ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY

PAVOL CMOREJ

XII

Dokázali sme, že nejaká formula B výrokovologicky vyplýva z množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$ práve vtedy, keď formula tvaru $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ je tautológia. Aj formuly iného tvaru, utvorené z formúl $A_1, \ldots, A_n, B$, majú tú vlastnosť, že sú tautológie práve vtedy, keď formula B výrokovologicky vyplýva z množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Všimneme si dva druhy týchto formúl, jednak formuly tvaru

$$\sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$$

jednak formuly tvaru

$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots),$$

v ktorých A_1 je antecedent celej formuly, A_2 antecedent konzekventa celej formuly, A_3 antecedent podformuly, ktorá je konzekventom konzekventa celej formuly atď. Ľubovoľná formula A_i je vo formule tvaru $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ antecedentom podformuly tvaru

$$A_i \rightarrow (A_{i+1} \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$$

Ak $n = 1, \ldots, 5$, formuly štruktúry $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ majú tento tvar:

$$A_1 \rightarrow B$$
$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow B)$$
$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow B))$$
$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (A_4 \rightarrow B)))$$
$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (A_4 \rightarrow (A_5 \rightarrow B))))$$

Dokážeme, že formuly tvaru $\sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$ a formuly tvaru $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ sú rovnocenné formulám tvaru $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$.

T v r d e n i e 7. Pre každú formulu $A_1, \ldots, A_n, B$ platí, že

(a) $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B \dashv\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$

(b) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_n) \rightarrow B \dashv\vdash \sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$

D ô k a z. (a) Formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ nadobúda pri nejakom udelení hodnôt χ hodnotu **N** iba vtedy, keď $Hod(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$, t. j. keď $Hod(A_1, \chi) = \mathbf{P}, \ldots, Hod(A_n, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$, v ostatných prípadoch nadobúda uvažovaná formula hodnotu **P**. Dokážeme, že to isté platí aj pre formuly tvaru $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$. Ak $Hod\ (A_1, \chi) = \mathbf{P}, \ldots, Hod\ (A_n, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod\ (B, \chi) = \mathbf{N}$, tak $Hod\ (A_n \rightarrow B, \chi) = \mathbf{N}$ $Hod\ (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B), \chi) = \mathbf{N}$ atď., to znamená, že pre každú podformulu tvaru $A_i \rightarrow (A_{i+1} \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ platí, že $Hod\ (A_i \rightarrow (A_{i+1} \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots), \chi) = \mathbf{N}$ a teda to isté platí i pre samú formulu $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$. V ostatných prípadoch nadobúdajú formuly tvaru $A_1 \rightarrow \rightarrow (A_2 \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ hodnotu **P**. Ak pre niektorú z podformúl A_i platí, že $Hod\ (A_i, \chi) = \mathbf{N}$, tak $Hod\ (A_i \rightarrow (A_{i+1} \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots), \chi) = \mathbf{P}$, pretože

A_i je antecendent tejto podformuly. Každá ďalšia podformula formuly $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$, ktorá obsahuje ako svoju podformulu výraz $A_i \rightarrow (A_{i+1} \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ má tiež hodnotu **P** a teda túto hodnotu nadobúda i celá formula. Ak $Hod\,(B, \chi) = \mathbf{P}$, tak $Hod\,(A_n \rightarrow B, \chi) = \mathbf{P}$, $Hod\,(A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B), \chi) = \mathbf{P}$ atď., pričom vôbec nezáleží na tom, aké hodnoty nadobúdajú podformuly A_i. Z uvedeného vyplýva, že formula $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ nadobúda hodnotu **N** iba vtedy, keď formuly $A_1, \ldots, A_n$ nadobúdajú hodnotu **P** a formula B hodnotu **N**.

(b) Formula tvaru $\sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$ nadobúda hodnotu **N** práve vtedy, keď formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$ nadobúda hodnotu **P**, t. j. keď $Hod\,(A_1, \chi) = \mathbf{P}, \ldots, Hod\,(A_n, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod\,(\sim B, \chi) = \mathbf{P}$, pričom $Hod\,(B, \chi) = \mathbf{N}$. V ostatných prípadoch nadobúda formula $\sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$ hodnotu **P**. To znamená, že formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim B)$ nadobúda hodnotu **N** (resp. **P**) v tých istých prípadoch ako formula $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$, čiže sú rovnocenné.

