ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY (XI)

PAVEL CMOREJ

§ 7. Výrokovologické vyplývanie

7.1 **Splňanie a výrokovologické vyplývanie.** Jedným z najdôležitejších sémantických vzťahov medzi množinami formúl a formulami je výrokovologické vyplývanie. Pojem výrokovologického vyplývania definujeme pomocou pojmu splňania, ktorý vymedzuje df. 5.

Definícia 5. Nech F je formula a χ ľubovoľné udelenie hodnôt všetkým jej premenným. Budeme hovoriť, že udelenie hodnôt χ **splňa** formulu F vtedy a len vtedy, keď $Hod(F, \chi) = \mathbf{P}$.

Napr. formulu $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ splňa každé udelenie hodnôt, ktoré premennej p priraďuje hodnotu **P** a premennej q hodnotu **P** alebo **N** (pozri tab. 10). Formuly, ktoré splňa aspoň jedno udelenie hodnôt sa nazývajú *splniteľné*. Každá neutrálna formula a tautológia je splniteľná formula. Je zrejmé, že kontradikcie nepatria k splniteľným formulám. Tabuľkovou metódou možno o každej formule zistiť, či je splniteľná.

Ak F je premenná, udelenie hodnôt χ splňa F práve vtedy, keď χ priraďuje premennej F hodnotu **P**, iba v tomto prípade je totiž $Hod\,(F, \chi) = \mathbf{P}$. Keďže $Hod\,(\sim A, \chi) = \mathbf{P}$ vtedy, keď $Hod\,(A, \chi) = \mathbf{N}$, udelenie hodnôt χ splňa formulu $\sim A$ práve vtedy, keď nesplňa formulu A a naopak. Udelenie hodnôt χ splňa formulu $A \wedge B$ práve vtedy, keď splňa formulu A i formulu B, pretože $Hod\,(A \wedge B, \chi) = \mathbf{P}$ vtedy a len vtedy, keď $Hod\,(A, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod\,(B, \chi) = \mathbf{P}$. Čitateľ sám ľahko dokáže, za akých podmienok udelenie hodnôt χ splňa formuly tvaru $A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$.

Definícia 6. Predpokladajme, že $\{A_1, \ldots, A_n\}$ je nejaká konečná množina formúl[115] a χ ľubovoľné udelenie hodnôt všetkým premenným formúl $A_1, \ldots, A_n$. Budeme hovoriť, že udelenie hodnôt χ **splňa množinu formúl** $\{A_1, \ldots, A_n\}$ práve vtedy, ke χ splňa každú formulu A_i $(l \leq i \leq n)$.

Množinu formúl $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow r\}$ splňa iba také udelenie hodnôt, ktoré z premenných p, q, r priraďuje hodnotu **P**, lebo iba pri takom udelení hodnôt má každá z formúl uvedenej množiny hodnotu **P**.[116]

[115] Predpoklad konečnosti množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ nie je nevyhnutný, ale v našom výklade nebudeme uvažovať o splňaní nekonečných množín formúl, a preto ho uvádzame.

[116] Medzi udeleniami hodnôt, ktoré priraďujú nejaké hodnoty práve premenným p, q, r existuje presne jedno také, ktoré splňa množinu formúl $\{p,\ p \rightarrow q,\ q \rightarrow r\}$.

Ľubovoľná množina formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sa nazýva *splniteľná* vtedy, keď existuje aspoň jedno udelenie hodnôt χ, ktoré spĺňa množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Pre naše úvahy má zmysel uvažovať aj o spĺňaní prázdnej množiny formúl. Ukážeme, že podľa df. 6 prázdnu množinu formúl spĺňa každé udelenie hodnôt. Nech M je ľubovoľná množina formúl. Podľa df. 6 ľubovoľné udelenie hodnôt χ spĺňa množinu M práve vtedy, keď pre každú formulu F platí, že ak F patrí do M, tak χ spĺňa F (to je len iná, snáď trochu presnejšia formulácia df. 6). Ak M je prázdna množina, metajazyková forma „F patrí do M" nadobúda pri každom udelení hodnôt premennej „F" hodnotu **N** a forma „Ak F patrí do M, tak χ spĺňa F" pri každom udelení hodnôt premenným „F", „χ" hodnotu **P** (ak antecedent implikácie nadobúda vždy hodnotu **N**, celá implikácia nadobúda vždy hodnotu **P**); z toho vyplýva, že celý definiens „Pre každú formulu F platí, že..." nadobúda hodnotu **P** pri ľubovoľnom udelení hodnôt premennej „χ", a teda túto hodnotu nadobúda vždy aj definiendum „χ spĺňa množinu M" — to znamená, že každé udelenie hodnôt χ spĺňa prázdnu množinu M.

