

IX

4.7 **Prehľad funkcií typu v/v a v/vv .** Funkcia, ktorá je denotátom spojky „nie je pravda, že“, je objektom typu v/v . Denotátmi spojok „a“, „alebo“, „ak...“, „tak...“, „vtedy a len vtedy, keď“ sú funkcie typu v/vv . Okrem týchto funkcií existujú však aj iné funkcie typu v/v a v/vv . Patrí k nim napr. funkcia, ktorá usporiadanej dvojici $\langle N, N \rangle$ priraduje hodnotu P a ostatným dvojiciam pravdivostných hodnôt hodnotu N. Spojka, ktorej túto funkciu priradíme ako jej denotát, musí v spojení s dvoma nepravdivými výrokmi vytvárať pravdivý výrok a v spojení s dvoma výrokmi, z ktorých aspoň jeden je pravdivý, musí vytvárať nepravdivý výrok. Túto vlastnosť má v slovenčine zvrät „ani nie je pravda, že... ani nie je pravda, že...“ (ktorý budeme často uvádzať v skrátenej podobe „ani nie... ani nie...“), čo si možno ľahko overiť na týchto príkladoch:

- (1) Ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol americký prezident ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol slovenský spisovateľ.
- (2) Ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol americký prezident ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol československý prezident.
- (3) Ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol československý prezident ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol sovietsky diplomat.
- (4) Ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol československý prezident ani nie je pravda, že T. G. Masaryk bol český filozof.⁹⁸

Nebudeme tu osobitne uvádzať tabuľku spojky „ani nie... ani nie...“, ani tabuľky ostatných spojok, ktorými sme sa ešte nezaoberali. Zostavíme si však tabuľku všetkých funkcií typu v/v a tabuľku všetkých funkcií typu v/vv . Na základe týchto tabuliek možno veľmi jednoducho skonštruovať tabuľku každej spojky typu v/v alebo v/vv . Existuje 16 funkcií typu v/vv a 4 funkcie typu v/v . Jednotlivé funkcie typu v/v budeme označovať písmenami $g_1, \dots, g_4$ a funkcie typu v/vv písmenami $f_1, \dots, f_{16}$. Ďalej objasníme, ktoré z nich sú priradené známym spojкам ako ich denotáty. Najprv uvedieme tabuľku jednomiestnych funkcií typu v/v :

	g_1	g_2	g_3	g_4
N	N	N	P	P
P	N	P	N	P

Tab. 6.

⁹⁸ Hoci v prirodzenom jazyku sa tak ťažkopádne a rozvláčne nevyjadrujeme, dávame tu prednosť formuláciám, na ktorých je zrejmejšia logická štruktúra výrokov utvorených pomocou spojky „ani nie... ani nie...“. Napr. namiesto (1) v prirodzenom jazyku skôr použijeme výrok „T. G. Masaryk nebol ani americký prezident ani slovenský spisovateľ“.

V prvom stĺpci tabuľky 6 sú symboly argumentov a v ďalších stĺpcoch symboly funkčných hodnôt funkcií $g_1, \dots, g_4$ (symbol funkčnej hodnoty vždy v tom istom riadku ako symbol argumentu). Podobne zostavíme tabuľku všetkých dvojmiestnych funkcií typu u/vv , v ktorej symbolmi argumentov funkcií $f_1, \dots, f_{16}$ sú usporiadané dvojice symbolov P, N.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
$\langle N, N \rangle$	N	N	N	N	N	N	N	N	P	P	P	P	P	P	P	P
$\langle N, P \rangle$	N	N	N	N	P	P	P	P	N	N	N	N	P	P	P	P
$\langle P, N \rangle$	N	N	P	P	N	N	P	P	N	N	P	P	N	N	P	P
$\langle P, P \rangle$	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P

Tab. 7.