Z tvrdenia 7 triviálne vyplýva, že formuly tvaru $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ a $\sim (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge \sim B)$ sú tautológie práve vtedy, keď tautológiami sú formuly tvaru $(A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$, z čoho je na základe tvrdenia 1 zrejmé, že B výrokovologicky vyplýva z množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ práve vtedy, keď formula niektorého z uvedených tvarov je tautológia.

7.3 **Niektoré vlatnosti výrokovologickej rovnocennosti.** V nasledujúcich troch tvrdeniach poukážeme na niektoré vlastnosti výrokovologickej rovnocennosti, na ktoré sa budeme neskôr odvolávať.

T v r d e n i e 8. Pre každú formulu A, B, C platí, že

(a) $A \dashv\vdash A$,

(b) Ak $A \dashv\vdash B$, tak $B \dashv\vdash A$,

(c) Ak $A \dashv\vdash B$ a $B \dashv\vdash C$, tak $A \dashv\vdash C$.

Dôkaz tohto jednoduchého tvrdenia ponechávame čitateľovi.

T v r d e n i e 9. Pre každú formulu $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 3)$ platí, že ak $A_1 \dashv\vdash A_2$ a $A_2 \dashv\vdash A_3$ a ... a $A_{n-1} \dashv\vdash A_n$, tak $A_1 \dashv\vdash A_n$.

D ô k a z. Ak $n = 3$, tvrdenie 9 platí na základe tvrdenia 8(c). Dokážeme, že ak tvrdenie 9 platí pre ľubovoľné i, ktoré spĺňa podmienku, že $3 \leqq i \leqq n$, tak platí aj pre $i + 1$. Predpokladajme, že tvrdenie 9 pre i platí; na základe tohto predpokladu dokážeme, že ak $A_1 \dashv\vdash A_2$ a $A_2 \dashv\vdash A_3$ a ... *a* $A_i \dashv\vdash A_{i+1}$, tak $A_1 \dashv\vdash A_{i+1}$. Ak $A_1 \dashv\vdash A_2$ a ... a $A_{i-1} \dashv\vdash A_i$ a $A_i \dashv\vdash A_{i+1}$, tak $A_1 \dashv\vdash A_i$ (pretože pre i tvrdenie platí). No ak $A_1 \dashv\vdash A_i$ a $A_i \dashv\vdash A_{i+1}$, na základe tvrdenia 8 (c) platí, že $A_1 \dashv\vdash A_{i+1}$, čiže ak tvrdenie platí pre $i \geqq 3$, tak platí aj pre $i + 1$.

T v r d e n i e 10. Pre každú formulu A, B, C, D platí, že

(a) Ak $A \dashv\vdash B$, tak $\sim A \dashv\vdash \sim B$,

(b) Ak $A \dashv\vdash B$ a $C \dashv\vdash D$, tak $A \wedge C \dashv\vdash B \wedge D$,

(c) Ak $A \dashv\vdash B$ a $C \dashv\vdash D$, tak $A \vee C \dashv\vdash B \vee D$,

(d) Ak $A \dashv\vdash B$ a $C \dashv\vdash D$, tak $A \rightarrow C \dashv\vdash B \rightarrow D$,

(e) Ak $A \dashv\vdash B$ a $C \dashv\vdash D$, tak $A \leftrightarrow C \dashv\vdash B \leftrightarrow D$.

D ô k a z. (a) Predpokladajme, že $A \dashv\vdash B$ a χ je ľubovoľné udelenie hodnôt. Ak $Hod\,(A, \chi) = \mathbf{P}$, $Hod\,(\sim A, \chi) = \mathbf{N}$ i $Hod\,(\sim B, \chi) = \mathbf{N}$, pretože $Hod\,(A, \chi) = Hod\,(B, \chi)$. Ak $Hod\,(A, \chi) = \mathbf{N}$, aj $Hod\,(B, \chi) = \mathbf{N}$, z čoho vyplýva,

$Hod(\sim A, \chi) = Hod(\sim B, \chi)$. Teda v každom prípade $Hod(\sim A, \chi) = Hod(\sim B, \chi)$, t. j. $\sim A \dashv\vdash \sim B$.

