizmus, formalizmus a intuicionizmus. Pretože ako logicizmus, tak aj formalizmus sa v podstate nedotýkajú logiky vystupujúcej v základoch príslušne chápanej matematiky, budeme sa venovať najradikálnejšiemu smeru odmietajúcemu ako klasickú logiku, tak i matematiku, intuicionizmu a z neho vychádzajúcemu konštruktivismu. Pre rôznosť intuicionistických, ako aj konštruktivistických koncepcií budeme sa zaoberať tými najrozvinutejšími, teda neointuicionizmom Brouwera a Heytinga a konštruktivismom založenom na Markovovom pojme normálneho algoritmu.

Intuicionizmus

Intuicionizmus vychádza z prác Brouwera, ktorý postuloval základné princípy intuicionizmu, aj keď v mnohých ohľadoch hmlisto a pre matematikov a logikov privyknutých na presnú stavbu klasických teórií často nezrozumiteľne. Záujem o intuicionizmus vzrástol preto až potom, čo r. 1930 previedol Heyting formalizáciu intuicionistickej logiky. I keď táto formalizácia nie je pre samých intuicionistov príliš zaujímavá, mala veľký význam pre prebudenie záujmu o intuicionizmus.

Základným pojmom intuicionizmu je pojem konštruovateľnosti. Konštruovateľnosť nie je však definovaná, je to pojem intuitívny. Mnohé z konštruktívnych metód boli už ukázané, no množina týchto metód je a aj zostane, podľa intuicionizmu, neúplná. To vyplýva priamo z intuicionistického chápania matematiky ako akéhosi sveta myšlienkových procesov a z neohraničenosti tvorivého myslenia.

Z takéhoto chápania matematiky vyplýva aj vzťah medzi matematikou a logikou. Ak je na jednej strane matematika systém myšlienkových procesov, a nie ich písané vyjadrenie, a na strane druhej, logika je práve teóriou foriem tohoto vyjadrenia, nemôže vystupovať ako základ matematiky a navyše zákony logiky sú prístupné iba do tej miery, pokiaľ sú v súlade s intuitívnym základom a konštruktívnou výstavbou matematiky.

Tento princíp akejsi druhotnosti logiky sa vzťahuje na prijatie akéhokoľvek intuicionistického systému, čo sa prejaví už pri chápaní logických konštánt: $p \wedge q$ platí vtedy a len vtedy, ak je skonštruovateľné ako p , tak q . $p \vee q$ platí vtedy a len vtedy, ak je skonštruovateľné aspoň jedno z p , q .

$\neg p$ platí vtedy a len vtedy, ak máme konštrukciu, ktorá z predpokladu, že p platí, vedie k protirečeniu.

Pojem protirečenia je takisto ako pojem konštruovateľnosti pojmom prvotným, nedefinovaným.

$p \rightarrow q$ platí vtedy a len vtedy, ak existuje taká konštrukcia, ktorá spojená s ľubovoľnou konštrukciou dokazujúcou p , dáva dôkaz pre q .

Najjasnejšie sa teda líši intuicionistická logika od klasickej v chápaní negácie. Z takéhoto chápania negácie a z požiadavky konštruktívnosti vyplýva odmietnutie princípu vylúčenia tretieho.

Toto odmietnutie pravidla vylúčenia tretieho sa netýka každého jednotlivého prípadu. Pri konkrétne daných, intuicionisticky prípustných výrokoch je tvrdenie $p \vee \neg p$ pravdivé. Týka sa však všeobecného výroku p . Rozlišujú sa tri možnosti riešenia platnosti nejakého tvrdenia:

1. kladné riešenie, ak sa dá dokázať pomocou nejakej intuicionisticky prípustnej metódy,

2. záporné riešenie, získané pomocou protipríkladu,

3. nemožnosť riešenia, keď nenastáva ani jeden z predchádzajúcich prípadov 1., 2.

Kvantifikátory v intuicionistickej logike sa chápu takto: Pre nejakú oblasť M je výrok $\forall x P/x/$ pravdivý, ak existuje metóda, intuicionisticky prípustná, ktorou možno pre každý prvok a z M získať $P/a/$.

Výrok $\exists x P/x/$ bude pravdivý v oblasti M , ak je daný prvok a z M , taký, že platí $P/a/$.