Funkcie $g_3, f_2, f_8, f_{10}, f_{14}$ už poznáme ako denotáty spojok „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“, „vtedy a len vtedy, keď“, „ak ..., tak ---“. Funkcia f_9 je denotátom spojky „ani nie ... ani nie ---“. Nebudeme sa tu zapodievať hľadaním spojok, ktorým by bolo možné priradiť ostatné funkcie ako ich denotáty, pretože ide zväčša o spojky, ktoré sa v prirodzených jazykoch veľmi málo používajú alebo sa v nich vôbec nevyskytujú. Každú z týchto spojok možno v určitom zmysle postrádať, dá sa totiž nahradiť výrazom, skonštruovaným zo spojok „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“, „ak ..., tak ---“, „vtedy a len vtedy, keď“. Predpokladajme, že Φ je niektorá z dvojargumentových spojok, ktorými sme sa tu bližšie nezaoberali (obdobná úvaha platí pre jednoargumentové spojky). Spojením spojky Φ s ľubovoľnými dvoma výrokovými výrazmi „V“, „W“ dostaneme výrokový výraz $\Phi(V, W)$; hodnota tohto výrazu jednoznačne závisí od hodnôt výrazov „V“, „W“. Výraz, ktorým možno spojku Φ nahradiť, má tú vlastnosť, že v určitom spojení s dvoma výrokovými výrazmi „V“, „W“ vytvára nový výrokový výraz (výrazy „V“, „W“ môžu mať v tomto výraze viac výskytov), ktorý denotuje alebo nadobúda vždy tú istú pravdivostnú hodnotu ako výraz $\Phi(V, W)$. Inak povedané, spojka Φ a výraz, ktorým sa táto spojka dá nahradiť, majú rovnakú tabuľku. Napr. namiesto spojky „ani nie ... ani nie ---“ možno používať výraz „nie je pravda, že (... alebo ---)“. Ľubovoľný výrokový výraz tvaru „Nie je pravda, že (V alebo W)“, kde spojky „nie je pravda, že“, „alebo“ majú význam určený tabuľkami 1 a 3, denotuje alebo nadobúda hodnotu P práve vtedy, keď obidva výrokové výrazy „V“, „W“ majú hodnotu N, v ostatných prípadoch má výrokový výraz „Nie je pravda, že (V alebo W)“ hodnotu N. Ak totiž obidva výrokové výrazy „V“, „W“ majú hodnotu N, hodnotu N denotuje alebo nadobúda i disjunkcia „V alebo W“ a teda výrokový výraz „Nie je pravda, že (V alebo W)“ má hodnotu P. Ak aspoň jeden z výrokových výrazov „V“, „W“ má hodnotu P, disjunkcia „V alebo W“ má tiež hodnotu P a jej negácia „Nie je pravda, že (V alebo W)“ denotuje alebo nadobúda hodnotu N. To znamená, že každý výrokový výraz tvaru „Ani nie V ani nie W“ má vždy tú istú hodnotu ako výrokový výraz tvaru „Nie je pravda, že (V alebo W)“ a preto môžeme spojku „ani nie ... ani nie ---“ nahradiť výrazom „nie je pravda, že (... alebo ---)“.

V tejto súvislosti sa tiež hovorí, že spojka „ani nie... ani nie ---“ je *definovateľná* pomocou spojok „nie je pravda, že“, „alebo“.

Podobným spôsobom sa možno zaoberať nielen bez spojky „ani nie... ani nie ---“, ale aj bez spojok, ktoré denotujú funkcie $g_1, g_2, g_4, f_1, f_3-f_7, f_{11}-f_{13}, f_{15}, f_{16}$. Dokonca by sme mohli postrádať i niektoré zo spojok „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“, „ak...“, „tak ---“, „vtedy a len vtedy, keď“, čo sme nepriamo naznačili už v 4.4 a 4.5, kde sme význam ľubovoľného výroku tvaru „Ak V , tak W “ stotožnili s významom výrokov tvaru „(Nie je pravda, že V) alebo W “, „Nie je pravda, že (V a nie je pravda, že W)“ a význam výroku tvaru „ V vtedy a len vtedy, keď W “ s významom výroku tvaru „Ak V , tak W a ak W , tak V “. Podobne ako sme spojku „ani nie... ani nie ---“ nahradili výrazom „nie je pravda, že (... alebo ---)“, možno pomocou spojok každej z nasledujúcich dvojíc nahradiť všetky ostatné spojky syntaktickej kategórie v/v a v/vv :

- (i) „nie je pravda, že“, „a“
- (ii) „nie je pravda, že“, „alebo“
- (iii) „nie je pravda, že“, „ak...“, „tak ---“.

