PAVEL CMOREJ

XIII

§ 9. Axiomatický systém výrokovej logiky

Niektorým čitateľom, ktorí ešte nestratili trpezlivosť a dostali sa až k tomuto pokračovaniu sa možno bude zdať, že sme v našom výklade príliš odbočili, že sme stratili zo zreteľa cieľ nášho výkladu — pravidlá správneho usudzovania, ktoré sú, ako sme uviedli v § 3, prvoradým predmetom skúmania formálnej logiky. Toto odbočenie je však len zdanlivé. Problematika pravidiel správneho usudzovania sa dá v modernej logike rozvíjať niekoľkými spôsobmi. Keďže úsudkové pravidlo

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \mid B$$

je správne, resp. deduktívne práve vtedy, keď výroková forma B logicky (alebo aspoň výrokovologicky) vyplýva z výrokových foriem A_1. A_2 ... ..., A_n, problém správnosti úsudkových pravidiel je vlastne problémom logického vyplývania. A tento problém možno vo výrokovej logike (neskôr ukážeme, že i v predikátovej) transformovať na problém, či formula tvaru $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ (prípadne iného tvaru, pozri tvrdenie 7) je tautológia. Preto väčšina výkladov modernej logiky sústreďuje svoju pozornosť na tautológie a na hľadanie rôznych syntaktických metód, pomocou ktorých by bolo možné o ľubovoľnej formule zistiť, či je tautológia (nehovoriac o tom, že tautológie ako formy logicky pravdivých výrokov, t. j. pravdivých v dôsledku ich logickej štruktúry, i samy osebe predstavujú zaujímavý predmet skúmania). Poznáme už dve metódy zisťovania tautológií: tabuľkovú metódu a transformáciu na k.n.f. Obidve sú efektívne, prvá je sémantická, druhá syntaktická, ale i tabuľkovej metóde možno bez väčších ťažkostí a komplikácií dať syntaktickú podobu (napr. zavedením symbolov pravdivostných hodnôt do jazyka výrokovej logiky a pravidla substitúcie do jej metajazyka). Efektívnosť týchto metód spočíva v tom, že pomocou nich môžeme v *konečnom počte krokov mechanicky* zistiť, či daná formula je tautológia. Existujú však aj syntaktické metódy, ktoré nie sú efektívne.[125] Patrí k nim napr. dokazovanie tautológií. Dokazovanie nejakej tautológie F je konštrukcia určitej postupnosti formúl $F_1, \ldots, F_n$ $(n \geqq 1)$ na základe rýdzo syntaktických pravidiel a inštrukcií, ktoré určujú, aké formuly (akého tvaru) môžu byť prvkami postupnosti $F_1, \ldots, F_n$ a aká má byť syntaktická stavba tejto postupnosti, ktorá sa nazýva *dôkazom* formuly F. Dokazovanie nie je efektívnou procedúrou, lebo na základe spomenutých pravidiel nemožno čisto mechanicky skonštruovať dôkaz dokázateľnej formuly ani ukázať, že daná formula je nedokázateľná (a ak aj je dokázateľná, nemožno jej dôkaz skonštruovať mechanicky), hoci o ľubovoľnej konečnej postupnosti (už skonštruovanej) môžeme efektívne rozhodnúť, či je dôkazom danej formuly.[126] Aby

---

125 Ich používanie nie je však vo výrokovej logike nevyhnutné.

126 Hoci samo dokazovanie nie je efektívnou procedúrou, existujú procedúry, pomocou ktorých možno efektívne rozhodnúť, či ľubovoľná daná formula je dokázateľná.

tieto pravidlá splnili svoj účel, aby sa mohli stať prostriedkom na budovanie systému *tautológií,* musia byť konštruované tak, aby sa pomocou nich dali dokázať iba tie formuly, ktoré sú tautológie.

Vzhľadom k tomu, že výroková logika disponuje veľmi jednoduchými efektívnymi prostriedkami a metódami na zisťovanie tautológií, axiomatická metóda je v nej v určitom zmysle nadbytočná. Napriek tomu jej tu mienime venovať určitú pozornosť, aby sme čitateľa aspoň letmo oboznámili s technikou dokazovania tautológií výrokovej logiky, tým skôr, že v predikátovej logike je táto metóda nepostrádateľná, pretože tam neexistuje nijaká efektívna meóda, pomocou ktorej by sme o ľubovoľnej formule mohli rozhodnúť, či je tautológia.[127]

Pri výstavbe nejakého axiomatického systému výrokovej logiky postupujeme tak, že

1. najprv zostavíme zoznam primitívnych symbolov tohto systému, potom
2. vymedzíme množinu správne utvorených výrazov, t. j. formúl a určíme
3. množinu axióm,
4. pravidlá, pomocou ktorých sa z daných formúl odvodzujú iné formuly (týmito pravidlami, ktoré sa niekedy nazývajú *základnými* odvodzovacími pravidlami alebo *pravidlami priameho odvodzovania,* je určený pojem *priamej odvoditeľnosti* v danom axiomatickom systéme),
5. pojem dôkazu v tomto systéme.

