ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY

PAVEL CMOREJ

X

§ 6. Hodnota formúl

6.1 Interpretácia primitívnych symbolov a formúl. Hoci niektoré výrazy výrokovej logiky sme nazvali výrokovými premennými, iné výrokovými spojkami alebo zátvorkami, spojku $\sim$ negátorom, spojku $\wedge$ konjunktorom atď., v skutočnosti sme sa týmito výrazmi zaoberali z čisto syntaktického hľadiska, skúmali sme ich len ako objekty určitého tvaru a štruktúry a ani jednému z nich sme zatiaľ neudelili nijaký význam. Pravda, už pri voľbe uvedených názvov sme prihliadali na to, ako budeme neskôr tieto výrazy interpretovať. Teraz pristúpime k interpretácii primitívnych symbolov a formúl výrokovej logiky.

Vlastnými primitívnymi symbolmi sú iba výrazy $p, q, r, s, \ldots$, ostatné primitívne symboly sú nevlastné. Výrazy $p, q, r, s, \ldots$ sú premenné, oblasť ich premennosti je množina pravdivostných hodnôt $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$; sú to teda výrokové premenné. Význam nevlastných výrazov určíme v definícii pojmu hodnoty, v ktorej ukážeme, aký vplyv majú na význam správne utvorených zložených výrazov, v ktorých sa nachádzajú. V tejto definícii sa vymedzuje pojem hodnoty ľubovoľnej formuly pri ľubovoľnom udelení hodnôt jej premenným, čím sa presne určuje jednak význam nevlastných výrazov, vyskytujúcich sa v zložených formulách, jednak význam formúl, ktoré sa tu nepriamo interpretujú ako výrokové formy. Význam formy pokladáme totiž za určený stanovením jej hodnoty pri ľubovoľnom udelení hodnôt všetkým jej premenným.[106]

Pri formulácii definície hodnoty ako aj iných definícií a tvrdení budeme v M_{VL} často používať výrazy $\chi, \chi', \chi_1, \chi_2, \ldots$. Sú to premenné, oblasťou ich premennosti je množina všetkých udelení hodnôt výrokovým premenným. Pod udelením hodnoty tu rozumieme ľubovoľné priradenie hodnôt všetkým premenným nejakej množiny výrokových premenných. Hodnotu, ktorú udelenie hodnôt χ priraďuje nejakej premennej, napr. p, budeme aj v M_{VL} označovať symbolom $\chi(p)$. Výraz „$Hod(F,\chi)$" budeme v M_{VL} používať ako skratku výrazu „hodnota formuly F pri udelení hodnôt χ, ktoré každej premennej tejto formuly priraďuje nejakú hodnotu".

D e f i n í c i a 3. Nech F je ľubovoľná formula výrokovej logiky a χ nejaké udelenie hodnôt všetkým premenným tejto formuly.

1. Ak F je výroková premenná, $Hod(F,\chi) = \chi(F)$.

2. (i) Ak F je formula tvaru $(\sim A)$, $Hod(F,\chi) = \mathbf{P}$ práve vtedy, keď $Hod(A,\chi) = \mathbf{N}$; $Hod(F,\chi) = \mathbf{N}$ vtedy, keď $Hod(A,\chi, = \mathbf{P}$.

(ii) Ak F je formula tvaru $(A \wedge B)$, $Hod(F,\chi) = \mathbf{P}$ práve vtedy, keď $Hod(A,\chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(B,\chi) = \mathbf{P}$. $Hod(F,\chi) = \mathbf{N}$ práve vtedy, keď $Hod(A,\chi) = \mathbf{N}$ alebo[107] $Hod(B,\chi) = \mathbf{N}$.

---

[106] Od iných významových aspektov foriem abstrahujeme (pozri 2.5).

[107] Výraz „alebo" sa tu používa v nevylučovacom zmysle.

(iii) Ak F je formula tvaru $(A \vee B)$, $Hod(F, \chi) = \mathbf{P}$ práve vtedy, keď $Hod(A, \chi) = \mathbf{P}$ alebo[107] $Hod(B, \chi) = \mathbf{P}$. $Hod(F, \chi) = \mathbf{N}$ vtedy, keď $Hod(A, \chi) = \mathbf{N}$ a $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$.

