ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY (XIV)

PAVOL CMOREJ

Teraz pristúpime k dôkazu veľmi dôležitého tvrdenia, na základe ktorého možno dokazovanie niektorých teorém nahradiť vyvodzovaním z určitých predpokladov a tak sa presvedčiť o tom, že sú teorémy H.

T v r d e n i e 18. (*Metateoréma dedukcie*). Nech M je ľubovoľná množina formúl a A, B ľubovoľné formuly. Ak $M + \{A\} \vdash B$, tak $M \vdash A \to B$.

D ô k a z. Predpokladajme, že B je odvoditeľná z $M + \{A\}$ (je to suma množín M, $\{A\}$), to znamená, že existuje postupnosť formúl $A_1, \ldots, A_n$, ktorá je vývodom B z $M + \{A\}$. Na základe tohto predpokladu dokážeme, že pre každú formulu A_i $(1 \leqq i \leqq n)$ platí, že $M \vdash A \to A_i$, čím dokážeme aj to, že $M \vdash A \to B$, lebo $A_n = B$. Budeme postupovať tak, že najprv dokážeme, že (a) $M \vdash A \to A_1$, potom dokážeme tvrdenie, že (b) ak $M \vdash A \to A_k$ (kde k je ľubovoľné prirodzené číslo také, že $1 \leqq k < u \leqq n$), tak $M \vdash A \to A_u$. Tým vlastne dokážeme, že z M je odvoditeľná každá formula $A \to A_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, pretože podľa (a) to platí pre formulu $A \to A_1$, podľa (a) a (b) to bude platiť aj pre formulu $A \to A_2$, z čoho podľa (b) vyplýva, že to bude platiť aj pre formulu $A \to A_3, \ldots$ atď. až po formulu $A \to A_n$.

(a) Ak $i = 1$, A_1 vo vývode formuly B z $M + \{A\}$ je buď axióma alebo nejaká formula z M alebo formula A. Ak A_1 je axióma, formula $A \to A_1$ je teoréma, lebo $A_1 \to (A \to A_1)$ je axióma a keďže teoréma je odvoditeľná z každej množiny, potom $M \vdash A \to A_1$. Ak A_1 je nejaká formula z množiny M, potom existuje postupnosť, ktorá je vývodom formuly $A \to A_1$ z M, je to postupnosť $A_1 \to (A \to A_1)$, A_1, $A \to A_1$, čiže $M \vdash A \to A_1$. Ak A_1 je formula A, $A \to A_1$ je vlastne teoréma $A \to A$ (jej dôkaz sme uviedli vyššie) a keďže teorémy sú odvoditeľné z každej množiny, $M \vdash A \to A_1$. To znamená, že v každom prípade $M \vdash A \to A_1$.

(b) Predpokladajme, že $M \vdash A \to A_k$ pre ľubovoľné $k < u \leqq n$. Formula A_u vo vývode B z $M + \{A\}$ je buď axióma, nejaká formula z M, formula A alebo formula priamo odvoditeľná z nejakých formúl A_j, A_h takých, že $j, h < u$. Ak A_u je axióma, nejaká formula z M alebo formula A, potom $M \vdash A \to A_u$, čo možno dokázať podobne ako sme to urobili vyššie. Ak A_u je priamo odvoditeľná z A_j, A_h, tak $A_j = A_h \to A_u$ (alebo $A_h = A_j \to A_u$) a pretože podľa predpokladu platí, že $M \vdash A \to (A_h \to A_u)$ a $M \vdash A \to A_h$ (alebo $M \vdash A \to (A_j \to A_u)$, $M \vdash A \to A_j$), platí tiež, že $M \vdash A \to A_u$, pretože $(A \to (A_h \to A_u)) \to ((A \to A_h) \to (A \to A_u))$ (*resp.* $(A \to A_j \to A_u)) \to ((A \to A_j) \to (A \to A_u))$) je axióma. Vývod formuly $A \to A_u$ z M je postupnosť formúl, ktorú dostaneme spojením vývodu formuly $A \to A_h$ z M s vývodom formuly $A \to (A_h \to A_u)$ z M (tieto vývody podľa predpokladu existujú), ku ktorým pripojíme postupnosť formúl $(A \to (A_h \to A_u)) \to ((A \to A_h) \to (A \to A_u))$, $(A \to A_h) \to (A \to A_u)$, $A \to A_u$, bude to teda postupnosť