Systém určený podmienkami 1—5 sa nazýva *výrokovým kalkulom* (počtom) alebo kalkulom výrokovej logiky.

ad 1. Medzi primitívnymi symbolmi sa spravidla vyskytujú výrokové premenné, výrokové spojky a zátvorky. Nie v každom systéme sa medzi primitívnymi symbolmi nachádzajú všetky spojky, ktorými sme sa tu bližšie zaoberali alebo sa o nich aspoň zmienili (pozri § 4). Existujú systémy, v ktorých sa medzi primitívnymi symbolmi vyskytuje len jedna dvojargumentová spojka, v iných dve (spravidla jedna dvojargumentová a negátor) alebo i viacej z dvadsiatich možných spojok, ostatné spojky sa v prípade potreby zavádzajú pomocou definícií (pravda, ak sú pomocou primitívnych spojok definovateľné). V niektorých systémoch sa vôbec nevyskytujú zátvorky.

ad 2. Vymedzenie množiny formúl sa obyčajne veľmi podobá našej df. 1. Môže sa od nej líšiť tým, že zavádza aj formuly iného tvaru ako df. 1 (s inými spojkami) alebo tým, že niektoré druhy formúl v zmysle df. 1 vôbec nezavádza, prípadne ich nahrádza inými druhmi formúl s inými spojkami. Tieto odlišnosti závisia výlučne od toho, ktoré spojky sú zavedené ako primitívne. V niektorých vymedzeniach sa zavádza iný spôsob zátvorkovania formúl ako v def. 1, napr. miesto $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ atď. sa za formuly pokladajú výrazy $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$ a pod. V systémoch, v ktorých sa nenachádzajú zátvorky, namiesto $(\sim A)$, $(A \wedge B)$ ... formulami sú výrazy $\sim A$, $\wedge AB$, $\vee AB$, ... Členenie týchto formúl je dané výlučne poradím primitívnych symbolov. Spojka sa v nich nenachádza vždy pred svojimi argumentami. Keďže miesto $p \rightarrow q$ *a* $\sim q \rightarrow \sim p$ tu píšeme →pg, →~g~g, formula $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$, v ktorej argumentami druhého výskytu implikátora sú formuly $(p \rightarrow q)$, $(\sim q \rightarrow \sim p)$, vyzerá v bezzátvorkovom zá-

---

[127] Nie v tom zmysle, že ju ešte nikto neobjavil, ale v tom, že je principiálne nemožná.

pise takto: $\rightarrow\rightarrow pq \rightarrow \sim q \sim p$. Keďže zložitejšie formuly sú v bezzátvorkovom zápise dosť neprehľadné, dnes sa tento zápis používa pomerne zriedkavo.

ad 3. Množina axióm môže byť konečná alebo nekonečná, avšak v obidvoch prípadoch musí byť určená tak, aby o ľubovoľnej formule bolo možné efektívne rozhodnúť, či je axióma. Ak je konečná, môžeme ju určiť tak, že jednoducho uvedieme všetky formuly, ktoré sú axiómy. Nekonečnú množinu axióm vymedzujeme pomocou konečného množstva metajazykových schém, z ktorých každá predstavuje nekonečnú množinu axióm určitej štruktúry danej stavbou tejto schémy. Každá primitívna výroková spojka sa musí vyskytovať aspoň v jednej axióme. Keďže nám ide o výstavbu axiomatického systému *tautológií*, axiómami môžu byť len tautológie.

ad 4. V systémoch výrokovej logiky s konečným počtom axióm sa *ako základné* obyčajne používajú dve odvodzovacie pravidlá:

(i) pravidlo odlúčenia (modus ponens),

(ii) pravidlo substitúcie (dosadenia).

Podľa *pravidla odlúčenia* z ľubovoľných dvoch formúl tvaru $A \rightarrow B$, A je priamo odvoditeľná formula B.