Definícia 7. Nech $A_1, \ldots, A_n$, B sú formuly a χ ľubovoľné udelenie hodnôt všetkým premenným týchto formúl. Formula B **výrokovologicky vyplýva** z množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$ (symbolicky: $\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$) vtedy a len vtedy, keď pre každé udelenie hodnôt χ platí, že ak χ spĺňa množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$, tak χ spĺňa formulu B.[117]

Namiesto „$\{A_1, \ldots, A_n\} \Vdash B$" budeme často písať iba „$A_1, \ldots, A_n \Vdash B$". (Vo výklade výrokovej logiky budeme znakom $\Vdash$ vždy označovať vzťah výrokovologického vyplývania, neskôr budeme týmto znakom označovať logické vyplývanie; z kontextu bude vždy zrejmé, či znak $\Vdash$ používame na označenie výrokovologického alebo logického vyplývania.[118]

Napr. z množiny $\{p \to q,\ q \to r\}$ výrokovologický vyplýva formula $p \to r$, o čom sa možno tiež presvedčiť tabuľkovou metódou:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
N	N	N	P	P	P
N	N	P	P	P	P
N	P	N	P	N	P
N	P	P	P	P	P
P	N	N	N	P	N
P	N	P	N	P	N
P	P	N	P	N	P
P	P	P	P	P	P

Tab. 14

[117] To znamená, že formula B výrokovologicky vyplýva z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ práve vtedy, keď neexistuje žiadne udelenie hodnôt, ktoré spĺňa množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a nespĺňa formulu B.

[118] Výrokovologické vyplývanie je čiastkovým prípadom logického vyplývania. Neskôr ukážeme, že ak formula B výrokovologicky vyplýva z $\{A_1, \ldots, A_n\}$, tak B vyplýva z tejto množiny i logicky (opak vždy neplatí).

V tab. 14. skúmame iba tie udelenia hodnôt, ktoré priraďujú nejaké hodnoty práve premenným p, q, r, vyskytujúcim sa v uvažovaných formulách $p \to q$, $q \to r$, $p \to r$. Bolo by zbytočné uvažovať aj o udeleniach hodnôt, ktoré priraďujú nejaké hodnoty aj iným premenným, lebo každé z nich môže premenným p, q, r priradiť len také hodnoty ako udelenia hodnôt uvedené v tabuľke.[119] Množinu formúl $\{p \to q, q \to r\}$ spĺňajú udelenia hodnôt uvedené v 1., 2., 4. a 8. riadku tabuľky; pri každom z týchto udelení nadobúdajú obidve formuly množiny $\{p \to q, q \to r\}$ hodnotu **P**. Pri týchto udeleniach hodnôt nadobúda hodnotu **P** i formula $p \to r$, to znamená, že každé udelenie hodnôt, ktoré spĺňa množinu formúl $\{p \to q, q \to r\}$, spĺňa i formulu $p \to r$, t.j. táto formula výrokovologicky vyplýva z uvedenej množiny formúl.

Upozorňujeme na to, že formula B môže výrokovologicky vyplývať z množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i vtedy, keď existujú také udelenia hodnôt, pri ktorých niektoré (alebo všetky) z formúl A_i nadobúdajú hodnotu **N** a formula B tiež hodnotu **N** alebo **P**. Formuly $A_1, \ldots, A_n$ a formula B nemusia pri každom udelení hodnôt nadobúdať hodnotu **P**. Okolnosť, že neexistuje ani jedno udelenie hodnôt, ktoré by spĺňalo množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a nespĺňalo formulu B je dostatočnou podmienkou výrokovologického vyplývania formuly B z množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Ak formula B výrokovologicky vyplýva z množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$, môžu existovať také udelenia hodnôt, pri ktorých

(a) každá formula z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i formula B nadobúdajú hodnotu **N**,
(b) každá formula z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ nadobúda hodnotu **N** a formula B hodnotu **P**,
(c) niektoré formuly z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ nadobúdajú hodnotu **N**, iné hodnotu **P** a formula B hodnotu **N**,
(d) niektoré formuly z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ nadobúdajú hodnotu **N**, iné hodnotu **P** a formula B hodnotu **P**,
(e) každá formula z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ i formula B nadobúdajú hodnotu **P**,

ale neexistuje nijaké udelenie hodnôt, pri ktorom

(f) každá formula z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ nadobúda hodnotu **P** a formula B hodnotu **N**.[120]