[131] Ak M je prázdna množina, miesto „$M \vdash F$“ budem písať „$\vdash F$“ a keďže z prázdnej množiny formúl sú odvoditeľné práve teorémy, zápisom „$\vdash F$“ budeme vyjadrovať i to, že F je teoréma.

$$\left.\begin{array}{r} \vdots \\ A\to A_h \end{array}\right] \text{— vývod formuly } A\to A_h \text{ z } M$$

$$\left.\begin{array}{r} \vdots \\ A\to(A_h\to A_u) \end{array}\right] \text{— vývod formuly } A\to(A_h\to A_u) \text{ z } M$$

$(A\to(A_h\to A_u))\to((A\to A_h)\to(A\to A_u))$
$(A\to A_h)\to(A\to A_u)$
$A\to A_u$

Metateorému dedukcie možno zovšeobecniť na tvrdenie:

T v r d e n i e 19. Nech $A_1, \ldots, A_n$, B sú ľubovoľné formuly. Ak $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$, tak $\vdash A_1\to(A_2\to \ldots \to(A_n\to B) \ldots)$.

Toto tvrdenie možno ľahko dokázať n-násobným uplatnením metateorémy dedukcie (dôkaz ponechávame čitateľovi). Tvrdenia 18 a 19 nám dovoľujú nahradiť dokazovanie formúl tvaru $A_1\to(A_2\to \ldots \to(A_n\to B) \ldots)$ odvodzovaním formuly B z množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Je to veľmi výhodné, pretože odvodzovanie môže byť jednoduchšie a ľahšie ako dokazovanie. Keďže sme už dokázali, že $A\to B$, $B\to C \vdash A\to C$, podľa tvrdenia 19 $\vdash (A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ t. j. táto formula je teoréma. Dôkaz tejto teorémy je omnoho komplikovanejší ako odvodenie formuly $A\to C$ z $\{A\to B, B\to C\}$. Podobne teraz dokážeme (f) z tvrdenia 17:

1.	$A\to(B\to C)$	PR
2.	B	PR
3.	B	PR
4.	$B\to C$	MP 1,3
5.	C	MP 2,4

Týmto vývodom sme dokázali, že $A\to(B\to C)$, B, $A \vdash C$, z čoho na základe tvrdenia 19 vyplýva, že $\vdash (A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$. Na niekoľko zaujímavých prípadov odvoditeľnosti formúl poukazuje tvrdenie 20, ktoré je presnou obdobou tvrdenia 2 a preto ho len naznačíme.

T v r d e n i e 20. Pre ľubovoľné formuly A, B, C platí, že:
. . . vety tohto tvrdenia dostaneme z viet tvrdenia 2 tak, že
znak „$\Vdash$" všade nahradíme výrazom „$\vdash$".

D ô k a z. Väčšina dôkazov je veľmi ľahká, preto uvedieme iba zložitejšie (čitateľovi sa možno podarí nájsť i jednoduchšie dôkazy).

(b)	1.	$A\to B$	PR
	2.	$\sim B$	PR
	3.	$\sim\sim A\to A$	T (d) — Tv 17
	4.	$B\to\sim\sim B$	T (e) — Tv 17
	5.	$(A\to B)\to((\sim\sim A\to A)\to(\sim\sim A\to B))$	T (b) — Tv 17
	6.	$(\sim\sim A\to A)\to(\sim\sim A\to B)$	MP 1,5
	7.	$\sim\sim A\to B$	MP 3,6