Existujú dve spojky, ktoré majú tú vlastnosť, že pomocou ktorejkoľvek z nich možno definovať všetky ostatné spojky syntaktickej kategórie v/v a v/vv . Je to spojka „ani nie... ani nie ---“ a spojka, ktorá denotuje funkciu f_{15} (v slovenčine jej zodpovedá zvrat „to, že... je nezlučiteľné s tým, že ---“, resp. „... je nezlučiteľné s ---“).

Výrazy vybudované zo spojok uvedených dvojíc alebo zo spojky „ani nie... ani nie ---“ či zo spojky „... je nezlučiteľné s ---“, ktorými by bolo možné nahradiť všetky ostatné spojky, sú v mnohých prípadoch veľmi komplikované a v prirodzenom jazyku, na pôde ktorého ešte stále rozvíjame naše úvahy, často prakticky nekonštruovateľné alebo nezrozumiteľné. Napr. spojka „... alebo ---“ je nahraditeľná výrazom „ani nie (ani nie... ani nie ---) ani nie (ani nie... ani nie ---)“ (miesta „...“ treba všade vyplniť tým istým výrazom, obdobne miesta „---“). Otázky nahraditeľnosti jedných spojok pomocou iných majú význam predovšetkým v umelých jazykoch logiky, ktoré budeme používať pri výklade výrokovej a neskôr i predikátovej logiky.

Okrem funkcií typu v/v a v/vv existujú aj funkcie typu v/vvv , $v/vvvv$, ... atď. Ľubovoľná funkcia typu $v/v...v$ (typový symbol v sa za symbolom „/“ vyskytuje n -krát) sa nazýva n -miestnou *pravdovou* funkciou. Za *výrokovú spojku* môžeme pokladať meno ľubovoľnej n -miestnej pravdovej funkcie. Spojky, ktoré denotujú n -miestne pravdivé funkcie, kde $n > 2$, sa v prirodzenom jazyku vyskytujú len veľmi zriedka. V jazykoch logiky alebo matematiky sa v prípade potreby pre tieto funkcie zavádzajú osobitné symboly. Pre ľubovoľné $n > 2$ platí, že každá n -argumentová spojka sa dá definovať pomocou spomenutých spojok syntaktickej kategórie v/v a v/vv .

Všetky spojky možno ponímať ako nevlastné výrazy, ktoré v určitých spojeniach s výrokovými výrazmi tvoria nové výrokové výrazy, pričom hodnota týchto výrazov jednoznačne závisí od hodnôt ich čiastkových výrokových výrazov. Ďalej budeme výrokové spojky chápať ako nevlastné výrazy a podľa toho s nimi narábať a operovať.

§ 5. Správne utvorené výrazy výrokovej logiky

Už v úvodných častiach nášho výkladu sme neraz poukázali na syntaktickú a sémantickú mnohoznačnosť jazykových výrazov prirodzeného jazyka. Naznačili sme, že pri konštrukcii logických foriem jazykových výrazov sú nepostrádateľné premenné a operátory, ktoré sa v prirodzených jazykoch nevyskytujú. Je pochopiteľné, že s takým jazykom logika nemôže pracovať, že v ňom nemôže formulovať pravidlá správneho usudzovania ani presne definovať rôzne syntaktické a sémantické pojmy, klásť a riešiť svoje problémy a dokazovať v ňom svoje tvrdenia. Pre tento účel si logika vytvára vlastné výrazové prostriedky. V rámci výrokovej logiky ide predovšetkým o prostriedky, z ktorých sa budujú deduktívne pravidlá výrokovej logiky a najmä ich základné zložky — logické výrokové formy výrokovej logiky.