Ak $A_1, \ldots, A_n$, B sú dané formuly, pre ktoré platí, že z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ výrokovologicky vyplýva B, z udelení hodnôt uvedených v (a) — (e) často existujú iba niektoré druhy, napr. v prípade formúl $p \to q$, $q \to r$, $p \to r$ existujú iba udelenia hodnôt, spomenuté v (c), (d) a (e) (pozri tab. 14). V niektorých prípadoch existujú iba udelenia hodnôt uvedené v jednom z bodov (a) — (e), napr. keď B je formula $\sim (p \to (q \to p))$, vyplývajúca z množiny $\{\sim (p \wedge \sim p), \sim (q \to q)\}$ existujú iba udelenia hodnôt spomenuté v bode (a), čo si čitateľ sám ľahko overí.

Pretože prázdnu množinu formúl spĺňa každé udelenie hodnôt χ, ľubovoľná formula B vyplýva z prázdnej množiny formúl práve vtedy, keď ju spĺňa každé udelenie hodnôt, t. j. keď B je tautológia, čo budeme zapisovať takto: $\Vdash B$. Je zrejmé, že tautológia vyplýva nielen z prázdnej, ale i z ľubovoľnej neprázdnej

---

[119] Uvažovali sme o tom aj pri tabuľkovom overovaní formúl (pozri 6.2).

[120] Podmienky (a) — (f) sa vzťahujú i na logické vyplývanie.

množiny formúl. Kontradikcie vyplývajú iba z takých množín formúl, ktoré nesplňa ani jedno udelenie hodnôt.

Teraz dokážeme tvrdenie, ktoré poukazuje na zaujímavú súvislosť medzi výrokovologickým vyplývaním nejakej formuly B z množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a tautológiami určitej štruktúry, zloženými z podformúl $A_1, \ldots, A_n$, B. Je zrejmé, že ľubovoľná formula tvaru $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ $(n \geqq 1)$ nadobúda pri danom udelení hodnôt hodnotu **P** práve vtedy, keď každá formula A_i nadobúda pri tomto udelení hodnotu **P**.[121] Je tiež zrejmé, že ak $\{A_1, \ldots, A_n\}$ je konečná množina formúl, ľubovoľné udelenie hodnôt χ splňa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ vtedy, keď $Hod\ (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n, \chi) = \mathbf{P}$.

T v r d e n i e 1. Nech $A_1, \ldots, A_n$, B sú ľubovoľné formuly. $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ vtedy a len vtedy, keď formula tvaru $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A\ \ ) \rightarrow B$ je tautológia.

D ô k a z. (i) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$, tak neexistuje žiadne udelenie hodnôt, ktoré splňa množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a nesplňa formulu B, to znamená, že neexistuje žiadne udelenie hodnôt χ, pri ktorom $Hod(A_1, \chi) = \mathbf{P}, \ldots, Hod(A_n, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$. Teda neexistuje žiadne udelenie hodnôt, pri ktorom $\mathrm{Hod}(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$, čiže neexistuje žiadne udelenie hodnôt, pri ktorom by formula tvaru $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ nadobúdala hodnotu **N**, čo svedčí o tom, že táto formula je tautológia pozri df. 3).

(ii) Ak $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ je tautológia, neexistuje udelenie hodnôt χ, pri ktorom by $Hod(A_1 \wedge A_2 \wedge A_n, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$. Keďže $Hod\ (A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n, \chi) = \mathbf{P}$ práve vtedy, keď χ splňa množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$, potom neexistuje udelenie hodnôt, ktoré by splňalo $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a nesplňalo B, teda $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$.