Je zrejmé, že použitie pravidla tertium non datur pre konkrétny výrok p , majúci intuicionistický zmysel, ako aj pre tvrdenia týkajúce sa konečných oblastí neprináša nijaké problémy, pretože v takom prípade možno o každom prvku tejto oblasti rozhodnúť, či preň dané tvrdenie platí, alebo nie. Výhrada intuicionistov k používaniu tohoto pravidla sa týka výhradne všeobecných výrokov pre nekonečné oblasti.

Majme napríklad tvrdenie T : Pre každé prvočíslo $2^n - 1$, existuje väčšie prvočíslo tvaru $2^m - 1$, kde $m > n$. Pretože zatiaľ nevieme, či je množina prvočísel tvaru $2^n - 1$ konečná alebo nekonečná, to znamená, že nemáme túto množinu plne určenú a nemôžeme teda zistiť, či ku každému prvočíslu tvaru $2^n - 1$ existuje väčšie prvočíslo tvaru $2^m - 1$, ani nemáme nájsť prvočíslo tohoto tvaru, pre ktoré by dané tvrdenie neplatilo. To je teda jeden z tých prípadov, keď intuicionizmus neuzná pravdivosť $T \vee \neg T$.

Z intuicionistického chápania negácie vyplýva aj odmietnutie iného tvrdenia klasickej logiky: $\neg \neg p \rightarrow p$. Vezmeme si opäť príklad, v ktorom je toto tvrdenie pre intuicionistov neprípustné:

Majme číslo π zapísané v desatinnom zápise a pod ním desatinný zlomok $s = 0,333\dots$, ktorý ukončíme vtedy, keď postupnosť znakov 0123456789 sa po prvý raz vyskytne v rozpísanom π . Ak číslo 9, z prvého výskytu výrazu 0123456789 v čísle π je na k -tom mieste za desatinnou čiarkou, potom $s = \frac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}$. Teraz predpokladajme, že s nemôže byť racionálnym číslom,

potom rovnosť $s = \frac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}$ by nebola možná a postupnosť 0123456789 by sa nikdy neobjavila v π . No potom $s = \frac{1}{3}$, čo nie je možné. Predpoklad že s nie je racionálne, by viedol k protirečeniu. Predsa však nemáme právo predpokladať, že s je racionálne, lebo by to znamenalo, že môžeme vyjadriť čitateľa aj menovateľa nejakého nesúdeliteľného zlomku $\frac{p}{q}$ rovného s , preto je zrejmé, že potrebujeme, aby bolo možné ukázať výskyt výrazu 0123456789 v π alebo dokázať, že taký výskyt neexistuje.

Opak uvažovanej formuly je však aj v intuicionistickom výrokovom počte tvrdením. Platí teda

$$\vdash p \rightarrow \neg \neg p.$$

Keď tam dosadíme za p výraz $\neg \neg p$, dostávame

$$\vdash \neg \neg p \rightarrow \neg \neg \neg \neg p.$$

Z týchto dvoch tvrdení vyplýva, že nemôže byť tvrdením formula

$$\neg \neg q \rightarrow \neg p / \neg p \rightarrow q /,$$

v opačnom prípade by sa z týchto dvoch posledných formúl dalo odvodiť $\neg \neg \neg p \rightarrow p$.

Na druhej strane je však pravdivý výraz

$$\vdash \neg p \rightarrow q / \neg q \rightarrow \neg p /,$$

z čoho sa ľahko získa

$$\vdash \neg p \rightarrow q / \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg q /.$$

V intuicionistickom predikátovom počte sú pravdivé nasledujúce výrazy:

$$\vdash \neg Ax/P/x \rightarrow \neg \neg Ex/P/x /$$

$$\vdash \neg Ex/P/x \rightarrow \neg \neg Ax/P/x /,$$

opačné implikácie neplatia.

Ďalej platí: $\vdash \neg Ax/P/x \rightarrow \neg \neg Ex/P/x /$

$$\vdash \neg \neg Ex/P/x \rightarrow \neg Ax/P/x /$$

$$\vdash \neg Ex/P/x \rightarrow \neg \neg Ax/P/x /.$$

Obrátená implikácia k poslednej, čiže výraz $\neg \neg Ax/P/x \rightarrow \neg Ex/P/x /$, zrejme tiež neplatí.