(iv) Ak F je formula tvaru $(A \rightarrow B)$, $Hod(F, \chi) = \mathbf{P}$ práve vtedy, keď $Hod(A, \chi) = \mathbf{N}$ alebo[107] $Hod(B, \chi) = \mathbf{P}$. $Hod(F, \chi) = \mathbf{N}$ práve vtedy, keď $Hod(A, \chi) = \mathbf{P}$ a $Hod(B, \chi) = \mathbf{N}$.

(v) Ak F je formula tvaru $(A \leftrightarrow B)$, $Hod(F, \chi) = \mathbf{P}$ práve vtedy, keď $Hod(A, \chi) = Hod(B, \chi)$. $Hod(F, \chi) = \mathbf{N}$ vtedy, keď $Hod(A, \chi) \neq Hod(\mathrm{B}, \chi)$.

Táto definícia interpretuje symbol $\sim$ ako spojku „nie je pravda, že", symbol $\wedge$ ako spojku „a", symbol $\vee$ ako spojku „alebo", symbol $\rightarrow$ ako spojku „ak . . ., tak - - -" a symbol $\leftrightarrow$ ako spojku „vtedy a len vtedy, keď". Vzhľadom k tomu môžeme ľubovoľnú formulu tvaru $(\sim A)$ nazývať negáciou a čítať ju „nie je pravda, že A",[108] formulu tvaru $(A \wedge B)$ konjunkciou a čítať ju „A a B" atď.[109] Uvedená interpretácia symbolov $\sim$, $\wedge$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ objasňuje aj voľbu ich mien „negátor", „konjunktor", „disjunktor", „implikátor" a „ekvivalentor" v M_{VL}.

Na základe def. 3 možno určiť hodnotu každej formuly pri ľubovoľnom udelení hodnôt všetkým jej premenným. Niektoré formuly nadobúdajú pri každom udelení hodnôt hodnotu **P**, iné pri niektorých udeleniach hodnotu **P** a pri niektorých udeleniach hodnotu **N** a ostatné pri každom udelení hodnôt — hodnotu **N**.

D e f i n í c i a 4. Nech F je nejaká formula a χ ľubovoľné udelenie hodnôt všetkým jej premenným. Formula F sa nazýva **tautológia**[110] **výrokovej logiky**, keď pre každé udelenie hodnôt χ platí, že $Hod(F, \chi) = \mathbf{P}$. Ak pre každé udelenie hodnôt χ platí, že $Hod(F, \chi) = \mathbf{N}$, formula F sa nazýva **kontradikcia** výrokovej logiky. Formula, ktorá nie je ani tautológia ani kontradikcia sa nazýva **neutrálna formula** výrokovej logiky.

Medzi výrazmi výrokovej logiky sa nevyskytujú nijaké konštanty (ani výrokové, t. j. výroky). Symboly pravdivostných hodnôt „P", „N" patria do M_{VL} [111] a výrokové spojky sa tu chápu ako nevlastné výrazy. Z interpretácie primitívnych symbolov a df. 1 je zrejmé, že každá formula je forma. Konštantné výroky sa medzi výrazmi výrokovej logiky nevyskytujú. Pri aplikáciách výrokovej logiky sa často skúmajú a analyzujú výroky, ktoré možno z formúl výrokovej logiky získať dosadením nejakých výrokov za ich premenné. Ľubovoľný výrok V nejakého jazyka J sa nazýva **výrokovo-logicky pravdivý** práve vtedy, keď existuje taká formula F, ktorá je tautológia a V je výrok, ktorý možno z formuly F získať dosadením nejakých výrokov za všetky jej premenné (pričom za každý výskyt tej istej premennej sa dosadzuje ten istý výrok). Výrok V sa nazýva **výrokovo-logicky nepravdivý**, keď formula F, z ktorej ho možno získať dosadením za všetky jej premenné, je kontradikcia.

6.2 **Tabuľkové overovanie formúl výrokovej logicky.** O ľubovoľnej formule F možno efektívne rozhodnúť, či je tautológia, kontradicia alebo neutrálna for-

---

[108] Prípadne „non A" alebo „nie A", čo je výhodné najmä pri čítaní zložitejších formúl.

[109] Imlikáciu $A \rightarrow B$ niekedy čítame ako „A inmplikuje B", kde výraz „implikuje" má ten istý význam ako spojka „ak . . ., tak - - -". Ekvivalencia $A \leftrightarrow B$ sa niekedy číta ako „A ekvivalentné s B".

[110] Tautológie sa niekedy nazývajú *zákonmi* výrokovej logiky.