(b) Nech $A \dashv\vdash B$ a $C \dashv\vdash D$. Dokážeme, že za tohto predpokladu $A \wedge C \dashv\vdash B \wedge D$, t. j. že $Hod(A \wedge C, \chi) = Hod(B \wedge D, \chi)$. Ak $Hod(A \wedge C, \chi) = \mathbf{P}$, $Hod(A, \chi) = \mathbf{P}$ i $Hod(C, \chi) = \mathbf{P}$, z čoho na základe predpokladu vyplýva, že $Hod(B, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(D, \chi) = \mathbf{P}$, čiže aj $Hod(B \wedge D, \chi) = \mathbf{P}$. Ak $Hod(A \wedge C, \chi) = \mathbf{N}$, tak $Hod(A, \chi) = \mathbf{N}$ alebo $(C, \chi) = \mathbf{N}$ a teda aj $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$ alebo $Hod(D, \chi) =)\mathbf{N}$. No, ak B alebo D má pri udelení hodnôt χ hodnotu $\mathbf{N}$, aj $Hod(B \wedge D, \chi) = \mathbf{N}$. Z uvedeného vyplýva, že $Hod(A \wedge C, \chi) = Hod(B \wedge D, \chi)$ pri ľubovoľnom χ.

Obdobne ako (b) možno dokázať aj (c), (d) a (e), čo tu robiť nebudeme. Na základe tvrdenia 10 a 6 možno dokázať celý rad ďalších rovnocenností. Pre náš výklad majú význam najmä rovnocennosti

$$\sim(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \dashv\vdash \sim \mathrm{A} \vee \sim \mathrm{B},$$
$$\sim(A \vee B) \dashv\vdash \sim A \wedge \sim B,$$

ktoré sa spolu s rovnocennosťami (o), (p), uvedenými v tvrdení 6, nazývajú *de Morganovými* rovnocennosťami. Keďže $A \wedge B \dashv\vdash \sim(\sim A \vee \sim B)$ a $A \vee B \dashv\vdash \sim(\sim A \wedge \sim B)$, podľa tvrdenia 10 (a) $\sim(A \wedge B) \dashv\vdash \sim\sim(\sim A \vee \sim B)$, a $\sim(A \vee B) \dashv\vdash \sim\sim(\sim A \wedge \sim B)$. No $\sim\sim(\sim A \vee \sim \mathrm{B}) \dashv\vdash \sim A \vee \sim B$ a $\sim\sim(\sim A \wedge \sim B) \dashv\vdash \sim A \wedge \sim B$, z čoho podľa tvrdenia 8 (c) vyplýva, že $\sim(A \vee B) \dashv\vdash \sim A \wedge \sim B$ a $\sim(A \wedge \mathrm{B}) \dashv\vdash \sim A \vee \sim B$. Na základe týchto rovnocenností možno ľahko dokázať, že

$$\sim(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \dashv\vdash \sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n,$$
$$\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \dashv\vdash \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n,$$

kde n je ľubovoľné celé kladné číslo.

§ 8. Konjunktívna normálna forma

Postupy, ktorými sme doteraz riešili najdôležitejšie problémy výrokovej logiky boli zväčša sémantické. Napr. ak sme chceli zistiť, či daná formula A je tautológia alebo či vyplýva z množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$, prípadne či je výrokovologicky rovnocenná s nejakou formulou B, skúmali sme, či táto formula nadobúda pri každom udelení hodnôt hodnotu $\mathbf{P}$, či neexistuje udelenie hodnôt, ktoré spĺňa množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a nespĺňa A a či A nadobúda pri každom udelení hodnôt tú istú hodnotu ako B. Sémantický ráz týchto postupov a úvah je evidentný. V tejto súvislosti vyvstáva otázka, či sa uvedené problémy nedajú riešiť výlučne syntakticky, na základe tvaru formúl. Moderná logika venuje otázkam transformácie rôznych sémantických problémov na syntaktické mimoriadne veľkú pozornosť. Bez zveličovania možno povedať, že hľadanie rôznych syntaktických prostriedkov a metód (a zdôvodňovanie ich platnosti) na riešenie sémantických problémov je jedna z hlavných úloh modernej logiky. Teraz sa zoznámime s jednou zo syntaktických metód, ktorou možno o ľubovoľnej formule F zistiť, či je tautológia. Je to tzv. transformácia na konjuktívnu normálnu formu. Z každej formuly F možno pomocou syntaktickej operácie nahradzovania (podformúl určitého tvaru inými formulami) získať formulu špecifickej štruktúry, ktorá je výrokovologicky rovnocenná formule F a má taký tvar, že už na základe analýzy tohto tvaru možno tohto tvaru možno stanoviť, či táto formula je tautológia.

Štruktúru formúl v konjunktívnej normálnej forme presne určíme definíciami 9, 10. Neskôr ukážeme, ktoré formuly v konjunktívnej normálnej forme sú tautológie.