Požiadavka konštruovateľnosti sa prejaví i pri pojme dokázateľnosti. Nejaké matematické tvrdenie označené jazykovým objektom P má intuicionistický zmysel, ak sa určí, aké konštrukcie vytvárajú dôkaz objektu P . To znamená, ak máme danú konštrukciu r_p takú, že pre každú konštrukciu k , $r_p/k/ = 0$, ak je k dôkaz pre P a $r_p/k/ = 1$, ak k nie je dôkaz pre P . Použité logické prvky sú interpretované ako pravdivostné funkcie.

Intuicionistická matematika, tak ako ju rozviedol Brouwer a Heyting, má dva aspekty. Negatívny spočíva v odmietnutí základných pojmov klasickej matematiky. Pozitívny aspekt je v tom, že pojmy konštrukcie a konštruktívneho dôkazu sú, v krajnom prípade aspoň pre časť matematiky, dostatočne jasné, aby bolo možné ju systematicky vybudovať, vychádzajúc z niektorých zrejmých tvrdení vzťahujúcich sa na tieto pojmy.

V poslednom čase sa v matematike značne rozvinul konštruktivistický smer. Vychádza v podstate z intuicionistickej kritiky klasickej matematiky a jeho podstata je v tom, že sa ohraničuje na konštruktívne objekty a zostáva v rámci potenciálnej realizovateľnosti, bez použitia abstrakcie aktuálnej nekonečnosti. Pritom sú vylúčené aj tzv. čisté tvrdenia o existencii, pretože existencia objektu s danými vlastnosťami sa považuje za dokázanú iba vtedy, keď je ukázaný spôsob potenciálne možnej konštrukcie objektu s týmito vlastnosťami.

Pojem konštruktívneho objektu sa, rovnako ako v intuicionizme, nedefinuje, je to základný pojem. Rovnako prirodzeným spôsobom je v konštruktivizme prijatý pojem abstrakcie totožnosti a abstrakcie potenciálnej realizovateľnosti. Abstrakcia totožnosti: Každé dva zápisy jedného a toho istého slova sa pokladajú za totožné.

Abstrakcia potenciálnej realizovateľnosti: Táto abstrakcia spočíva v odhliadnutí od praktických hraníc našich možností v priestore, čase a materiáli. Znamená to, že predpokladáme možnosť zápisu ľubovoľne dlhého slova. Rovnako k ľubovoľnému slovu danej abecedy možno pripísať ľubovoľné iné slovo tejto abecedy.

Táto druhá abstrakcia neumožňuje, samozrejme, uvažovanie o slove ako o nejakom nekonečnom dlhom objekte, lebo takéto uvažovanie by bolo spojené s pripustením aktuálnej nekonečnosti, čo je v konštruktivistickej matematike neprípustné. Tieto dve abstrakcie sú teda prípustné v konštruktivistickej matematike. S inými matematickými abstrakciami sa stretneme pri konštruktivistickej kritike klasickej matematiky.

Ďalším charakteristickým rozlišovacím znakom medzi klasickou a konštruktivistickou matematikou sú existenčné vety. Mnohé tvrdenia klasickej matematiky sú tzv. čisté existenčné vety, dôkazy ktorých sú dôkazmi o existencii vyplývajúcej nie zo zostrojenia predmetu danej vlastnosti, ale v ukázaní „logičnosti“ existencie takého predmetu.

Rozvoj konštruktivizmu sa začal v tridsiatych rokoch nášho storočia, keď bol spresnený pojem algoritmu, dovtedy veľmi nepresný a intuitívny. Teória λ -konverzie Churcha, teória rekurzívnych funkcií (Kleene), teória Turingovho počítača, teória konečných kombinatorických procesov (Post) a Markovov normálny algoritmus sa ukázali navzájom ekvivalentné a viedli k spresneniu pojmu algoritmu. Použitie presného pojmu algoritmu dáva možnosť budovať konštruktívnu matematiku ako vedu.

Výstavba konštruktívnej matematiky

Normálny algoritmus je vybudovaný nasledovne. Prijme sa nejaká abeceda A . Z prvkov tejto abecedy a niektorých pomocných znakov sa vytvorí schéma budúceho algoritmu. Algoritmus sa formuluje ako nejaký štandardný predpis definovaný nejakou schémou. Táto schéma definuje proces postupného

pretvorenia slova v abecede A . Pritom ako východiskové slovo P možno vziať ľubovoľné slovo abecedy A . Proces vytvorený daným algoritmom pozostáva z postupných diskretných krokov. Pri každom takomto kroku sa obdrží nejaké slovo abecedy A . Ak je daný proces ohraničený, hovoríme, že algoritmus je použiteľný na slovo P a výsledné slovo Q , pri ktorom sa proces ukončí, nazývame výsledkom použitia algoritmu na slovo P .