	8. $(B\to\sim\sim B)\to((A\to B)\to(A\to\sim\sim B))$	T (b) — Tv 17
	9. $(A\to B)\to(A\sim\sim B)$	MP 4,8
	10. $A\to\sim\sim B$	MP 1,9
	11. $(B\to\sim\sim B)\to((\sim\sim A\to B)\to(\sim\sim A\to\sim\sim B))$	T (b) — Tv 17
	12. $(\sim\sim A\to B)\to(\sim\sim A\to\sim\sim B)$	MP 4,11
	13. $\sim\sim A\to\sim\sim B$	MP 7,12
	14. $(\sim\sim A\to\sim\sim B)\to(\sim B\to\sim A)$	Ax 12
	15. $\sim B\to\sim A$	MP 13,14
	16. $\sim A$	MP 2,15
(h)	1. $A\vee B$	PR
	2. $\sim A$	PR
	3. $B\to(\sim A\to B)$	Ax 1
	4. $\sim A\to(A\to B)$	T (c) — Tv 17
	5. $(\sim A\to(A\to B))\to(A\to(\sim A\to B))$	T (f) — Tv 17
	6. $A\to(\sim A\to B)$	MP 4,5
	7. $(A\to(\sim A\to B))\to((B\to(\sim A\to B))\to((A\vee B)\to(\sim A\to B)))$	Ax 8
	8. $(B\to(\sim A\to B))\to((A\vee B)\to(\sim A\to B))$	MP 6,7
	9. $A\vee B\to(\sim A\to B)$	MP 3,8
	10. $\sim A\to B$	MP 1,9
	11. B	MP 2,10

Okrem (a) všetky vety tvrdenia 20 sú vlastne *odvodené* odvodzovacie pravidlá, ktoré môžeme používať pri konštrukcii ďalších dôkazov a vývodov. Veta (a) je základné odvodzovacie pravidlo systému H. Na základe každej teorémy tvaru $A_1\to(A_2\to\ldots\to(A_n\to B)\ldots)$ $(n\geqq 1)$ možno veľmi ľahko dokázať tieto odvodené odvodzovacie pravidlá:[132]

$$A_1 \vdash A_2\to(A_3\to\ldots\to(A_n\to B)\ldots)$$
$$A_1, A_2 \vdash A_3\to(A_4\to\ldots\to(A_n\to B)\ldots)$$
$$\vdots$$
$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n\to B$$
$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

Na mnoho zaujímavých vlastností odvoditeľnosti analogických vlastnostiam výrokovologického vyplývania, o ktorých sme sa zmienili v tvrdení 4, poukazuje toto tvrdenie:

T v r d e n i e 21. ...ako tvrdenie 4, len miesto „$\Vdash$" všade je výraz „$\vdash$".

Pre nedostatok miesta musíme upustiť od dokazovania viet tohto tvrdenia. Väčšina dôkazov je pomerne jednoduchá, (f) sme už dokázali, je to len iná formulácia metateorémy dedukcie. O ďalších vlastnostiach odvoditeľnosti vyplývajúcich z df. 15 hovorí nasledujúce tvrdenie, dôkaz ktorého pre jeho jednoduchosť tiež vynechávame.

---

[132] Za odvodzovacie pravidlá možno pokladať i metatvrdenia formy „$\vdash A$". Tieto pravidlá nám dovoľujú z ľubovoľnej množiny premís (vrátane prázdnej) odvodiť formulu tvaru A. Ak A je axióma, pravidlo „$\vdash A$" je základné, ak A je teoréma, ktorá nie je axiómou „$\vdash A$" je odvodené odvodzovacie pravidlo.

T v r d e n i e 22. Pre ľubovoľné formuly $A, A_1, \ldots, A_n, B, B_1, \ldots, B_m, C$ platí, že

(a) $A \vdash A$
(b) Ak $A_1, A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$, tak $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$
(c) Ak $A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n \vdash B$, tak
$A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, A_k, A_{k+2}, \ldots, A_n \vdash B$
(d) Ak $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ a $A, B_1, \ldots, B_m \vdash C$, *tak*
$A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \vdash C$ (kde $m \geqq 0$)

Vlastnosti odvoditeľnosti uvedené v obidvoch posledných tvrdeniach prvý systematický skúmal nemecký matematik a logik G. Gentzen.

9.2 **Ekvivalentnosť formúl v H.** Sémantickej relácii výrokovologickej rovnocennosti medzi formulami zodpovedá syntaktická relácia ekvivalentnosti.