Ak cheme zistiť, či formula B výrokovologicky vyplýva z konečnej množiny formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$, stačí zistiť, či formula tvaru $(A_1 \wedge A_2 \wedge\ \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ je tautológia (a naopak). O ľubovoľnej formule vieme v konečnom počte krokov efektívne rozhodnúť (tabuľkovou metódou a inými spôsobmi), či je tautológia, to znamená, že o ľubovoľnej množine formúl $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a formule B možno efektívne rozhodnúť, či B výrokovologicky vyplýva z $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Keď za každú premennú v ktorejkoľvek z formúl $A_1, \ldots, A_n$, B dosadíme nejaký výrok nejakého jazyka J (za každý výskyt tej istej premennej vo všetkých formulách ten istý výrok), dostaneme z nich výroky $V_1, \ldots, V_n$, W. Ak formula B výrokovologicky vyplýva z množiny $\{A_1, \ldots, A_n\}$ aj o výroku W budeme hovoriť, že výrokovologicky vyplýva z množiny výrokov $\{V_1, \ldots, V_n\}$. Z rozboru prípadov (a) — (f) výrokovologického vyplývania formúl plynie, že výrok W môže výrokovologicky vyplývať z množiny nepravdivých výrokov i z množiny výrokov, medzi ktorými sú pravdivé aj nepravdivé výroky, pričom sám môže byť pravdivý alebo nepravdivý, ale z množiny pravdivých výrokov môže vyplývať len pravdivý výrok. Napr. z výrokov prirodzeného jazyka „Ak dnes je utorok, tak zajtra je streda", „Dnes je utorok" výrokovologicky vyplýva výrok „Zajtra je streda", a to nielen v utorok, ale aj v každý iný deň, v ktorý budú výroky „Dnes je utorok", „Zajtra je streda" nepravdivé.

121 Čitateľ to hravo dokáže sám.

Dôkaz nasledujúceho tvrdenia o vyplývaní niektorých formúl prenechávame čitateľovi.

T v r d e n i e 2. Pre ľubovoľné formuly A, B, C platí, že:

(a) $A \rightarrow B, A \Vdash B$

(b) $A \rightarrow B, \sim B \Vdash \sim A$

(c) $A \wedge B \Vdash A$

(d) $A \wedge B \Vdash B$

(e) $A \Vdash A \vee B$

(f) $B \Vdash A \vee B$

(g) $A \vee B, \sim A \Vdash B$

(h) $A \leftrightarrow B \Vdash A \rightarrow B$

(ch) $A \leftrightarrow B \Vdash B \rightarrow A$

(i) $A \rightarrow B, B \rightarrow A \Vdash A \leftrightarrow B$

(j) $A, \sim A \Vdash B$

Medzi výrokovologickým vyplývaním a splniteľnosťou existuje určitý vzťah, ktorý bližšie určuje toto tvrdenie:

T v r d e n i e 3. Nech $A_1, \ldots, A_n$, B sú ľubovoľné formuly.

(a) $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ vtedy a len vtedy, keď množina $\{A_1, \ldots, A_n, \sim B\}$ nie je splniteľná.

(b) $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ a $A_1, \ldots, A_n \Vdash \sim B$ vtedy a len vtedy, keď $\{A_1, \ldots, A_n\}$ nie je splniteľná množina formúl.

D ô k a z. (a) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$, tak neexistuje udelenie hodnôt, ktoré by spĺňalo $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a nespĺňalo B, teda ani udelenie hodnôt, ktoré by spĺňalo $\{A_1, \ldots A_n\}$ a zároveň spĺňalo $\sim B$, to znamená, že $\{A_1, \ldots, A_n, \sim B\}$ je nesplniteľná. Ak $\{A_1, \ldots, A_n, \sim B\}$ je nesplniteľná množina, neexistuje udelenie hodnôt, ktoré spĺňa formuly $A_1, \ldots, A_n, \sim B$, t.j. neexistuje udelenie hodnôt, ktoré spĺňa $\{A_1, \ldots, A_n\}$ a nespĺňa B, čiže $A_1, \ldots A_n \Vdash B$.

(b) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ a $A_1, \ldots, A_n \Vdash \sim B$, tak každé udelenie hodnôt spĺňajúce množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$ spĺňa B i $\sim B$. Lenže neexistuje žiadne udelenie hodnôt spĺňajúce B a zároveň $\sim B$ a teda ani udelenie hodnôt spĺňajúce množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Ak $\{A_1, \ldots, A_n\}$ je nesplniteľná množina formúl, tak neexistuje žiadne udelenie hodnôt, ktoré by spĺňalo túto množinu a nespĺňalo formulu B alebo $\sim B$, teda platí, že $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ a $A_1, \ldots, A_n \Vdash \sim B$.

Na záver našich úvah o výrokovologickom vyplývaní uvádzame ešte jedno tvrdenie, v ktorom sa poukazuje na celý rad zaujímavých vlastností tohto vyplývania.