Normálny algoritmus je teda určený svojou abecedou a svojou schémou. Slovo, ktorým je tento algoritmus zakódovaný, sa nazýva jeho zápisom.

Z uvedeného pochopenia normálneho algoritmu vyplýva, že pri budovaní konštruktívnej matematiky sa vychádza od postupnosti tzv. základných abeced. Prvými z tejto postupnosti sú abecedy: $\{0, |\}$, $\{0, |, -\}$, $\{0, |, -, /\}$.

Prvá z nich nazýva abecedou prirodzených čísiel, druhá je abeceda celých čísiel a tretia abeceda racionálnych čísiel. Prirodzené číslo je potom slovo v prvej abecede definované takto: (a) 0 je prirodzené číslo,

(b) ak N je prirodzené číslo, potom $N|$ je tiež prirodzené číslo.

Takýmto spôsobom získame prirodzené čísla $0, 0|, 0||, \dots$ ako slová abecedy $\{0, |\}$.

Podobne môžeme na základe teórie normálnych algoritmov definovať pojem konštruktívnej postupnosti bodov, konštruktívnej konvergenzie takejto postupnosti a môže byť dokázaná veta o úplnosti. Ale klasická veta o konvergencii ohraničenej postupnosti bodov sa dá na základe Speckerovho protipríkladu odmietnuť. Rovnakým spôsobom ako pojem prirodzeného čísla je zavedený aj základný pojem konštruktívnej matematiky, pojem konštruktívnej funkcie reálnych čísiel, na ktorom je postavená celá konštruktívna analýza.

Rozdiel medzi konštruktivismom a intuicionizmom možno stručne zhrnúť do dvoch bodov:

1. Konštruktivismus narába s presným pojmom algoritmu, kým pri intuicionizme je pojem efektívnej metódy neurčitý. Toto presné definovanie algoritmu vedie k odmietnutiu „intuitívnej jasnosti“ ako kritéria prijateľnosti matematických pojmov.

2. Podľa Markova je algoritmus použiteľný na slovo P , ak predpoklad o nekonečnom procese použitia algoritmu na P vedie k absurdnosti. Takéto chápanie efektívnej metódy odmietajú intuicionisti pre jeho intuitívnu nejasnosť.

Kritika klasickej matematiky

Pri procese formovania matematických pojmov vystupujú myšlienkové procesy rôznych typov. Takýmito typmi napr. sú: myšlienkový proces čistej abstrakcie, myšlienkový proces idealizácie, kombinácie rôznych procesov čistej abstrakcie a procesov idealizácie.

Myšlienkový proces čistej abstrakcie spočíva v tom, že zo všetkých vlastností prislúchajúcich všetkým objektom, ktoré v daný moment uvažujeme, sa myš-

lienkovu vydeľujú niektoré vlastnosti a vo vzťahu k existencii ľubovoľných iných vlastností sa naše vedomie chová ľahostajne. Ak s takto vybranými vlastnosťami spojíme nejaký termín nepoužitý na iné ciele, dostaneme nejaký všeobecný pojem.

Myšlienkový proces idealizácie spočíva v tvorení predstáv alebo pojmov, ktoré nie sú získané iba čistou abstrakciou, ale majú aj rôzne vlastnosti od vlastností uvažovaných objektov.

Na každej etape myšlienkových procesov tohto typu východiskovými objektami tak procesu čistej abstrakcie, ako aj procesu idealizácie sú nielen tvoriace základný materiál, ale aj pojmy získané v predchádzajúcich etapách.

Systematické používanie niektorých idealizácií, ktoré vedie k riešeniu určitých úloh, môže viesť k vytvoreniu tradície, ku ktorej sa ľudia obracajú aj v tých prípadoch, keď ide o riešenie nových úloh. Jednou z takýchto tradičných idealizácií je abstrakcia aktuálnej nekonečnosti.