D e f i n í c i a 16. Nech A, B sú ľubovoľné formuly H. Budeme hovoriť, že formula A je ekvivalentná s B v H (symbolicky: $A \dashv\vdash_H B$) vtedy a len vtedy, keď $\vdash A \leftrightarrow B$ (t. j. keď formula tvaru $A \leftrightarrow B$ je teoréma H).[133]

Symbol „H" vo výraze „$A \dashv\vdash_H B$" budeme obyčajne vynechávať (mlčky predpokladajúc, že ide o ekvivalentnosť v systéme H). Podľa df. 16 za ekvivalentné považujeme práve tie formuly A, B, ekvivalencia ktorých je teorémou H. To znamená, že ak formula $A \leftrightarrow B$ je v systéme H nedokázateľná, formuly A, B nie sú ekvivalentné.[134] Je zrejmé, že $A \dashv\vdash B$ práve vtedy, keď $A \vdash B$ a $B \vdash A$. Pretože ak $A \dashv\vdash B$, tak $\vdash A \leftrightarrow B$ a z toho vyplýva, že $\vdash A \to B$ a $\vdash B \to A$ (lebo formuly tvaru $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$, $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$ sú axiómy). Lenže ak formuly $A \to B$, $B \to A$ sú teorémy, z $\{A\}$ je odvoditeľná formula B a z $\{B\}$ formula A, teda $A \vdash B$ *a* $B \vdash A$. Na druhej strane, ak $A \vdash B$ *a* $B \vdash A$, tak podľa metateorémy dedukcie $\vdash A \to B$ a $\vdash B \to A$. A keďže $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$ je axióma, aj $A \leftrightarrow B$ je teoréma, čiže $A \dashv\vdash B$.

V tvrdení 23 poukážeme na niektoré dôležité prípady ekvivalentnosti formúl v H.

T v r d e n i e 23. Pre ľubovoľné formuly A, B, C a ľubovoľnú teorému F v H platí, že: ... vety tohto tvrdenia dostaneme z viet tvrdenia 6 nahradením znaku „$\dashv\Vdash$" výrazom „$\dashv\vdash$".

D ô k a z. Nemôžeme tu uviesť dôkazy všetkých viet tohto tvrdenia, zabralo by to príliš veľa miesta. Na ukážku dokážeme len niekoľko ťažších viet, ostatné dôkazy nech sa čitateľ pokúsi urobiť samostatne. Pri dokazovaní vety tvaru „$A \dashv\vdash B$" (ktorá platí do metajazyka systému H) môžeme postupovať buť tak, že dokážeme, že $\vdash A \to B$ a $\vdash B \to A$, z čoho vyplýva, že $\vdash A \leftrightarrow B$, t. j. že $A \dashv\vdash B$ (lebo každá formula tvaru $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$ je axióma) alebo tak, že dokážeme, že $A \vdash B$ a $B \vdash A$, z čoho tiež vyplýva, ako sme ukázali vyššie, že $A \dashv\vdash B$. Aby sme tieto dôkazy patrične skrátili, okrem iných použijeme aj tieto odvodené odvodzovacie pravidlá:

$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$	TR
$A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$	ZA
$A \to B,\ A \to C \vdash A \to B \wedge C$	ZK_k

[133] pozri pozn. 131.
[134] Neskôr dokážeme tvrdenie, z ktorého vyplýva, že ľubovoľná formula A je ekvivalentná s B práve vtedy, keď A je výrokovologicky rovnocenná formule B.

Prvé sa nazýva pravidlom tranzitívnosti implikácie, druhé pravidlom zámeny antecedentov a tretie pravidlom zavedenia konjunkcie do konzekventa — tým je daná voľba skratiek uvedených vpravo od príslušných pravidiel. TR sme už dokázali (v 9.1), ZA možno zdôvodniť na základe teorémy (f) z Tv 17, ľahký dôkaz ZK_k ponecháme čitateľovi.

Pre skrátenie budeme pravidlo MP používať i viackrát naraz, pričom zapíšeme len konečný výsledok niekoľkonásobného použitia tohto pravidla. Skratkou „MD" budeme označovať riadok získaný použitím metateorémy dedukcie. Poradie, v ktorom je výhodné dokazovať vety tvrdenia 23 nezodpovedá celkom poradiu, v ktorom sú uvedené.[135] Najprv dokážeme vetu (u), z ktorej získame dve odvodené odvodzovacie pravidlá, ktoré budeme potrebovať pri konštrukcii ďalších dôkazov.