[111] Symboly pravdivostných hodnôt (resp. aspoň jeden z nich) patria v niektorých systémoch medzi primitívne symboly výrokovej logiky.

mula.[112] Treba len zistiť, aké hodnoty nadobúda F pri jednotlivých udeleniach hodnôt jej premenným. Ak sa vo formule F vyskytuje presne n $(n \geq 1)$ navzájom rozličných premenných, existuje 2^n rôznych udelení hodnôt, ktoré udeľujú nejaké hodnoty všetkým premenným formuly F a len týmto premenným.[113] Napr. keďže vo formule $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ sa vyskytujú dve rôzne premenné, existuje 2^2 rôznych udelení hodnôt, ktoré priraďujú nejaké hodnoty práve premenným tejto formuly. Tieto udelenia hodnôt možno prehľadne uviesť v tabuľke:

p	q	
N	N	
N	P	
P	N	
P	P	

Tab. 8.

Každý riadok, v ktorom sa nachádzajú symboly pravdivostných hodnôt predstavuje jedno zo štyroch možných udelení hodnôt, ktoré priraďujú nejaké hodnoty práve premenným p, q. Pod jednotlivými premennými sa nachádzajú symboly pravdivostných hodnôt, priradených príslušnými udeleniami hodnôt týmto premenným. Napr. predposledný riadok tabuľky predstavuje udelenie hodnôt, ktoré premennej p priraďuje hodnotu P a premennej q — hodnotu N.

Tabuľka všetkých udelení hodnôt, ktoré priraďujú nejaké hodnoty práve premenným p, q, r obsahuje osem (t. j. 2^3) riadkov, predstavujúcich osem rôznych udelení hodnôt týmto premenným (pozri tab. 9).

p	q	r	
N	N	N	
N	N	P	
N	P	N	
N	P	P	
P	N	N	
P	N	P	
P	P	N	
P	P	P	

Tab. 9.

Udelenia hodnôt priraďujúce nejaké hodnoty aj premenným, ktoré sa vo formule F nevyskytujú (ktoré však priraďujú určitú hodnotu každej premennej formuly F) nemusíme brať do úvahy, pretože každé z nich priraďuje premenným formuly F tie isté hodnoty ako niektoré z 2^n udelení hodnôt, ktoré udeľujú hodnoty iba premenným formuly F. To znamená, že ak χ a χ' sú dve rôzne

[112] T. j. v konečnom počte krokov pomocou presne určených a mechanicky realizovateľných operácií.

[113] Je zrejmé, že $\chi = \chi'$ vtedy a len vtedy, keď χ priraďuje nejaké hodnoty tým istým premenným ako χ', pričom χ udeľuje každej z nich tú istú hodnotu ako χ'.

udelenia hodnôt, ktoré premenným nejakej formuly F priraďujú tie isté hodnoty (ale nejaké hodnoty priraďujú aj premenným, ktoré sa v F nevyskytujú) $Hod(F, \chi) = Hod(F,\chi')$ pretože hodnota F závisí iba od toho, aké hodnoty sú priradené *jej* premenným. Porovnaním tab. 8 a 9 ľahko zistíme, že každé udelenie hodnôt premenným p, q, r priraďuje premenným p, q iba tie hodnoty, ktoré im udeľuje niektoré z udelení hodnôt, uvedených v tab. 8. Preto budeme ďalej uvažovať len o udeleniach hodnôt, ktoré priraďujú nejaké hodnoty práve premenným danej formuly.