Predpokladajme, že B, C sú ľubovoľné formuly, A výroková premenná vyskytujúca sa v C a $C(A/B)$ formula, ktorú dostaneme z formuly C tak, že každý výskyt premennej A v C nahradíme formulou B. Podľa *pravidla substitúcie* z ľubovoľnej formuly C je priamo odvoditeľná formula $C(A/B)$.

Okrem základných odvodzovacích pravidiel sa často používajú i *odvodené odvodzovacie pravidlá*, hoci sú teoreticky zbytočné, pretože každá formula, ktorú možno pomocou nich dokázať alebo odvodiť, dá sa dokázať či odvodiť len na základe základných odvodzovacích pravidiel. Odvodené pravidlá sa používajú najmä pre zjednodušovanie a skracovanie dokazovania a odvodzovania.

Dá sa dokázať, že pomocou pravidla odlúčenia a substitúcie možno z tautológií získať len tautológie. Syntaktický ráz týchto pravidiel je očividný.

V systémoch s nekonečným počtom axióm, daných metajazykovými schémami, obyčajne sa používa len pravidlo odlúčenia. Každá formula, ktorú možno v systéme s konečným počtom axióm odvodiť z nejakej axiómy pomocou pravidla substitúcie, patrí v systéme s nekonečným počtom axióm medzi axiómy. Každá metajazyková schéma axióm predstavuje totiž nekonečnú množinu formúl, ktoré možno získať z najjednoduchšej formuly príslušnej štruktúry pomocou pravidla substitúcie.

Jestvujú systémy, v ktorých sa používajú aj iné pravidlá priameho odvodzovania. Ich výber je podmienený rôznymi okolnosťami, závisí od zvolených axióm, od výberu primitívnych spojok atď.

ad 5. Dôkazom nejakej formuly F v axiomatickom systéme výrokovej logiky je ľubovoľná postupnosť (rad) formúl $F_1, \ldots, F_n$ $(n \geqq 1)$, v ktorej pre každú formulu F_i $(1 \leqq i \leqq n)$ platí, že F_i je axióma alebo formula priamo odvoditeľná z predchádzajúcich formúl tejto postupnosti, pričom $F_n = F$.

9.1 *Dokázateľnosť a odvoditeľnosť v systéme H.* Axiomatický systém výrokovej logiky, s ktorým tu čitateľa oboznámime je určitou modifikáciou systému nemeckého matematika D. Hilberta, a preto ho budeme označovať symbolom „H".[128]

---

[128] V pôvodnom Hilbertovom systéme je len konečné množstvo axióm a preto sa v ňom používa (na rozdiel od systému, ktorý rozvinieme nižšie) aj pravidlo substitúcie.

Primitívnymi symbolmi a formulami v H sú symboly a formuly uvedené v § 5. Pre formuláciu rôznych definícií a tvrdení, týkajúcich sa syntaktických a sémantických vlastností a vzťahov medzi formulami H budeme i naďalej používať metajazyk M_{VL}. Množina axióm v H je nekonečná, presne ju určuje táto definícia:

D e f i n í c i a 11. Nech A, B, C sú ľubovoľné formuly H. Ľubovoľná formula je axióma H vtedy a len vtedy, keď má tvar niektorej z týchto schém:

I

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

II

3. $(A \wedge B) \rightarrow A$
4. $(A \wedge B) \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

III

6. $A \rightarrow (A \vee B)$
7. $B \rightarrow (A \vee B)$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

IV

9. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
10. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
11. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$

V

12. $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

V uvedenej definícii sme množinu axióm rozdelili na päť skupín. Do prvej skupiny patria axiómy, v ktorých sa vyskytuje len implikátor, v axiómach druhej skupiny len implikátor a konjuktor, v axiómach tretej skupiny len implikátor a disjunktor atď.

V systéme H budeme používať iba jedno základné odvodzovacie pravidlo: pravidlo odlúčenia, ktoré vymedzuje df. 12.

D e f i n í c i a 12. Nech M je ľubovoľná množina formúl. Formula F je p r i a m o o d v o d i t e ľ n á z množiny M v H vtedy a len vtedy, keď existuje formula A taká, že $M = \{A \rightarrow F, A\}$ alebo existuje množina N taká, že $N \subseteq M$ a $N = \{A \rightarrow F, A\}$ (budeme tiež hovoriť, že formula F je priamo odvoditeľná z formúl $A \rightarrow F$, A).