(u)	1. $A \wedge B \to C$	PR
	2. A	PR
	3. B	PR
	4. $A \to (B \to (A \wedge B))$	Ax 5
	5. $A \wedge B$	MP 4,2,3
	6. C	MP 1,5
	7. $A \wedge B \to C, A, B \vdash C$	1 — 6
	8. $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$	MD 7

Uvedená postupnosť nie je schémou vývodov, v 7. a 8. riadku sa totiž vyskytujú metajazykové tvrdenia o odvoditeľnosti formúl (a nie púhe schémy formúl). Vývodovú schému tvoria iba riadky 1. — 6., na základe konštrukcie tejto schémy sa v 7. riadku konštatuje, že ľubovoľná formula C je odvoditeľná z formúl $A \wedge B \to C$, A, B, z čoho pomocou MD dostávame posledný riadok. Pravidlo uvedené v poslednom riadku budeme neskôr používať, pričom sa budeme odvolávať na (u) — Tv 23.

1. $A \to (B \to C)$	PR
2. $A \wedge B$	PR
3. $A \wedge B \to A$	Ax 3
4. $A \wedge B \to B$	Ax 4
5. A	MP 2,3
6. B	MP 2,4
7. $B \to C$	MP 1,3
8. C	MP 4,5
9. $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash C$	1 — 6
10. $A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$	MD 7

V poslednom riadku sa vyskytuje pravidlo, na ktoré sa budeme tiež odvolávať ako na (u) — Tv 23. Dôkaz (u) je veľmi jednoduchý, uviedli sme ho len na ilustráciu určitého spôsobu dokazovania tvrdení o ekvivalentnosti formúl v H. Je zrejmé, že z každej vety tvaru „$A \dashv\vdash B$" možno získať odvodené odvodzovacie pravidlá „$A \vdash B$", „$B \vdash A$" (to, že $A \dashv\vdash B$ práve vtedy, keď $A \vdash B$ a $B \vdash A$, sme dokázali vyššie).

[135] Toto poradie je podmienené poradím viet tvrdenia 6. V tvrdení 23 by bolo vhodné uviesť jednotlivé vety (a) — (u) v tom poradí, v akom sa tu dokazujú, pre nedostatok miesta sme však od toho radšej upustili.

(k)	1. $C \to B \vee C$	Ax 7
	2. $B \vee C \to A \vee (B \vee C)$	Ax 7
	3. $C \to A \vee (B \vee C)$	TR 1,2
	4. $A \to A \vee (B \vee C)$	Ax 6
	5. $B \to B \vee C$	Ax 6
	6. $B \vee C \to A \vee (B \vee C)$	Ax 7
	7. $B \to A \vee (B \vee C)$	TR 5,6
	8. $4 \to (7 \to (A \vee B \to A \vee (B \vee C)))$	Ax 8
	9. $A \vee B \to A \vee (B \vee C)$	MP 4,7,8
	10. $9 \to (3 \to ((A \vee B) \vee C \to A \vee (B \vee C)))$	Ax 8
	11. $(A \vee B) \vee C \to A \vee (B \vee C)$	MP 9,3,10

Postupnosť 1 — 11 je skráteným dôkazom implikácie 11, teraz dokážeme, že $\vdash A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$

1. $A \to A \vee B$	Ax 6
2. $A \vee B \to (A \vee B) \vee C$	Ax 6
3. $A \to (A \vee B) \vee C$	TR 1,2
4. $B \to A \vee B$	Ax 7
5. $B \to (A \vee B) \vee C$	TR 4,2
6. $C \to (A \vee B) \vee C$	Ax 7
7. $5 \to (6 \to (B \vee C \to (A \vee B) \vee C))$	Ax 8
8. $B \vee C \to (A \vee B) \vee C$	MP 5,6,7
9. $3 \to (8 \to (A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C))$	Ax 8
10. $A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$	MP 3,8,9

Teda ak $\vdash A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$ a $\vdash (A \vee B) \vee C \to A \vee (B \vee C)$, *tak tiež* $\vdash A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (lebo $A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C \to (((A \vee B) \vee C \to A \vee (B \vee C)) \to (A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C))$ je axióma), t. j. $A \vee (B \vee C) \dashv\vdash (A \vee B) \vee C$.