5.1 Výrazy výrokovej logiky. Ako sme už spomenuli, vo výrokových formách, z ktorých sa skladajú deduktívne pravidlá výrokovej logiky, vyskytujú sa výrokové premenné, výrokové spojky a zátvorky. Namiesto výrokových spojok prirodzeného jazyka, ktoré sú jednak mnohoznačné, jednak nevhodné pre formuláciu zložitejších výrokových foriem, v logike sa zavádzajú jednoduché symboly s presne vymedzeným významom. Symboly a výrazy výrokovej logiky tu zatiaľ zavedieme čisto syntakticky, t. j. výlučne ako objekty určitého tvaru a štruktúry, ich význam presne určíme neskôr.

Výrokové formy výrokovej logiky sa konštruujú z týchto symbolov:

- (i) $p, q, r, s, p_1, q_1, \dots$ (výrokové premenné)
- (ii) $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ (výrokové spojky)
- (iii) $(,)$ (zátvorky)

Uvedené symboly pokladáme za najjednoduchšie. Nazývajú sa tiež *primitívnymi symbolmi* výrokovej logiky. V zátvorkách napravo uvádzame mená jednotlivých druhov symbolov. Hoci tieto mená sme zvolili so zreteľom na zamýšľanú interpretáciu primitívnych symbolov, predbežne ich možno pokladať za konvenčne dohodnuté označenie určitých množín najjednoduchších symbolov výrokovej logiky. Spojka $\sim$ sa nazýva *negátor*, spojka $\wedge$ *konjunkt*, spojka $\vee$ *disjunkt*, spojka $\rightarrow$ *implikátor*, spojka $\leftrightarrow$ *ekvivalent*. Predpokladáme, že existuje nekonečne veľa rôznych výrokových premenných.⁹⁹

Lubovoľný konečný rad primitívnych symbolov budeme nazývať *výrazom* výrokovej logiky. Výrazmi sú napr. tieto rady symbolov: $p, p \sim, ppq \rightarrow, \vee \wedge \leftrightarrow p, p \rightarrow q, (p_{10} \rightarrow r) \wedge (s \rightarrow p_{11})$. Každý primitívny symbol je výraz. Rôzne tvrdenia o výrazoch výrokovej logiky, o ich syntaktických a sémantických vlastnostiach a vzťahoch medzi nimi budeme formulovať v jazyku, v ktorom okrem odborných termínov, premenných a na základe dohody zavedených symbolov budeme používať aj výrazy určitého fragmentu prirodzeného jazyka, ktoré budú v danom kon-

⁹⁹ Presnejšie, že existuje spočítateľne nekonečne veľa premenných, t. j. práve toľko ako prirodzených čísel 1, 2, 3, ...

texte jasné a jednoznačné. Tento jazyk budeme označovať symbolom „ M_{VL} “. Výrazy M_{VL} treba prísne odlišovať od výrazov výrokovej logiky. Štruktúru M_{VL} podrobnejšie rozoberať nebudeme, lebo by to neúnosne skomplikovalo náš výklad.¹⁰⁰ Budeme v ňom nielen formulovať, ale aj dokazovať tvrdenia, týkajúce sa syntaktických vlastností a vzťahov medzi výrazmi výrokovej logiky, definovať rôzne syntaktické a sémantické pojmy a pod. Pre stručnú formuláciu viet o výrazoch výrokovej logiky bude vhodné zaviesť do M_{VL} premenné, ktoré ako svoje hodnoty nadobúdajú práve tieto výrazy (to znamená, že oblasť ich premennosti bude množina všetkých výrazov výrokovej logiky). V tomto zmysle budeme používať písmená $A, B, C, D, F, A_1, B_1, \dots$. Každá z premenných $A, B, C, \dots$ reprezentuje ľubovoľný výraz výrokovej logiky. Okrem premenných budeme v M_{VL} používať i mená výrazov výrokovej logiky (ku ktorým patria aj výrazy „negátor“, „konjunkt“, „disjunkt“ atď.). Aby sme nemuseli pre každý výraz výrokovej logiky zavádzať nový názov, ako mená výrazov budeme v M_{VL} používať samé výrazy výrokovej logiky alebo výrazy utvorené z výrazov ako „výraz“, „výroková spojka“, „premenná“ atď. a samých výrazov výrokovej logiky bez uvodzoviek. Nap. výrazy „výraz $p \wedge q$ “, „premenná p “, „spojka $\sim$ “ sú v M_{VL} menami týchto výrazov výrokovej logiky: $p \wedge q$, p , $\sim$, kým výrazy „ $p \rightarrow q$ “, „ $(p \leftrightarrow q)$ “, „ rs “ menami výrazov, ktoré sa nachádzajú medzi uvodzovkami. Z kontextu bude vždy jasné, či výrazy výrokovej logiky používame ako mená seba samých alebo ako výrazy výrokovej logiky (mená výrazov patria totiž do M_{VL}).¹⁰¹