Pomocou pojmu priamej odvoditeľnosti vymedzíme pojem dôkazu.

D e f i n í c i a 13. Postupnosť (rad) formúl $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 1)$ je d ô k a z formuly F v H vtedy a len vtedy, keď pre každú formulu A_i $(1 \leqq i \leqq n)$ platí, že A_i je axióma alebo existujú formuly A_j, A_h $(1 \leqq j,\ h \leqq n)$ také, že $j, h < i$, formula A_i je priamo odvoditeľná z formúl A_j, A_h a $A_n = F$. („$1 \leqq j,\ h \leqq n$" je skratkou za „$1 \leqq j \leqq n$ a $1 \leqq h \leqq n$").

To znamená, že dôkazom formuly F je taký rad formúl, v ktorom sa vyskytujú iba axiómy a formuly priamo odvoditeľné z predchádzajúcich formúl tohto radu, pričom posledným členom radu je práve formula F. Z df. 13 triviálne vyplýva, že každý dôkaz je *konečná* postupnosť formúl. Dôkazom je i postupnosť, ktorá obsahuje len jeden člen — nejakú axiómu. Na základe definícií 11 — 13 možno o ľubovoľnej postupnosti formúl efektívne rozhodnúť, či je dôkazom. Stačí zistiť, ktoré formuly danej postupnosti majú tvar niektorej zo schém uvedených v df. 11 a či všetky ostatné formuly tejto postupnosti sú priamo odvoditeľné z predchádzajúcich členov postupnosti — táto procedúra je čisto syntaktická. Nasledujúca postupnosť formúl je dôkazom formuly $p \to p$.

$p \to (p \to p)$

$p \to ((p \to p) \to p)$

$(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$

$(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$

$p \to p$

V prvom a druhom riadku tejto postupnosti sa vyskytujú axiómy tvaru $A \to (B \to A)$, v treťom riadku axióma tvaru $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$. Štvrtá formula je priamo odvoditeľná z formúl vyskytujúcich sa v druhom a v treťom riadku, piata — z formúl v druhom a štvrtom riadku.[129] Podobne ako dôkaz formuly $p \to p$ možno skonštruovať dôkaz ľubovoľnej formuly tvaru $A \to A$. Preto namiesto konkrétnych dôkazov budeme ďalej uvádzať len ich metajazykové schémy. Každá schéma dôkazu predstavuje nekonečnú množinu dôkazov tej istej štruktúry. Konkrétny dôkaz možno zo schémy dôkazu získať nahradením metajazykových premenných ľubovoľnými formulami H. Aby sme čitateľovi pomohli pri kontrole dôkazov, napravo od nich budeme uvádzať legendu, v ktorej „Ax" bude skratka za výraz „axióma" a „MP" za výraz „formula získaná pomocou pravidla modus ponens". Číslica za skratkou „Ax" bude označovať číslo schémy axióm z df. 11 a číslice za skratkou „MP" čísla riadkov dôkazu, z ktorých je daná formula priamo odvoditeľná. V niektorých schémach dôkazov budeme miesto schém *už uvedených* v niektorom riadku písať len číslo tohto riadku (obyčajne ako časti iných schém), bude to nielen úspornejšie, ale i prehľadnejšie. Schéma, ktorú teraz uvedieme je schémou dôkazu ľubovoľnej formuly tvaru $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

1.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Ax 2
2.	$1 \to ((B \to C) \to 1)$	Ax 1
3.	$(B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$	MP 1,2
4.	$3 \to (((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$	Ax 2
5.	$((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$	MP 3,4
6.	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	Ax 1
7.	$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	MP 5,6

Schémy axióm uvedené v 2., 4. a 6. riadku nie sú totožné so schémami uvedenými v df. 11, ľahko však možno zistiť, že každá formula, ktorá má ten

[129] Nech sa čitateľ nedá zmiasť tým, že v axióme, ktorá je v prvom riadku $A = B$ a axióme uvedenej v treťom riadku $A = C$. V df. 11, sa výslovne hovorí. že A, B, C sú ľubovoľné formuly, čiže nie je vylúčené, že A je totožná s B alebo s C, prípadne že $A = B = C$.

istý tvar ako schéma v 2. a 6. riadku, má tiež tvar $A\to(B\to A)$ a že každá formula takého tvaru ako schéma vo 4. riadku má zároveň tvar $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ (hoci nie naopak), to znamená že tieto formuly sú axiómy.