(m)	1. $(A \wedge B) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	Ax 6
	2. $A \to (B \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$	(u) 1
	3. $B \to (A \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$	ZA 2
	4. $(A \wedge C) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	Ax 7
	5. $A \to (C \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$	(u) 4
	6. $C \to (A \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$	ZA 5
	7. $3 \to (6 \to ((B \vee C) \to (A \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))))$	Ax 8
	8. $(B \vee C) \to (A \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$	MP 7, 3, 6
	9. $A \to ((B \vee C) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$	ZA 8
	10. $(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	(u) 9

1. $A \wedge B \to A$	Ax 3
2. $A \wedge B \to B$	Ax 4
3. $B \to B \vee C$	Ax 6
4. $A \wedge B \to B \vee C$	TR 2,3
5. $A \wedge C \to A$	Ax 3
6. $A \wedge C \to C$	Ax 4
7. $C \to B \vee C$	Ax 7
8. $A \wedge C \to B \vee C$	TR 6,7
9. $A \wedge B \to A \wedge (B \vee C)$	ZK_k 1,4
10. $A \wedge C \to A \wedge (B \vee C)$	ZK_k 5,8

	11. $9 \to (10 \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)))$	Ax 8
	12. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$	MP 11, 9, 10
(n)	1. $A \to A \vee B$	Ax 6
	2. $A \to A \vee C$	Ax 6
	3. $B \wedge C \to B$	Ax 3
	4. $B \wedge C \to C$	Ax 4
	5. $B \to A \vee B$	Ax 7
	6. $C \to A \vee C$	Ax 7
	7. $B \wedge C \to A \vee B$	TR 3,5
	8. $B \wedge C \to A \vee C$	TR 4,6
	9. $B \wedge C \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	ZK_k *7,8*
	10. $A \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	ZK_k *1,2*
	11. $10 \to (9 \to (A \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)))$	Ax 8
	12. $A \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	MP 11, 10, 9

1. $A \to A \vee (B \wedge C)$	Ax 3
2. $B \wedge C \to A \vee (B \wedge C)$	Ax 4
3. $B \to (C \to A \vee (B \wedge C))$	(u) 2
4. $1 \to (B \to 1)$	Ax 1
5. $B \to (A \to A \vee (B \wedge C))$	MP 1, 4
6. $C \to (B \to A \vee (B \wedge C))$	ZA 3
7. $A \to (B \to A \vee (B \wedge C))$	ZA 5
8. $7 \to (6 \to (A \vee C \to (B \to A \vee (B \wedge C))))$	Ax 8
9. $A \vee C \to (B \to A \vee (B \wedge C))$	MP 8, 7, 6
10. $B \to (A \vee C \to A \vee (B \wedge C))$	ZA 9
11. $1 \to (A \vee C \to 1)$	Ax 1
12. $A \vee C \to (A \to A \vee (B \wedge C))$	MP 1, 11
13. $A \to (A \vee C \to A \vee (B \wedge C))$	ZA 12
14. $13 \to (10 \to (A \vee B \to (A \vee C \to A \vee (B \wedge C))))$	Ax 8
15. $A \vee B \to (A \vee C \to A \vee (B \wedge C))$	MP 14, 13, 10
16. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \to A \vee (B \wedge C)$	(u) 15

Z vety (b) tvrdenia 20 na základe MD dostávame pravidlo $A \to B \vdash \sim B \to \sim A$, na ktoré sa budeme odvolávať skratkou „PT" (pravidlo transpozície).

(o)	1. $A \wedge B \to A$	Ax 3
	2. $A \wedge B \to B$	Ax 4
	3. $\sim A \to \sim (A \wedge B)$	PT 1
	4. $\sim B \to \sim (A \wedge B)$	PT 2
	5. $3 \to (4 \to (\sim A \vee \sim B \to \sim (A \wedge B)))$	Ax 8
	6. $(\sim A \vee \sim B) \to \sim (A \wedge B)$	MP 5, 3, 4
	7. $\sim\sim (A \wedge B) \to \sim (\sim A \vee \sim B)$	PT 6
	8. $(A \wedge B) \to \sim\sim (A \wedge B)$	T (e) — Tv 17
	9. $A \wedge B \to \sim (\sim A \vee \sim B)$	TR 8, 7

1. $\sim A \to \sim A \vee \sim B$	Ax 6
2. $\sim B \to \sim A \vee \sim B$	Ax 7
3. $\sim (\sim A \vee \sim B) \to \sim\sim A$	PT 1
4. $\sim (\sim A \vee \sim B) \to \sim\sim B$	PT 2
5. $\sim\sim A \to A$	T (d) — Tv 17
6. $\sim\sim B \to B$	T (d) — Tv 17