D e f i n í c i a 9. Predpokladajme, že každý z výrazov $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ je premenná alebo negácia premennej. Ľubovoľný výraz tvaru $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ sa nazýva **elementárnou disjunkciou.**

Elementárnymi disjunkciami sú napr. tieto výrazy: p, $\sim q$, $p \vee q$, $\sim q \vee \sim r$, $p \vee \sim q \vee r \vee \sim p$.[123] Elementárnou disjunkciou môže byť podľa df. 9 aj formula, v ktorej sa disjunktor vôbec nevyskytuje. Existujú disjunkcie, ktoré nie sú elementárnymi disjunkciami, napr. $(p \wedge q) \vee (p \rightarrow q)$, i elementárne disjunkcie, ktoré nie sú disjunkciami, a to premenné a negácie premenných.

D e f i n í c i a 10. Nech $D_1 \ldots, D_k$ $(k \geqq 1)$ sú ľubovoľné elementárne disjunkcie. Každý výraz tvaru $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$ sa nazýva formulou v **konjunktívnej normálnej forme** (ďalej len k. n. f.). Budeme tiež hovoriť, že výraz tohto tvaru má k. n. f.[124]

Podľa df. 10 k. n. f. majú aj formuly, v ktorých sa konjunktor vôbec nevyskytuje. Formulami v k. n. f. sú napr. tieto výrazy: p, $\sim q$, $p \vee q$, $p \wedge \sim r$, $p \wedge \sim q$,

$$(p \vee q) \wedge (q \vee \sim p),\ (p \vee \sim q \vee s) \wedge (r \wedge \sim s) \wedge (p \vee p) \wedge q.$$

Každá formula F_1 sa dá transformavoť na takú formulu F_n, ktorá je v k. n. f. a je rovnocenná formule F_1. Pri transformácii formúl na k. n. f. nahradzujeme niektoré podformuly danej formuly F_1 a formúl $F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}$, ktoré z nej týmto nahradzovaním postupne dostávame, inými formulami dovtedy, kým nezískame formulu F_n, ktorá má k. n. f. Podformuly formúl $F_1, \ldots, F_{n-1}$ nahradzujeme vždy formulami, ktoré sú nahradzovaným podformulám výrokovologicky rovnocenné. Nižšie dokážeme tvrdenie, že nahradením nejakej podformuly A v ľubovoľnej formule C nejakou formulou B, ktorá je výrokovologicky rovnocenná A, vždy dostaneme formulu rovnocennú formule C.

Nech $C[A/B]$ je jednak formula C, jednak ľubovoľná formula, ktorú možno z formuly C získať nahradením jedného, dvoch, ... alebo všetkých výskytov podformuly A v C formulou B. Ak A nie je podformulou C, $C[A/B] = C$. Napr. ak C je formula $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$, A je formula $(p \rightarrow q)$ a B je formula $\sim p \vee q$, $C[A/B]$, resp. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))[p \rightarrow q/\sim p \vee q]$, je ktorákoľvek z týchto formúl: $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$, $(\sim p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$, $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (\sim p \vee q))$, $(\sim p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow (\sim p \vee q))$. Hoci symbol „$C[A/B]$" nie je jednoznačný, domnievame sa že nemôže vyvolať vážnejšie nedorozumenia. Symbol „$C[A/B]$" chápeme tak, že platí:

---

[123] V uvedených formulách i v schéme elementárnej disjunkcie, ktorá sa nachádza v df. 9 sú vynechané zátvorky, ktoré možno doplniť tzv. uzátvorkovaním doľava. Keďže ľubovoľná elementárna disjunkcia s uzátvorkovaním doľava je na základe tvrdenia 6 (k) rovnocenná výrazu s iným uzátvorkovaním, budeme za elementárnu disjunkciu považovať každú formulu, ktorú možno z elementárnej disjunkcie s uzátvorkovaním doľava získať iným uzátvorkovaním.

[124] Schéma formuly v k. n. f. uvedená v tejto definícii je skratkou s chýbajúcimi zátvorkami, ktoré možno doplniť uzátvorkovaním doľava. Za formulu v k. n. f. budeme však považovať každú formulu, ktorú možno z formuly s uzátvorkovaním doľava získať iným rozmiestením zátvoriek (na základe 6 (j) sú ľubovoľné dve také formuly výrokovologicky rovnocenné).

$$(\sim D)[A/B] = (\sim (D[A/B]))$$
$$(D \wedge F)[A/B] = D[A/B] \wedge F[A/B]$$
$$(D \vee F)[A/B] = D[A/B] \vee F[A/B]$$
$$(D \rightarrow F)[A/B] = D[A/B] \rightarrow F[A/B]$$
$$(D \leftrightarrow F)[A/B] = D[A/B] \leftrightarrow F[A/B]$$

Tvrdenie 11. Nech A, B, C sú ľubovoľné formuly. Ak $A \dashv\vdash B$, tak $C \dashv\vdash C[A/B]$.