T v r d e n i e 4. Pre každú formulu $A_1, \ldots, A_n, B, C, D$ platí:

(a) $A_1, \ldots, A_n \Vdash A_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$

(b) Ak $A_2, \ldots, A_n \Vdash B$, tak $A_1, A_2, \ldots, A_n \Vdash B$.

(c) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash \sim \sim B$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$.

(d) Ak $A_1, \ldots, A_n, B \Vdash C$ a $A_1, \ldots, A_n, B \Vdash \sim C$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash \sim B$.

(e) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B \rightarrow C, A_1, \ldots, A_n \Vdash B$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash C$.

(f) Ak $A_1, \ldots, A_n$ $B \Vdash C$, tak $A_1, \ldots A_n \Vdash B \rightarrow C$

(g) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B \wedge C$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ a $A_1, \ldots, A_n \Vdash C$.

(h) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$ a $A_1, \ldots, A_n \Vdash C$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B \wedge C$.

(ch) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B \vee C$ a $A_1, \ldots, A_n, B \Vdash D$ a $A^1, \ldots, A_n, C \Vdash D$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash D$.

(i) Ak $A_1, \ldots, A_n, B \Vdash D$ a $A_1, \ldots, A_n, C \Vdash D$, tak $A_1, \ldots, A_n, B \vee C \Vdash D$.

(j) Ak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B \vee C$ alebo $A_1, \ldots, A_n \Vdash C \vee B$.

(k) Ak $A_1, \ldots, A_n, B \Vdash C$ a $A_1, \ldots, A_n, C \Vdash B$, tak $A_1, \ldots, A_n \Vdash B \leftrightarrow C$.

D ô k a z. Nebudeme tu dokazovať všetky vety tohto tvrdenia, väčšinu dôkazov môže urobiť čitateľ ako cvičenie. Na ukážku dokážeme (d), (f) a (ch).

(d) Predpokladajme, že existuje udelenie hodnôt χ, ktoré spĺňa $\{A_1, \ldots, A_n\}$, no nespĺňa $\sim B$, t.j. spĺňa B, potom χ spĺňa i množinu $\{A_1, \ldots, A_n, B\}$, a teda podľa predpokladu i formulu C a zároveň $\sim C$. Vieme však, že žiadne také udelenie hodnôt neexistuje, a preto musí platiť, že $A_1, \ldots, A_n \Vdash \sim$ B.

(f) Predpokladajme, že existuje udelenie hodnôt χ, ktoré spĺňa $\{A_1, \ldots, A_n$, no nespĺňa $B \rightarrow C$, potom χ spĺňa B a nespĺňa C, a teda spĺňa aj množinu $\{A_1, \ldots, A_n, B\}$ a nespĺňa C, čo je v spore s predpokladom.

(ch) Keby D nevyplývalo z $\{A_1, \ldots, A_n\}$, existovalo by udelenie hodnôt χ spĺňajúce množinu $\{A_1, \ldots, A_n\}$, ale nespĺňajúce D. Keďže formula $B \vee C$ podľa predpokladu vyplýva z $\{A_1, \ldots, A_n\}$ platí, že $Hod(B \vee C, \chi) =$ P. To znamená, že $Hod(B, \chi) =$ P alebo $Hod(C, \chi) =$ P, čiže χ spĺňa buď množinu $\{A_1, \ldots, A_n, B\}$ alebo množinu $\{A_1, \ldots, A_n, C\}$. V obidvoch prípadoch musí χ spĺňať aj formulu D, čo je v spore s nepriamym predpokladom.

7.2 **Výrokovologická rovnocennosť formúl.** Niektoré formuly majú tú vlastnosť, že pri každom udelení hodnôt χ, ktoré priraďujú nejaké hodnoty ich premenným, nadobúdajú vždy tú istú pravdivostnú hodnotu.

D e f i n í c i a 8. Nech A a B sú formuly a χ ľubovoľné udelenie hodnôt všetkým premenným týchto formúl. Budeme hovoriť, že formula A je **výrokovologicky rovnocenná** formula B (symbolicky: $A \dashv\Vdash B$) vtedy a len vtedy, keď pre každé udelenie hodnôt χ platí, že $Hod(A, \chi) = Hod(B, \chi)$.[122]

Formuly $p \rightarrow q$, $\sim q \rightarrow \sim p$ sú výrokovologicky rovnocenné, o čom sa tiež môžeme presvedčiť tabuľkovou metódou:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
N	N	P	P
N	P	P	P
P	N	N	N
P	P	P	P