7. $\sim(\sim A \vee \sim B) \to A$ TR 3,5
8. $\sim(\sim A \vee \sim B) \to B$ TR 4,6
9. $\sim(\sim A \vee \sim B) \to (A \wedge B)$ ZK$_k$ 7,8

(p) 1. $\sim A \wedge \sim B \to \sim A$ Ax 3
2. $\sim A \wedge \sim B \to \sim B$ Ax 4
3. $\sim\sim A \to \sim(\sim A \wedge \sim B)$ PT 1
4. $\sim\sim B \to \sim(\sim A \wedge \sim B)$ PT 2
5. $A \to \sim\sim A$ T (e) — Tv 17
6. $B \to \sim\sim B$ T (e) — Tv 17
7. $A \to \sim(\sim A \wedge \sim B)$ TR 5,3
8. $B \to \sim(\sim A \wedge \sim B)$ TR 6,4
9. $7 \to (8 \to (A \vee B \to \sim(\sim A \wedge \sim B)))$ Ax 8
10. $A \vee B \to \sim(\sim A \wedge \sim B)$ MP 9,7,6

1. $A \to A \vee B$ Ax 6
2. $\sim(A \vee B) \to \sim A$ PT 1
3. $B \to A \vee B$ Ax 7
4. $\sim(A \vee B) \to \sim B$ PT 3
5. $\sim(A \vee B) \to (\sim A \wedge \sim B)$ ZK$_k$ 2,4
6. $\sim(\sim A \wedge \sim B) \to \sim\sim(A \vee B)$ PT 5
7. $\sim\sim(A \vee B) \to (A \vee B)$ T (d) — Tv 17
8. $\sim(\sim A \wedge \sim) \to (A \vee B)$ TR 6,7

T v r d e n i e 24. Pre každú formulu A, B, C platí, že
(a) $A \dashv\vdash A$
(b) Ak $A \dashv\vdash B$, tak $B \dashv\vdash A$
(c) Ak $A \dashv\vdash B$ a $B \dashv\vdash C$, tak $A \dashv\vdash C$

D ô k a z. Stačí dokázať, že každá formula tvaru (i), (ii) alebo (iii) je teoréma H:

(i) $A \leftrightarrow A$
(ii) $(A \leftrightarrow B) \to (B \leftrightarrow A)$
(iii) $(A \leftrightarrow B) \to ((B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C))$

Dôkazy týchto formúl ponechávame čitateľovi. Je zrejmé, že ak pre každú formulu A platí, že $\vdash A \leftrightarrow A$, tak $A \dashv\vdash A$. Ak $A \dashv\vdash B$, tak $\vdash A \leftrightarrow B$ a pretože $(A \leftrightarrow B) \to (B \leftrightarrow A)$ je teoréma i $\vdash B \leftrightarrow A$, t. j. $B \dashv\vdash A$. Ak $A \dashv\vdash B$ a $B \dashv\vdash C$, tak $\vdash A \leftrightarrow B$ a $\vdash B \leftrightarrow C$ a keďže (iii) je tiež teoréma, aj $A \leftrightarrow C$ je teoréma a teda $A \dashv\vdash C$.

T v r d e n i e 25. Pre každú formulu $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 3)$ platí, že ak $A_1 \dashv\vdash A_2$ a $A_2 \dashv\vdash A_3$ a ... a $A_{n-1} \dashv\vdash A_n$, tak $A_1 \dashv\vdash A_n$.

Dôkaz tohto tvrdenia je podobný dôkazu tvrdenia 9 (v prípade $n = 3$ sa opierame o vetu (c) z tvrdenia 24).

Možno tiež dokázať syntatickú analógiu tvrdenia 10 i tieto ekvivalentnosti:

$\sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \dashv\vdash \sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n$
$\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \dashv\vdash \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n$,

kde $n \geqq 1$. K významným tvrdeniam o ekvivalentnosti v H patrí nasledujúce tvrdenie o nahraditeľnosti ekvivalentných formúl.

T v r d e n i e 26. Nech A, B, C sú ľubovoľné formuly. Ak $A \dashv\vdash B$, tak $C \dashv\vdash C[A/B]$.