Dôkaz. (i) Predpokladajme, že $A \dashv\vdash B$ a C je výroková premenná. Ak A nie je podformulou C, tak $C[A/B] = C$, a preto podľa tvrdenia 8 (a) $C \dashv\vdash C[A/B]$. Ak A je podformulou C, $A = C$, pretože C je premenná a $C[A/B]$ je formula C alebo B. V prvom prípade $C \dashv\vdash C[A/B]$ na základe tvrdenia 8 (a), v druhom $C \dashv\vdash C[A/B]$ na základe predpokladu, že $A \dashv\vdash B$.

(ii) Nech D a F sú formuly, pre ktoré tvrdenie 11 už platí, to znamená, že ak $A \dashv\vdash B$, tak $D \dashv\vdash D[A/B]$ a tiež $F \dashv\vdash F[A/B]$. Na základe predpokladu, že tvrdenie 11 platí pre jednoduchšie formuly D, F dokážeme, že platí aj vtedy, keď C je formula tvaru $(\sim D)$, $(D \wedge F)$, $(D \vee F)$, $(D \rightarrow F)$ alebo $(D \leftrightarrow F)$. Ak $A \dashv\vdash B$, tak $D \dashv\vdash D[A/B]$, z čoho podľa tvrdenia 10 (a) vyplýva, že $\sim D \dashv\vdash \sim (D[A/B]) = (\sim D)[A/B]$. Ak $A \dashv\vdash B$, $D \dashv\vdash D[A/B]$, a $F \dashv\vdash F[A/B]$, z čoho podľa tvrdenia 10 (b) — (e) postupne dostávame, že

$$D \wedge F \dashv\vdash D[A/B] \wedge F[A/B] = (D \wedge F)[A/B],$$
$$D \vee F \dashv\vdash D[A/B] \vee F[A/B] = (D \vee F)[A/B],$$
$$D \rightarrow F \dashv\vdash D[A/B] \rightarrow F[A/B] = (D \rightarrow F)[A/B],$$
$$D \leftrightarrow F \dashv\vdash D[A/B] \leftrightarrow F[A/B] = (D \leftrightarrow F)[A/B].$$

Teda ak tvrdenie 11 platí pre jednoduchšie formuly D, F, platí aj pre ich negácie, ich konjunkciu, disjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu; no keďže platí pre premenné, platí aj pre ich negácie, konjunkcie, ..., ďalej pre nagácie, konjunkcie, ... týchto formúl atď., t. j. pre každú formulu C.

Keď si čitateľ osvojí techniku transformácie formúl na k. n. f., s ktorou ho zoznámime neskôr, bude mu intuitívne zrejmé, že ku každej formule A existuje formula v k. n. f., ktorá je výrokovologicky rovnocenná formule A. Napriek tomu sa to pokúsime dokázať; dôkaz bude trochu zložitejší, predpokladá totiž tri nasledujúce tvrdenia.

Tvrdenie 12. Nech A je ľubovoľná formula v k. n. f. a D ľubovoľná elementárna disjunkcia. Existuje taká formula B, že $A \vee D \dashv\vdash B$ a B je výraz v k. n. f.

Dôkaz. Nech A je $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n$, kde každé D_i je nejaká elementárna disjunkcia. $A \vee D = (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k) \vee D \dashv\vdash D \vee (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k) \dashv\vdash (D \vee (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_{k-1}) \wedge (D \vee D_k) \dashv\vdash \ldots \dashv\vdash (D \vee D_1) \wedge (D \vee D_2) \wedge \ldots \wedge (D \vee D_k)$, kde $(D \vee D_i)$ je disjunkciou dvoch elementárnych disjunkcií. Je zrejmé, že disjunkcia dvoch elementárnych disjunkcií je tiež elementárnou disjunkciou, čiže celá formula $(D \vee D_1) \wedge (D \vee D_2) \wedge \ldots \wedge (D \vee D_k)$ má k. n. f. a teda je hľadaným výrazom B, ktorý je na základe tvrdenia 9 rovnocenný formule $A \vee D$.

Tvrdenie 13. Nech $A_1, \ldots, A_n$ sú ľubovoľné formuly v k. n. f. Potom existuje taká formula B, že $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \dashv\vdash B$ a B je formula v k. n. f.