Teraz sa zoznámime s tzv. *tabuľkovou metódou overovania formúl* výrokovej logiky. Touto metódou možno o ľubovoľnej formule F na základe konečného počtu krokov efektívne rozhodnúť, či je tautológia, kontradikcia alebo neutrálna formula. Hodnotu formuly F pri ľubovoľnom udelení hodnôt jej premenným nájdeme tak, že zistíme, aké hodnoty nadobúdajú pri danom udelení hodnôt všetky jej podformuly, pričom postupujeme od najjednoduchších podformúl (t. j. premenných) k stále zložitejším až kým nedôjdeme k formule F. Z df. 3 vieme, že hodnota ľubovoľnej premennej A pri určitom udelení hodnôt χ je $\chi(A)$, t. j. pravdivostná hodnota, ktorú χ priraďuje premennej A. Hodnota zložených podformúl závisí od hodnôt, ktoré pri danom udelení hodnôt nadobúdajú ich bezprostredné podformuly. Skúmajme, či formula $(p \to q) \to p$ je tautológia, kontradikcia alebo neutrálna formula. Jej podformulami sú formuly p, q, $p \to q$, $(p \to q) \to p$. Ak χ udeľuje premennej p hodnotu N a premennej q hodnotu N, $Hod(p, \chi) = \mathrm{N}$ a $Hod(q, \chi) = \mathrm{N}$. Keďže hodnota podformuly $p \to q$ závisí od hodnôt jej bezprostredných podformúl, podľa df. 3 $Hoh(p \to q, \chi) = \mathrm{P}$. Bezprostrednými podformulami formuly $(p \to q) \to p$ sú formuly $p \to q$, p a pretože hodnotou prvej je P a hodnotou druhej — N, podľa df. 3 $Hod((p \to q) \to p, \chi) = \mathrm{N}$. Obdobne postupujeme pri ďalších udeleniach hodnôt premenným p, q. Celý postup zisťovania hodnôt formuly $(p \to q) \to p$ pri všetkých udeleniach hodnôt jej premenným možno rozviesť a prehľadne opísať v tabuľke.

p	q	p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$
N	N	N	N	P	N
N	P	N	P	P	N
P	N	P	N	N	P
P	P	P	P	P	P

Tab. 10.

V prvom a druhom stĺpci tabuľky sa pod vodorovnou čiarou nachádzajú symboly hodnôt priradených jednotlivými udeleniami hodnôt premenným p, q. V ďalších dvoch stĺpcoch sú symboly hodnôt, ktoré pri príslušných udeleniach hodnôt nadobúdajú najjednoduchšie podformuly, t. j. premenné p, q (pretože hodnota ľubovoľnej premennej A je $\chi(A)$, tieto stĺpce sú zbytočné). V posledných dvoch stĺpcoch sa pod vodorovnou čiarou nachádzajú symboly hodnôt, ktoré nadobúdajú podformuly $p \to q$ a $(p \to q) \to p$, v každom riadku symbol hodnoty, ktorú nadobúdajú pri udelení hodnôt uvedenom v tomto riadku. Posledný stĺpec je stĺpcom hodnôt, ktoré nadobúda skúmaná formula. Na ňom vidíme, že formula $(p \to q) \to p$ je neutrálna formula. Aby sme pri tabuľkovom overovaní formúl výrokovej logiky nemuseli písať všetky podformuly skúmanej formuly F osobitne, stačí uviesť formulu F, symboly hodnôt jej premenných napísať pod jednotlivé výskyty týchto premenných a symboly hodnôt, ktoré nadobúdajú podformuly tvaru $(\sim A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ pod uvedený výskyt negátora, konjuktora, disjunktora, implikátora alebo ekvivalentora. Namiesto tab. 10 dostaneme tak tabuľku

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	p
N	N	N	P	N	N	N
N	P	N	P	P	N	N
P	N	P	N	N	P	P
P	P	P	P	P	P	P

Tab. 11.

Pretože formula $(p \to q) \to p$ má tvar $A \to B$, kde A je formula $p \to q$ a B je premenná p, symboly jej hodnôt sa nachádzajú pod implikátorom, ktorý sa vyskytuje bezprostredne pred formulou B, t. j. pod druhým výskytom implikátora v tejto formule (pod prvým výskytom implikátora sa nachádzajú symboly hodnôt, ktoré nadobúda podformula $p \to q$). Týmto spôsobom ešte overíme formulu $(p \vee \sim p) \to (p \wedge \sim p)$ a $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

p	$(p$	$\vee$	$\sim p)$	$\to$	$(p$	$\wedge$	$\sim p)$
N	N	P	PN	N	N	N	PN
P	P	P	NP	N	P	N	NP

Tab. 12.

p	q	r	$(p$	$\to$	$q)$	$\to$	$((q$	$\to$	$r)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r))$
N	N	N	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N
N	N	P	N	P	N	P	N	P	P	P	N	P	P
N	P	N	N	P	P	P	P	N	N	P	N	P	N
N	P	P	N	P	P	P	P	P	P	P	N	P	P
P	N	N	P	N	N	P	N	P	N	N	P	N	N
P	N	P	P	N	N	P	N	P	P	P	P	P	P
P	P	N	P	P	P	P	P	N	N	P	P	N	N
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

Tab. 13.

Pomocou uvedených tabuliek sme zistili, že formula $(p \vee \sim p) \to (p \vee \sim p)$ je kontradikcia a formula $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ tautológia. Podobne možno overiť ľubovoľnú formulu výrokovej logiky.