Tab. 15

Na tab. 15 vidíme, že obidve skúmané formuly majú pri každom udelení hodnôt tú istú hodnotu. Z df.3 a df.8 jasne vyplýva, že $A \dashv\Vdash B$ práve vtedy, keď formula tvaru $A \leftrightarrow B$ je tautológia. To znamená, že aj problém výrokovologickej rovnocennosti je transformovateľný na problém, či formula určitého tvaru je tautológia. Ak V a W sú výroky nejakého jazyka J, ktoré sa dajú získať dosa-

[122] Výrokovologická rovnocennosť je čiastkovým prípadom logickej rovnocennosti. Znakom pre výrokovologickú rovnocennosť budeme neskôr označovať aj logickú rovnocennosť. Vo výrokovej logike (presnejšie, v M_V) **budeme tento znak používať** vždy na označenie výrokovologickej rovnocennosti.

dením nejakých výrokov za premenné rovnocenných formúl A, B, aj výroky V, W budeme nazývať *výrokovologicky rovnocennými*.

T v r d e n i e 5. Predpokladajme, že A a B sú formuly. $A \dashv\Vdash B$ vtedy a len vtedy, keď $A \Vdash B$ a $B \Vdash A$.

D ô k a z. (i) Ak $A \dashv\Vdash B$, tak A i B majú pri každom udelení hodnôt tú istú hodnotu, teda neexistuje udelenie hodnôt, ktoré by spĺňalo A a nespĺňalo B (a naopak), čiže $A \Vdash B$, $B \Vdash A$.

(ii) Ak $A \Vdash B$ a $B \Vdash A$, tak každé udelenie hodnôt, ktoré spĺňa A, spĺňa i B a naopak, to znamená, že každé udelenie hodnôt χ spĺňa A vtedy a len vtedy, keď spĺňa B, t.j. $Hod(A, \chi) = \mathrm{P}$ práve vtedy, keď $Hod(B, \chi) = \mathrm{P}$, z čoho vyplýva, že $Hod(A, \chi) = \mathrm{N}$ práve vtedy, keď $Hod(B, \chi) = \mathrm{N}$, čiže pri každom udelení hodnôt χ platí, že $Hod(A, \chi) = Hod(B, \chi)$.

Aj nasledujúce tvrdenie uvádzame bez dôkazu.

T v r d e n i e 6. Pre ľubovoľné formuly A, B, C a ľubovoľnú tautológiu F platí, že

(a) $A \wedge A \dashv\Vdash A$
(b) $A \vee A \dashv\Vdash A$
(c) $A \wedge F \dashv\Vdash A$
(d) $A \vee F \dashv\Vdash F$
(e) $A \wedge \sim F \dashv\Vdash \sim F$
(f) $A \vee \sim F \dashv\Vdash A$
(g) $\sim\sim A \dashv\Vdash A$
(h) $A \wedge B \dashv\Vdash B \wedge A$
(ch) $A \vee B \dashv\Vdash B \vee A$
(i) $A \leftrightarrow B \dashv\Vdash B \leftrightarrow A$
(j) $(A \wedge B) \wedge C \dashv\Vdash A \wedge (\mathrm{B} \wedge C)$
(k) $(A \vee B) \vee C \dashv\Vdash A \vee (E \vee C)$
(l) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \dashv\Vdash A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$
(m) $A \wedge (B \vee C) \dashv\Vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(n) $A \vee (B \wedge C) \dashv\Vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(o) $A \wedge B \dashv\Vdash \sim(\sim A \vee \sim B)$
(p) $A \vee B \dashv\Vdash \sim(\sim A \wedge \sim B)$
(r) $A \rightarrow B \dashv\Vdash \sim A \vee B$
(s) $A \leftrightarrow B \dashv\Vdash (\sim A \vee B) \wedge (\sim B \vee A)$
(t) $A \rightarrow B \dashv\Vdash \sim(A \wedge \sim B)$
(u) $A \wedge B \rightarrow C \dashv\Vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

OPRAVA

V IX. pokračovaní *Úvodu do formálnej logiky*, uverejnenom v 1. čísle Filozofie, roč. XXIV, sa vyskytujú tieto tlačové chyby: Na s. 107 v 6. riadku zhora miesto „v druhom výraz" má byť „v druhom výraz)". Na s. 109 sú poprehadzované riadky, po 6. riadku má nasledovať 10. riadok a až po ňom 7., 8. a 9. V 16. riadku zdola namiesto druhého výskytu symbolu „$\wedge$" má byť „$\vee$". *Red.*