Časté používanie abstrakcie aktuálnej nekonečnosti v súčasnej matematike možno, podľa konštruktivismu, objasniť čiastočne tendenciou, zotrvať pri spôsoboch myslenia zodpovedajúcich klasickej logike. Predstava alebo pojem, ktorý vznikol v procese idealizácie, prechádza do „tkaniva“ matematickej teórie, ako aj logického odvodzovania. Potom vznikajú ťažkosti pri návrate od pojmov a predstáv získaných takouto cestou, k pôvodným predmetom, z ktorých vychádzali naše úvahy. A práve pri použití abstrakcie aktuálnej nekonečnosti sú tieto ťažkosti najväčšie.

Jedným z najzákladnejších pojmov klasickej matematiky je pojem množiny. Množina môže obsahovať aj nekonečne veľa prvkov, a to i rôznych stupňov, pritom sledovanie prírody nedalo ani jeden príklad nekonečného zoskupenia reálnych predmetov. V konštruktívnej matematike sa pod množinou rozumie zoskupenie takýchto individuálne zadaných objektov, z ktorých každý predstavuje zadanie konštruktívnych objektov konkrétneho typu, zapísaných vo vhodnom a presnom jazyku. Pri takto chápanom pojme množiny niet nijakého dôvodu uvažovať všetky prvky zadanej množiny ako súčasne existujúce.

Ako v klasickej, tak aj v konštruktívnej matematike sa prijíma tzv. abstrakcia potenciálnej realizovateľnosti. Spočíva v tom, že pri konštruktívnych operáciách nad konštruktívnymi objektami nevznikajú prekážky materiálneho charakteru. Pri prijatí abstrakcie potenciálnej realizovateľnosti a vychádzajúc napr. z definície prirodzených čísiel, prichádzame k idei potenciálnej nekonečnosti, t. j. k predstave o možnosti rozširovať bez obmedzenia súbor skonštruovaných prirodzených čísiel. V tomto zmysle potom možno hovoriť, že množina prirodzených čísiel je nekonečná.

Kým sa konštruktívna matematika obmedzuje na uvažovanie o množinách, individuálne zadaných už uvedenými spôsobmi, klasická matematika pripúšťa ešte jednu idealizáciu, abstrakciu aktuálnej nekonečnosti. Túto idealizáciu možno charakterizovať nasledujúcimi vlastnosťami:

a) Pripúšťa nielen možnosť existencie všetkých možných konštrukcií, ale aj súčasne existenciu výsledkov týchto operácií.

b) Na súbory všetkých týchto výsledkov sa uplatňujú pravidlá klasickej logiky.

c) Takéto súbory sa uvažujú oddelene od súboru konštruktívnych operácií.

d) Uvažujú sa nekonečné súbory objektov súčasne existujúcich, bez ohľadu na konštruktívne operácie.

V klasickej matematike nielen pojem množiny, ale aj pojem podmnožiny sa neviaže s podmienkou ustanovenia nejakých spôsobov individuálneho zadania tých objektov, ktoré obsahuje tento pojem.

Pri použití matematiky v technike a v iných oblastiach ľudskej činnosti pojem reálneho čísla vystupuje obyčajne vo funkcii prostriedku na vyjadrenie konkrétnych správ o fyzikálnych alebo iných veličinách. Pretože v matematike niet iných prostriedkov na vyjadrenie konkrétnych tvrdení o fyzikálnych veličinách okrem postupností znakov zavedených prostredníctvom konštruktívnych metód; môžu to byť iba konštruktívne objekty, ktoré sa budú uvažovať ako nositelia konkrétnych tvrdení o fyzikálnych veličinách. V klasickej matematike však leží medzi procesmi merania fyzikálnych veličín a predstavami viažúcimi sa s termínom reálneho čísla abstrakcia aktuálneho nekonečna.

Kritika klasickej logiky

Pripustenie abstrakcie aktuálnej nekonečnosti prakticky znamená pripustenie aparátu klasickej matematiky bez akýchkoľvek obmedzení. Aparát logického odvodzovania klasickej logiky je nevhodný v tých teóriách, v ktorých objektami uvažovania sú konštruktívne objekty.

Pre mnohé tvrdenia klasickej teórie reálnych čísel sa dajú nájsť blízke, pokiaľ ide o formuláciu, tvrdenia formulované a dokázateľné v rámci konštruktívnej matematiky. Súčasne však pre niektoré tvrdenia klasickej matematiky, majúce dôležité postavenie v teórii reálnych čísel, neexistujú v konštruktívnej matematike adekvátne tvrdenia. Ťažkosti sú spojené napríklad s pojmom transfinitného čísla a transfinitnej postupnosti. Často sa tieto ťažkosti týkajú celých oblastí klasickej matematiky.