Dôkaz. Ak $n = 1$, tvrdenie platí triviálne. Dokážeme, že ak tvrdenie 13 platí pre ľubovoľné m, ktoré spĺňa podmienku, že $1 \leqq m < n$, tak platí aj pre $m + 1$. Nech teda platí, že $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \dashv\vdash C$, kde C je výraz v k. n. f. Predpokladajme, že C je výraz $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$, kde každé D_i je elementárna disjunkcia. Podľa tvrdenia 10 (c) ak $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \dashv\vdash C$ a $A_{m+1} \dashv\vdash A_{m+1}$, tak $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m) \vee A_{m+1} \dashv\vdash C \vee A_{m+1} = (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k) \vee A_{m+1} \dashv\vdash A_{m+1} \vee (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k) \dashv\vdash (A_{m+1} \vee (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_{k-1})) \wedge A_{m+1} \vee D_k) \dashv\vdash \ldots \dashv\vdash (A_{m+1} \vee D_1) \wedge (A_{m+1} \vee D_2) \wedge \ldots \wedge (A_{m+1} \vee D_k)$. Podľa tvrdenia 12 ku každej podformule $(A_{m+1} \vee D_i)$ posledného výrazu existuje jej rovnocenná formula F_i v k. n. f. Nahradením podformúl $A_{m+1} \vee D_i$ im rovnocennými formulami F_i v k. n. f. dostaneme výraz $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k$, ktorý je k-násobnou konjunkciou formúl v k. n. f. Je zrejmé, že konjunkcia formúl v k. n. f. je tiež formulou v k. n. f. Teda formula $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k$ má k. n. f., je rovnocenná formule $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m) \vee A_{m+1}$, čiže tvrdenie 13 platí pre $m + 1$, z čoho vyplýva že platí aj pre n.

Tvrdenie 14. Ak A je formula v k. n. f., existuje taká formula B, že $\sim A \dashv\vdash B$ a B je v k. n. f.

Dôkaz. Ak A je elementárnou disjunkciou $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, $\sim A = \sim (A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \dashv\vdash \sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \ldots \wedge \sim A_n$, kde A_i je premenná alebo negácia premennej a teda $\sim A_i$ je negácia premennej alebo dvojitá negácia premennej, ktorá je na základe tvrdenia 6 (g) rovnocenná samej premennej, čiže celý výraz je rovnocenný konjunkcii premenných alebo negovaných premenných a teda výrazu v k. n. f. Ak A je výraz $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$, kde každé D_j je elementárna disjunkcia, $\sim A = \sim (D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k) \dashv\vdash \sim D_1 \vee \sim D_2 \vee \ldots \vee \sim D_k$. Ku každému $\sim D_j$ existuje formula F_j v k. n. f., lebo D_j je elementárna disjunkcia, teda $\sim D_1 \vee \sim D_2 \vee \ldots \vee \sim D_k \dashv\vdash F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_k$. Podľa tvrdenia 13 k formule $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_k$, kde každá formula F_j má k. n. f., existuje jej rovnocenný výraz v k. n. f. a tento výraz je hľadanou formulou B.

Teraz pristúpime k dôkazu tvrdenia, že ku každej formule existuje jej rovnocenná formula v k. n. f.

Tvrdenie 15. K ľubovoľnej formule A existuje taká formula B v k. n. f., pre ktorú platí, že $A \dashv\vdash B$.

Dôkaz. (1) Ak A je premenná, má k. n. f. a tvrdenie 15 platí.

(2) Predpokladajme, že C_1 a D_1 sú formuly, pre ktoré tvrdenie 15 platí a že C_2 a D_2 sú také formuly v k. n. f., že $C_1 \dashv\vdash C_2$, $D_1 \dashv\vdash D_2$. Ukážeme, že tvrdenie platí aj vtedy, keď A je formula tvaru $\sim C_1$, $C_1 \wedge D_1$, $C_1 \vee D_1$, $C_1 \rightarrow D_1$, $C_1 \leftrightarrow D_1$.

(a) Nech A je formula $\sim C_1$. Podľa predpokladu platí, že $C_1 \dashv\vdash C_2$, z čoho podľa tvrdenia 10 (a) vyplýva, že $\sim C_1 \dashv\vdash \sim C_2$. Dokázali sme, že k negácii výrazu v k. n. f. existuje s ním rovnocenná formula v k. n. f. a teda i k výrazu A rovnocennému s $\sim C_2$ existuje formula v k. n. f.