Spojením ľubovoľných dvoch výrazov výrokovej logiky (v ľubovoľnom poradí) dostaneme nový výraz výrokovej logiky. Toto spojenie budeme nazývať *zreťazením*.¹⁰² Napr. zreťazením výrazu (p s výrazom $\sim r$) dostaneme výraz ($p \sim r$). Výraz, ktorý vznikne spojením nejakého výrazu A s výrazom B v uvedenom poradí budeme v M_{VL} označovať výrazom „ AB “ a výraz AB nazývať výsledkom operácie zreťazenia výrazov A, B . Napr. ak A je výraz ($p \wedge B$ výraz $\rightarrow q$), zreťazením týchto výrazov uvedenom poradí dostaneme výraz ($p \rightarrow q$); výrazom BA je potom výraz $\rightarrow q$ (p). Keďže výraz „ AB “ je výsledkom zreťazenia výrazov „ A “, „ B “ v uvedenom poradí, je zrejmé, že zreťazeniu výrazov výrokovej logiky zodpovedá zreťazenie príslušných výrazov M_{VL} (a to mien výrazov alebo premenných $A, B, C, \dots$).

V M_{VL} budeme často používať výrazy utvorené z písmen $A, B, C, \dots$ a symbolov $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$, ktoré budeme nazývať *schémami* výrazov výrokovej logiky (v každej schéme sa musí vyskytovať aspoň jedna z premenných „ A “, „ B “, „ C “, $\dots$). Každá schéma nám bude v M_{VL} predstavovať nekonečnú množinu výrazov výrokovej logiky, utvorených z ľubovoľných výrazov reprezentovaných

¹⁰⁰ M_{VL} je vlastne miešaný metajazyk (resp. metateória) vybudovaný pre potreby skúmania výrazov výrokovej logiky, ich vlastností a vzťahov. Výrazy výrokovej logiky ešte netvorí jazyk v pravom zmysle slova (nemal by totiž univerzum), ale iba určitú možnú časť nejakého jazyka.

¹⁰¹ Ako mená seba samých sa výrazy používajú v jazykoch, v ktorých hovoríme o výrazoch iného jazyka (t. j. v metajazykoch), v našom prípade o výrazoch výrokovej logiky. Používanie výrazov ako mien seba samých sa nazýva *autonymné*.

¹⁰² Presnejšie, zreťazenie je operácia, ktorá ľubovoľným dvom výrazom výrokovej logiky A, B priraduje výraz AB , ktorý vznikne spojením výrazu A s výrazom B v uvedenom poradí.

písmenami $A, B, C, D, F, \dots$ a výrazov, ktoré sú v schéme použité autonýmne.¹⁰³ Napr. výraz $((A \rightarrow B \wedge C))$ nám v M_{VL} bude reprezentovať ľubovoľný výraz výrokovej logiky utvorený z dvoch ľavých zátvoriek, po ktorých nasleduje nejaký výraz A , po ňom symbol $\rightarrow$ ďalej výraz B , spojka $\wedge$, nejaký výraz C a nakoniec pravá zátvorka, napr. tieto výrazy: $((p \rightarrow q \wedge s)), (((\rightarrow) \wedge)), (((p \wedge q) \rightarrow r \wedge (pq))),$ pričom písmeno „A“ zodpovedá v prvom prípade výraz p , v druhom výraz a v treťom výraz $(p \wedge p)$.