Zdrojom výstavby aparátu logického odvodzovania klasickej logiky je elementárna logika spojená s uvažovaním pri týchto elementárnych podmienkach:

1. uvažované objekty tvoria pevnú konečnú postupnosť,
2. pre každý zavedený pojem možno zostrojiť charakteristickú tabuľku, ktorá určuje, ktoré objekty z uvažovaných prislúchajú danému pojmu,
3. pre každý zavedený vzťah možno zostaviť tabuľku, ktorá určuje dvojice z uvažovaných objektov, ktoré sú v danom vzťahu.

Pre úsudky formulované vzhľadom na uvedené podmienky je daná presná sémantika, existencia ktorej dáva možnosť vybudovať aparát logického odvodzovania elementárnej logiky.

V priebehu historického vývoja bol aparát logického odvodzovania, prislúchajúci elementárnej logike, mechanicky prevedený na matematické teórie narábajúce s pojmom nekonečnej množiny. Konštruktivizmus odmieta a priori pred-

pokladať, že aparát logického odvodzovania vypracovaný pre niektoré východiskové predpoklady bude prijateľný pre iné začiatkové predpoklady. Podobne obsahuje konštruktivizmus aj neprípustnosť niektorých pravidiel odvodzovania klasickej logiky. Pravidlá odvodzovania, ktoré sú odmietnuté, by mohli viesť k nepravdivým tvrdeniam. Nie všetky matematické tvrdenia o konštruktívnych objektoch, dokázané prostredníctvom pravidiel odvodzovania klasickej logiky, možno pokladať z hľadiska konštruktívnej matematiky za pravdivé.

Klasická matematika nie je teda vhodná pre vyjadrenie tých vzťahov medzi konštruktívnymi objektami, pre ktoré je vlastná ich osobitosť. Príznačky tejto nevhodnosti sú rôzne. Prvý je v tom, že súčasné uvažovanie konštruktívnych objektov a nekonštruktívnych pojmov vedie k takej situácii, pri ktorej ťažko určiť tvrdenia o konštruktívnych objektoch, dokázateľné bez použitia nekonštruktívnych pojmov.

Aj keď sme sa zaoberali predovšetkým rozdielmi medzi konštruktívnymi teóriami a teóriami klasickej matematiky, existujú také konštruktívne teórie, ktoré sa kryjú s adekvátnymi klasickými teóriami. Je to práve vtedy, ako ukázal Lifšic, keď je daná klasická teória úplná a axiomatizovateľná a v zodpovedajúcej konštruktívnej teórii sú zas pravdivé všetky tvrdenia klasickej logiky.

ИНТУИТИВИЗМ И КОНСТРУКТИВИЗМ В ОСНОВАХ МАТЕМАТИКИ

Ян Сомолани

В данной статье рассматриваются логические системы, применяемые в основах математики, в частности интуитивистский и конструктивистский подходы к логическому построению математики. Как интуитивизм, так и конструктивизм, критикуя классическую математику, прежде всего отвергают перенесение методов элементарной логики в неэлементарные ситуации, при которых, например, оперируется с бесконечными величинами. Разница между интуитивизмом и конструктивизмом заключается не столько в подходе к логике, сколько в применении понятий „конструируемости“ и „интуитивной ясности“. Значительная разработанность конструктивной математики интуитивизма в последнее время является перспективной для развития обоих этих направлений в основах математики.

INTUITIONISM AND CONSTRUCTIONISM IN THE PRINCIPLES OF MATHEMATICS

Ján Szomolányi

In this paper the logical systems used in the principles of mathematics are treated, concretely the intuitionist and constructivist approach to the logical construction of mathematics. Intuitionism as well as constructionism at the criticism of classical mathematics refuse first of all the transference of the methods of elementary logic to non-elementary situations, where e. g. the infinite quantities are treated. The difference between intuitionism and constructionism does not consist so much in the approach to logic as in the use of the notions „constructibility“ and „intuitive clarity“. A considerable recent elaboration of constructive mathematics and intuitionism gives a prospect to both of these trend in the principles of mathematics.