(b) Nech A je formula $C_1 \wedge D_1$. Podľa predpokladu platí, že $C_1 \dashv\vdash C_2$ a $D_1 \dashv\vdash D_2$, z čoho vyplýva, že $C_1 \wedge D_1 \dashv\vdash C_2 \wedge D_2$. Formuly C_2, D_2 sú v k. n. f. Keďže konjunkcia formúl v k. n. f. je formulou v k. n. f., formula $C_2 \wedge D_2$ má k. n. f., čiže i v tomto prípade k formule A existuje jej rovnocenná formula v k. n. f.

(c) Nech A je formula tvaru $C_1 \vee D_1$. Podľa predpokladu platí, že $C_1 \dashv\vdash C_2$ a $D_1 \dashv\vdash D_2$ a teda aj to, že $C_1 \vee D_1 \dashv\vdash C_2 \vee D_2$. Platí tiež, že $C_2 \vee D_2 \dashv\vdash \sim(\sim C_2 \wedge \sim D_2)$. Už vieme, že k výrazom $\sim C_2, \sim D_2$ existujú im rovnocenné výrazy C_3, D_3 v k. n. f. také, že $\sim C_2 \dashv\vdash C_3$, $\sim D_2 \dashv\vdash D_3$ teda platí tiež, že $\sim C_2 \wedge \sim D_2 \dashv\vdash C_3 \wedge D_3$, pričom formula $C_3 \wedge D_3$ je v k. n. f., ďalej platí, že $\sim(\sim C_2 \wedge \sim D_2) \dashv\vdash \sim(C_3 \wedge D_3)$. No k formule $\sim(C_3 \wedge D_3)$ existuje jej rovnocenná formula v k. n. f., pretože formula $C_3 \wedge D_3$ je v k. n. f. a k negácii výrazu v k. n. f. existuje s ním rovnocenná formula v k. n. f. A keďže $A = C_1 \vee D_1 \dashv\vdash C_2 \vee D_2 \dashv\vdash \sim(\sim C_2 \wedge \sim D_2)$, ku ktorému existuje rovnocenná formula v k. n. f., aj k formule A existuje jej rovnocenná formula v k. n. f.

Ak A je formula tvaru $C_1 \to D_1$ alebo $C_1 \leftrightarrow D_1$, tvrdenie dokazujeme podobne ako v bode (c), pričom vychádzame z toho, že $C_1 \to D_1 \dashv\vdash \sim(C_1 \wedge \sim D_1)$, $C_1 \leftrightarrow D_1 \dashv\vdash \sim(C_1 \wedge \sim D_1) \wedge \sim(D_1 \wedge \sim C_1)$ a z výsledkov získaných v (a) — (c).

Transformácia nejakej formuly F_1 na k. n. f. je konštrukciou postupnosti formúl $\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$, v ktorej pre každú formulu F_i $(i = 2, \ldots, n)$ platí, že $F_i = F_{i-1}[A/B]$, pričom $A \dashv\vdash B$ a F_n je v k. n. f. Podľa tvrdenia 11 $F_i \dashv\vdash F_{i-1}$ a teda aj $F_1 \dashv\vdash F_n$, čo možno ľahko dokázať na základe tvrdenia 9. Pri transformácii na k. n. f. postupujeme tak, že z formúl $F_1, \ldots, F_{n-1}$ postupne odstraňujeme implikátor a ekvivalentor, nahrádzajúc podformuly tvaru $A \to B$ formulami tvaru $\sim A \vee B$ a podformuly tvaru $A \leftrightarrow B$ formulami tvaru $(\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A)$. Podformuly tvaru $\sim\sim A$ nahradzujeme formulami tvaru A a podformuly tvaru $\sim(A \wedge B)$, $\sim(A \vee B)$ rovnocennými formulami tvaru $\sim A \vee \sim B$, $\sim A \wedge \sim B$. Po naznačených úpravách dostaneme formulu, v ktorej sa bude vyskytovať iba konjunktor, disjunktor a negátor, pričom negátor sa bude nachádzať iba pred výrokovými premennými. Ak táto formula ešte nemá k. n. f., ďalšie úpravy robíme na základe rovnocenností (h), (ch), (j), (k), (m), (n) tvrdenia 6 dovtedy, kým nezískame formulu v k. n. f. Formula F_n v k. n. f. získaná uvedenými transformáciami z formuly F_1 nie je určená jednoznačne. K danej formule F_1 spravidla možno nájsť viacej s ňou rovnocenných formúl v k. n. f.