Nech F je ľubovoľná formula a $C_1, C_2, \ldots, C_n$ všetky jej navzájom rôzne premenné. Predpokladajme, že V je výrok nejakého jazyka J, ktorý možno z formuly F získať dosadením nejakých výrokov $V_1, V_2, \ldots, V_n$ za všetky jej premenné (tieto výroky nemusia byť navzájom rôzne, ale za každý výskyt ľubovoľnej premennej musí byť dosadený ten istý výrok). Predpokladajme, že za premennú C_i sa dosadzuje výrok V_i ($1 \leq i \leq n$). Ak χ je také udelenie hodnôt, ktoré premennej C_i priraďuje tú pravdivostnú hodnotu, ktorú denotuje výrok V_i, tak denotát výroku V je totožný s $Hod(F, \chi)$, čo vyplýva z našej interpretácie výrokových spojok.[114] Pretože tautológia nadobúda pri ľubovoľnom udelení hodnôt jej premenným hodnotu P (a kontradikcia hodnotu N), každý výrok, ktorý z nej získame dosadením nejakých výrokov za jej premenné, bude pravdivý (a v prípade kontradikcie nepravdivý). Pravdivosť (resp. nepravdivosť) výrokov získaných z tautológií (resp. kontradikcií) nezávisí od čiastkových výrokov, ktoré dosadzujeme za jednotlivé premenné, ale je podmienená výlučne výrokovo-logickou štruktúrou získaných výrokov. O pravdivosti (resp. nepravdivosti) takých výrokov, ktorá tu závisí len od významu výrokových spojok, sa možno presvedčiť už analýzou ich výrokovo-logickej štruktúry. Preto sa tieto výroky nazývajú výrokovo-logicky pravdivé (resp. výrokovo-logicky nepravdivé). Aby sme zistili, či taký výrok je pravdivý, nemusíme ho porovnávať so skutočnosťou a skúmať, akú pravdivostnú hodnotu majú jeho čiastkové výroky, z ktorých sa skladá, stačí nájsť formulu výrokovej logiky, z ktorej ho možno získať dosadením za jej premenné a tabuľkovou metódou sa presvedčiť o tom, či táto formula je tautológia (alebo kontradikcia). Ak áno, daný výrok je pravdivý (alebo nepravdivý). Ak tento výrok možno získať len dosadením do nejakej neutrálnej formuly, tabuľková metóda nie je postačujúca na zistenie jeho pravdivostnej hodnoty, taký výrok nie je výrokovo-logicky pravdivý (nepravdivý).

OPRAVA

V stati *Heglovské sympózium v Zwetli* (Filozofia 6, 1968, 639—642) na str. 640, riadok 3.: namiesto „nezávislej prednosti" má byť: n e z á v i s l e j p r e d m e t n o s t i; na str. 641, odstavec 2, riadok 1.: namiesto „jej telesného princípu" má byť: j e j t e l e o l o g i c k é h o p r i n c í p u . . .

red.

[114] V 2.4 sme hodnotu formy pri určitom udelení hodnôt charakterizovali ako denotát konštanty, ktorú dostaneme z formy tak, že za príslušné premenné dosadíme mená hodnôt, ktoré toto udelenie premenným priraďuje. Keďže medzi výrazmi výrokovej logiky sa nevyskytujú mená objektov, ktoré sa priraďujú premenným ako ich hodnoty (t. j. výroky), hodnotu foriem výrokovej logiky sme museli stanoviť priamo, určením objektu, ktorý je hodnotou formy pri ľubovoľnom udelení hodnôt jej premenným (pozri df. 3). Tým sme nepriamo charakterizovali i výrokové spojky, ktoré sa v nich vyskytujú. Keď jazyk výrokovej logiky rozšírime o výroky (alebo symboly pravdivostných hodnôt), pomocou výrokových spojok budeme môcť konštruovať aj výrokové výrazy (či už výroky, alebo výrokové formy), v ktorých sa budú vyskytovať aj výroky. Keby sme predpokladali, že výrok V, ktorý dostaneme z formuly F dosadením výrokov $V_1, \ldots, V_n$ za premenné $C_1, \ldots, C_n$ môže denotovať iný objekt ako Hod (F, X), dostali by sme sa do rozporu so všeobecným chápaním pojmu hodnoty uvedenom v 2.4.