Mnoho dôkazov možno skrátiť vynechaním niektorých ich súvislých častí, ktoré sú dôkazmi teorém *už predtým dokázaných* a síce tak, že namiesto celých „poddôkazov" uvedieme len ich poslednú formulu (resp. schému). Taká postupnosť nie je dôkazom v zmysle df. 13, pretože obsahuje formuly, ktoré nie sú ani axiómy ani priamo odvoditeľné z predchádzajúcich formúl, ale každú takú postupnosť možno rozšíriť tak, že dostaneme dôkaz v zmysle df. 13 (doplnením chýbajúcich poddôkazov). Postupnosť s vynechanými poddôkazmi určitých teorém, ktoré sú pre dôkaz danej formuly nepostrádateľné, možno považovať za „skratku" skutočného dôkazu. Napr. keď k dôkazu nejakej formuly F budeme potrebovať teorému $p\to q$, nebudeme v dôkaze tejto formuly uvádzať celý dôkaz teorémy $p\to p$, ale iba $p\to p$, hoci podľa df. 13 to môžeme urobiť iba vtedy, keď formula $p\to p$ je priamo odvoditeľná z predchádzajúcich formúl (nie je totiž axióma). Výraz „T" v legende k takým dôkazom je skratkou výrazu „teoréma".

D e f i n í c i a 14. Formula F je t e o r é m a (dokázateľná formula) v H vtedy a len vtedy, keď existuje taká postupnosť formúl $A_1, \ldots, A_n$, ktorá je dôkazom formuly F.

Každá axióma je teoréma, pretože každá axióma je dokázateľná v zmysle df. 13. Napr. jednočlenná postupnosť, v ktorej sa vyskytuje práve axióma je dôkazom tejto axiómy.

V nasledujúcom tvrdení dokážeme niekoľko teorém, ktoré budeme potrebovať neskôr.

T v r d e n i e 17. Pre každú formulu A, B, C platí, že ľubovoľná formula tvaru (a), (b), ... alebo (f) je teoréma H.

(a) $A\to A$
(b) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$
(c) $\sim A\to(A\to B)$
(d) $\sim\sim A\to A$
(e) $A\to\sim\sim A$
(f) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

D ô k a z. (a) a (b) už dokazovať nemusíme.

(c) 1. $(\sim B\to\sim A)\to(A\to B)$	Ax 12
2. $(\sim A\to\sim B)\to(B\to A)$	Ax 12
3. $\sim A\to(\sim B\to\sim A)$	Ax 1
4. $((\sim B\to\sim A)\to(A\to B))\to((\sim A\to(\sim B\to\sim A))\to(\sim A\to(A\to B)))$	T (b)
5. $(\sim A\to(\sim B\to\sim A))\to(\sim A\to(A\to B))$	MP 1,4
6. $\sim A\to(A\to B)$	MP 3,5
(d) 1. $(\sim A\to\sim\sim\sim A)\to(\sim\sim A\to A)$	Ax 12
2. $\sim\sim A\to(\sim A\to\sim\sim\sim A)$	T (c)
3. $((\sim A\to\sim\sim\sim A)\to(\sim\sim A\to A))\to((\sim\sim A\to(\sim A\to\sim\sim\sim A))\to(\sim\sim A\to(\sim\sim A\to A)))$	T (b)

4. $(\sim\sim A \to (\sim A \to \sim\sim\sim A)) \to (\sim\sim A \to (\sim\sim A \to A))$ MP 1,3

5. $\sim\sim A \to (\sim\sim A \to A)$ MP 2,4

6. $(\sim\sim A \to (\sim\sim A \to A)) \to ((\sim\sim A \to \sim\sim A) \to (\sim\sim A \to A))$ Ax 2

7. $(\sim\sim A \to \sim\sim A) \to (\sim\sim A \to A)$ MP 5,6

8. $\sim\sim A \to \sim\sim A$ T (a)

9. $\sim\sim A \to A$ MP 7,8

(e) 1. $(\sim\sim\sim A \to \sim A) \to (A \to \sim\sim A)$ Ax 12

2. $\sim\sim\sim A \to \sim A$ T (d)

3. $A \to \sim\sim A$ MP 1,2

(f) To, že (f) je teoréma dokážeme nižšie iným spôsobom.