Nasledujúca postupnosť formúl je transformáciou formuly $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$ na jej rovnocennú formulu v k. n. f.:

(1) $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$
(2) $(\sim p \vee q) \to (\sim q \to \sim p)$
(3) $(\sim p \vee q) \to (\sim\sim q \vee \sim p)$
(4) $\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim\sim q \vee \sim p)$
(5) $(\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \vee \sim p)$
(6) $(p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)$
(7) $(q \vee \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$
(8) $((q \vee \sim p) \vee p) \wedge ((q \vee \sim p) \vee \sim q)$

Každú z formúl (2), (3), (4) sme získali z predchádzajúcej nahradením nejakej podformuly tvaru $A \to B$ formulou $\sim A \vee B$. Formula (5) vznikla z formuly (4) nahradením podformuly $\sim(\sim p \vee q)$ jej rovnocennou formulou $(\sim\sim p \wedge \sim q)$ a formula (6) z formuly (5) nahradením podformúl $\sim\sim p$, $\sim\sim q$ formulami p, q. Formulu (7) sme dostali na základe rovnocennosti $A \vee B \dashv\vdash B \vee A$ a formulu (8) na základe rovnocennosti $A \vee (B \wedge C) \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Formula (8) má k. n. f. a je rovnocenná formule (1).

Na záver dokážeme tvrdenie, podľa ktorého formula v k. n. f. je tautológia práve vtedy, keď každá elementárna disjunkcia tejto formuly obsahuje nejakú premennú a zároveň negáciu tejto premennej.

T v r d e n i e 16. Nech A je ľubovoľná formula v k. n. f., teda nech $A = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$, kde každé D_i je elementárna disjunkcia a C nech je ľubovoľná výroková premenná. Potom platí, že A je tautológia vtedy a len vtedy, keď pre každú elementárnu disjunkciu D_i platí, že v D_i sa vyskytuje nejaká premenná C a zároveň $\sim C$.

D ô k a z. (i) Predpokladajme, že A je tautológia a že aspoň jedna D_i neobsahuje nijakú premennú C a zároveň $\sim C$. Potom však existuje udelenie hodnôt χ' pri ktorom $Hod(D_i, \chi') = \mathbf{N}$ a síce také χ', ktoré negovaným premenným priraďuje hodnotu **P** a ostatným hodnotu **N**. No keďže A je tautológia, pre každé χ platí, že $Hod\,(A, \chi) = \mathbf{P}$, teda aj $Hod\,(D_1, \chi) = \mathbf{P}$, $\ldots$, $Hod(D_i, \chi) = \mathbf{P}$, čiže nie je pravda, že existuje χ' pri ktorom $Hod(D_i, \chi') = \mathbf{N}$.

(ii) Ak každá D_i obsahuje nejakú premennú C a zároveň $\sim C$, pri každom udelení hodnôt χ $Hod\,(C, \chi) = \mathbf{P}$ alebo $Hod\,(\sim C, \chi) = \mathbf{P}$, teda pri každom χ aspoň jeden člen každej elementárnej disjunkcie D_i nadobúda hodnotu **P** a teda celá D_i má pri každom udelení hodnôt hodnotu **P**, čiže je tautológia. No ak každá D_i je tautológia, aj $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$ je tiež tautológia.

Formula (8) obsahuje v každej elementárnej disjunkcii nejakú premennú zároveň s jej negáciou a preto je tautológia. Keďže formula (8) je výrokovo-logicky rovnocenná formule (1), aj formula (1) je tautológia. Transformáciou na k. n. f. sa môžeme o ľubovoľnej formule výrokovej logiky presvedčiť, či je tautológia. Existujú aj iné formy ako je konjunktívna (zavedené pre rôzne účely), nebudeme sa tu však nimi zaoberať.

O p r a v a

V XI. pokračovaní *Úvodu do formálnej logiky,* uverejnenom v 3. čísle Filozofie, roč. XXIV, sa vyskytujú tieto tlačové chyby: Na s. 321 v 8. riadku zdola miesto „$l \leqq i \leqq n$" má byť „$1 \leqq i \leqq n$" a v 7. riadku zdola namiesto „ktoré" má byť „ktoré každej". Na s. 322 v tab. 14 sú v poslednom stĺpci prehodené symboly pravdivostných hodnôt: v predposlednom riadku stĺpca má byť symbol „**N**" a nad ním symbol „**P**". Na s. 328 v 8. riadku zdola namiesto „$\wedge$" má byť „$\vee$". Na s. 324 v 12. riadku zhora namiesto „A" má byť „A_n" a v 26. riadku namiesto „cheme" má byť „chceme". Na s. 325 v tvrdení 2 chýba veta: (k) A, B $\Vdash$ A $\wedge$ B. Na s. 326 v 24. riadku zhora namiesto „formula" má byť „formule" a v 2. riadku zdola namiesto „M_v" má byť „M_{VL}".

Red.