5.2 Formuly výrokovej logiky. Z množiny všetkých výrazov výrokovej logiky teraz vyčleníme určitú podmnožinu, do ktorej patria iba tzv. správne utvorené výrazy, ktoré budeme nazývať formulami výrokovej logiky. Sú to výrazy, ktoré budeme v nasledujúcej časti interpretovať ako výrokové formy výrokovej logiky. Iné výrazy ako formuly nemajú pre naše ďalšie úvahy veľký význam. Formuly budeme charakterizovať čisto syntakticky ako výrazy určitého tvaru a štruktúry.

Definícia 1. (i) Ľubovoľná výroková premenná je formula výrokovej logiky.

(ii) Ak výrazy A, B sú formuly výrokovej logiky, tak i výrazy $(\sim A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ sú formuly výrokovej logiky.

(iii) Ľubovoľný výraz výrokovej logiky je formulou vtedy a len vtedy, keď spĺňa podmienku (i) alebo (ii).

V tejto definícii (ďalej len df.) sa vymedzuje určitá nekonečná množina výrazov. Postupujeme pritom tak, že najprv (v bode (i)) konštatujeme, ktoré najjednoduchšie výrazy patria do tejto množiny a v bode (ii) určujeme, ako možno z jednoduchších výrazov tejto množiny konštruovať zložitejšie výrazy. V bode (iii) sa vlastne tvrdí, že do tejto množiny, t. j. množiny forml, patria iba premenné a výrazy, ktoré možno získať z premenných n -násobným ($n \geq 1$) uplatnením bodu (ii).¹⁰⁴ Napr. keďže p, q sú formuly (podľa (i)), podľa (ii) $(\sim q), (\sim p)$ sú tiež formuly a teda formulami sú aj $(p \rightarrow (\sim q)), (q \rightarrow (\sim p))$ ako aj $((p \rightarrow (\sim q)) \rightarrow (q \rightarrow (\sim p))), ((p \rightarrow (\sim q)) \wedge (q \rightarrow (\sim p)))$ atď. O ľubovoľnom výraze výrokovej logiky možno v konečnom počte krokov rozhodnúť, či je formulou. Je zrejmé, že napr. výrazy $(p \rightarrow \sim q), (p \vee q \rightarrow s) p \vee q \rightarrow r$ nie sú formuly v zmysle df. 1 (chýbajú v nich niektoré zátvorky), hoci určité časti týchto výrazov sú formuly.

Teraz vymedzíme veľmi jednoduchú syntaktickú reláciu medzi formulami.

Definícia 2. Nech F, A, B sú formuly výrokovej logiky.

(i) Ak F je výroková premenná, jedinou podformulou F je formula F .

(ii) Ak F je formula tvaru $(\sim A)$, podformulami F sú formuly F, A a všetky podformuly formuly A . Ak F je formula tvaru $(A \wedge B)$ alebo $(A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$, podformulami F sú formuly F, A, B a všetky podformuly forml A, B .

¹⁰³ Schémy výrazov sú vlastne formy M_{VL} , ktoré ako svoje hodnoty nadobúdajú výrazy výrokovej logiky. Keď totiž za premenné schémy dosadíme mená nejakých výrazov výrokovej logiky, dostaneme meno nejakého výrazu výrokovej logiky. Napr. ak premennej „A“ priradíme ako hodnotu výraz p , premennej „B“ výraz q , hodnotou schémy „ $A \rightarrow B$ “ pri tomto udelení hodnôt je výraz $p \rightarrow q$, pretože výraz, ktorý z uvedenej schémy dostaneme dosadením mien udelených hodnôt (v tomto prípade samých výrazov p, q použitých autonýmne) denotuje výraz $p \rightarrow q$.

¹⁰⁴ Definície tohto druhu sa nazývajú *induktívne* alebo *rekurentné*.