Hoci na základe df. 11 — 13 možno o každej postupnosti formúl efektívne rozhodnúť, či je dôkazom svojej poslednej formuly, konštrukcia dôkazu vyžaduje nemálo skúseností, dôvtipu i šťastia.[130] Ale dokazovanie nie je jedinou metódou, ktorou sa môžeme presvedčiť o tom, že daná formula je teoréma. V M_{VL} sa dajú dokázať rôzne tvrdenia, týkajúce sa dokázateľnosti v H, na základe ktorých možno dôkazy formúl značne skrátiť (patria sem i odvodené odvodzovacie pravidlá) alebo konštrukciu dôkazu nahradiť inou procedúrou, napr. odvodzovaním z predpokladov (hypotéz). Odvoditeľnosť z predpokladov treba prísne odlišovať od priamej odvoditeľnosti.

D e f i n í c i a 15. Nech M je ľubovoľná množina formúl a F formula. Budeme hovoriť, že formula F je o d v o d i t e ľ n á z množiny M v H (symbolicky: $M \vdash F$) vtedy a len vtedy, keď existuje taká postupnosť formúl $A_1, \ldots, A_n$, že pre každú formulu A_i $(i = 1, \ldots, n)$ platí, že A_i je axióma alebo A_i je prvkom z M alebo existujú formuly A_j, A_h $(1 \leq h, j \leq n)$ také, že $j, h < i$, formula A_i je priamo odvoditeľná z formúl A_j, A_h a $A_n = F$.

Postupnosť formúl $A_1, \ldots, A_n$, ktorá spĺňa všetky podmienky uvedené v df. 15 budeme nazývať v ý v o d o m z M (v H) a formuly z množiny M p r e d p o k l a d m i (alebo hypotézami). Namiesto „$\{F_1, \ldots, F_n\} \vdash_H F$" budeme obyčajne písať len „$F_1, \ldots, F_n \vdash F$".

Z df. 15 vyplýva, že teorémy sú odvoditeľné z každej množiny formúl, dokonca i z prázdnej. Ukážeme, že ľubovoľná formula F je odvoditeľná z prázdnej množiny formúl práve vtedy, keď F je teoréma. Ak F je odvoditeľná z prázdnej množiny, tak v postupnosti $A_1, \ldots, A_n$, ktorá je vývodom F z prázdnej množiny sa môžu vyskytovať len axiómy a formuly priamo odvoditeľné z predchádzajúcich formúl, pričom $A_n = F$. Lenže taká postupnosť je aj dôkazom F (pozri df. 13), čiže F je teoréma. Na druhej strane, ak F je teoréma, tak existuje postupnosť formúl $A_1, \ldots, A_n$, ktorá je dôkazom F. V tomto dôkaze sa vyskytujú iba axiómy a formuly priamo odvoditeľné z predchádzajúcich formúl postupnosti $A_1, \ldots, A_n$, pričom $A_n = F$. Táto postupnosť je však aj vývodom F z prázdnej množiny.

Je zrejmé, že ak F je priamo odvoditeľná z M, tak F je aj odvoditeľná z M, hoci opak zväčša neplatí. Nebudeme tu uvádzať konkrétne vývody, ale iba ich

[130] Pritom fakt, že nejakú formulu nemôžeme dokázať ešte nesvedčí o tom, že táto formula nie je teoréma.

metajazykové schémy. Aj vo vývodoch budeme namiesto celých dôkazov potrebných teorém uvádzať iba tieto teorémy. Postupnosť schém, ktorú teraz uvedieme je schémou vývodov formúl tvaru $A \to C$ z množiny $\{A \to B, B \to C\}$. Výraz „PR“ v legende k tejto schéme (i nižšie) je skratkou výrazu „predpoklad“, výraz „Tv“ skratkou výrazu „tvrdenie“.

1. $A \to B$	PR
2. $B \to C$	PR
3. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	T (b) — Tv 17
4. $(A \to B) \to (A \to C)$	MP 2,3
5. $A \to C$	MP 1,4

Táto schéma nie je schémou vývodov v zmysle df. 15, lebo v treťom riadku sa vyskytuje výraz, ktorý nie je ani schémou axióm ani schémou výrazov priamo odvoditeľných z predchádzajúcich riadkov. Keby sme však 3. riadok nahradili schémou dôkazu teorémy $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$, ktorú sme uviedli vyššie, dostali by sme schému vývodov v zmysle df. 15. Konštrukciou uvedenej postupnosti sme vlastne dokázali, že $\{B \to C, A \to B\} \vdash A \to C$. Ďalej budeme hovoriť o vývodoch a dôkazoch aj vtedy, keď v skutočnosti bude reč o ich schémach, predpokladáme, že to nespôsobí vážnejšie nedorozumenia.