Dôkaz tohto tvrdenia je podobný dôkazu tvrdenia 11 (pravda, namiesto výrokovologickej rovnocennosti všade uvažujeme o ekvivalentnosti v H). V bode (ii) tohto dôkazu vychádzame z toho, že

(a) $\vdash(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\sim A\leftrightarrow\sim B)$
(b) $\vdash(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\leftrightarrow D)\rightarrow(A\wedge C\leftrightarrow B\wedge D))$
(c) $\vdash(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\leftrightarrow D)\rightarrow(A\vee C\leftrightarrow B\vee D))$
(d) $\vdash(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\leftrightarrow D)\rightarrow((A\rightarrow C)\leftrightarrow(B\rightarrow D)))$
(e) $\vdash(A\leftrightarrow B)\rightarrow((C\leftrightarrow D)\rightarrow((A\leftrightarrow C)\leftrightarrow(B\leftrightarrow D)))$

Dôkazy teorém (a) — (e) i dôkladnejšie rozvedenie dôkazu tvrdenia 26 musíme prenechať čitateľovi.

Ak $A\dashv\vdash B$ a C je teoréma, aj $C[A/B]$ je tiež teoréma, pretože podľa tvrdenia 26 $C\dashv\vdash C[A/B]$, čiže $\vdash C\leftrightarrow C[A/B]$ a $\vdash C$ ako aj $\vdash(C\leftrightarrow C[A/B])\rightarrow\rightarrow(C\rightarrow C[A/B])$. To znamená, že nahradením nejakých podformúl v teoréme C ekvivalentnými formulami získame zasa teorému.

Dá sa dokázať, že ku každej formule A existuje taká formula B, ktorá má k. n. f. a $A\dashv\vdash B$, ako aj to, že každá formula v k. n. f., ktorá v každej elementárnej disjunkcii obsahuje nejakú premennú C a zároveň $\sim C$, je teoréma H. Z toho vyplýva, že každá tautológia je teoréma, lebo ak nejaká formula A je tautológia, existuje taká formula B v k. n. f., že $A\dashv\vdash B$ a B obsahuje v každej elementárnej disjunkcii nejakú premennú C a zároveň $\sim C$ (pozri tvrdenie 16), z čoho vyplýva, že B je teoréma. No ak $A\dashv\vdash B$ a $\vdash B$, tak aj A je teoréma, pretože $\vdash A\leftrightarrow B$ (čo vyplýva z predpokladu, že $A\dashv\vdash B$) a $\vdash(A\leftrightarrow B)\rightarrow(B\rightarrow A)$.

9.3 *Iné axiomatické systémy.* Z axiomatického systému H možno zámenou niektorých schém axióm inými schémami alebo vynechaním niektorých schém získať mnoho iných systémov s rôznymi zaujímavými vlastnosťami. Výroková logika (resp. výrokový kalkul) založená len na schémach. 1—11 sa nazýva *pozitívnou* výrokovou logikou (kalkulom). Vyznačuje sa tým, že v nej sa nedajú dokázať teorémy, v ktorých sa vyskytuje negátor. Keď schému 12 nahradíme schémami

$(A\rightarrow\sim A)\rightarrow\sim A$
$\sim A\rightarrow(A\rightarrow B)$

dostaneme tzv. *intuicionistickú* výrokovú logiku (kalkul), v ktorej je nedokázateľný zákon vylúčenia tretieho (žiadna formula formy $\sim A\vee A$) a tie teorémy H, ktoré sa nedajú dokázať bez tohto zákona.

Keď schému 12 nahradíme schémou

$(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\sim B)\rightarrow\sim A)$,

dostaneme tzv. *Johanssonovu minimálnu* výrokovú logiku (kalkul), v ktorej sú nedokázateľné aj rôzne iné teorémy H (napr. okrem zákona vylúčenia tretieho ani teorémy tvaru $\sim A\rightarrow(A\rightarrow B)$) obsahujúce negátor. Systém H sa niekedy nazýva *klasickou* výrokovou logikou, pre ktorú je charakteristické to, že v nej možno dokázať každú formulu (v zmysle df. 1) výrokovej logiky, ktorá je tautológia.

*

Týmto pokračovaním ukončil autor uverejňovanie svojho *Úvodu do formálnej logiky* v našom časopise. Záujemcov upozorňujeme, že P. Cmorej pripravuje knižné vydanie *Úvodu do formálnej logiky,* ktoré bude rozšírené o ďalšie časti.

Red.