

ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY

PAVEL CMOREJ

VIII

4.4 Implikácia. Výroková spojka „ak . . . , tak---“ je v prirodzenom jazyku veľmi mnohoznačná, hoci sa používa prevažne v kontextoch formy „Ak V , tak W “, kde „ V “ a „ W “ sú nejaké vety. Jej mnohoznačnosť tkvie najmä v tom, že v rôznych kontextoch platia pre pravdivosť výrokov tvaru „Ak V , tak W “ rôzne a pritom dosť nejasné a neurčité podmienky. I v prirodzenom jazyku však jestvujú kontexty, v ktorých sa spojka „ak . . . , tak ---“ používa približne v takom významne ako v logike. Pri hľadaní podmienok, ktoré logika kladie na pravdivosť výrokov tvaru „Ak V , tak W “ (a tým určuje význam spojky „ak . . . , tak ---“), budeme vychádzať z príkladov, na základe ktorých budeme môcť stanoviť také podmienky pre pravdivosť výrokov typu „Ak V , tak W “, ktoré platia i v logike. Potom poukážeme na niektoré rozdiely medzi používaním spojky „ak . . . , tak ---“ v logike a v prirodzenom jazyku. Vo výrokoch, ktoré budeme analyzovať sa hovorí o istom občianovi J. K., ktorý býva v Bratislave. Tieto výroky sa skladajú z týchto zložiek:

- (1) J. K. býva v Bratislave.
- (2) J. K. býva v západoslovenskom kraji.
- (3) J. K. býva v Trnave.
- (4) J. K. býva v Prešove.
- (5) J. K. býva vo východoslovenskom kraji.

Pretože občan J. K. býva v Bratislave, výroky (1), (2) sú pravdivé a výroky (3) – (5) nepravdivé. Z uvedených výrokov možno vytvoriť rôzne výroky formy „Ak V , tak W “. Všimnime si niektoré z nich.

- (6) Ak J. K. býva v Prešove, tak J. K. býva vo východoslovenskom kraji.
- (7) Ak J. K. býva v Trnave, tak J. K. býva v západoslovenskom kraji.
- (8) Ak J. K. býva v Bratislave, tak J. K. býva vo východoslovenskom kraji.
- (9) Ak J. K. býva v Bratislave, tak J. K. býva v západoslovenskom kraji.

Každý používateľ slovenského jazyka bude zaiste súhlasiť s tým, že výroky (6), (7), (9) sú pravdivé a výrok (8) nepravdivý. Na základe uvedených príkladov môžeme stanoviť, že výrok tvaru „Ak V , tak W “ je pravdivý práve vtedy, keď výrok „ V “ je nepravdivý alebo výrok „ W “ pravdivý, a nepravdivý iba v tom prípade, keď výrok „ V “ je pravdivý a výrok „ W “ nepravdivý. — Logika používa a chápe spojku „ak . . . , tak ---“ presne tak, ako je vymedzená a charakterizovaná týmito podmienkami.

Výrok „Ak V, tak W“ má v logike ten istý význam ako výrok:

(10) „(Nie je pravda, že V) alebo W“,
alebo výrok:

(11) „Nie je pravda, že (V a nie je pravda, že W)“,
ktoré sú nepravdivé iba vtedy, keď výrok „V“ je pravdivý a výrok „W“ nepravdivý, čo možno ľahko zistiť na základe tabuliek 1. – 3. Napr. výrok (9) znamená v logike presne to, čo výrok (12) alebo (13):

(12) J. K. nebýva v Bratislave alebo býva v západoslovenskom kraji.

(13) Nie je pravda, že J. K. býva v Bratislave a nebýva v západoslovenskom kraji,

(kde spojky „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“ sú použité vo význame danom tabulkami 1–3). Avšak je to tak i v prirodzenom jazyku? Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že uvedená charakteristika významu spojky „ak . . . , tak ---“ je pre prirodzený jazyk nepostačujúca a v mnohých prípadoch dokonca neplatná. V tomto jazyku spájame so spojkou „ak . . . , tak ---“ spravidla iba výroky, medzi ktorými existuje určitá obsahová i formálna súvislosť (ktorá je nápadná i na príkladoch (6)–(9)). To sa v nemalej miere vzťahuje i na výroky spojené spojkami „alebo“, „a“. Ak medzi výrokom „V“ a „W“ neexistuje nijaká obsahová súvislosť, výraz „ak V, tak W“ sa v prirodzenom jazyku často považuje za nesprávne utvorený (a teda nemá zmysel uvažovať o jeho pravdivosti),⁹⁴ čo v nejednom prípade platí aj o výrazoch tvaru „V alebo W“ a niekedy aj o výrazoch typu „V a W“. Napr. výraz „Ak $2 + 2 = 4$, tak J. K. býva v Bratislave“ bude väčšina používateľov slovenského jazyka pokladať za nezmyselný (nesprávne utvorený) práve preto, že medzi výrokom „ $2 + 2 = 4$ “ a výrokom „J. K. býva v Bratislave“ nejestvuje nijaká obsahová súvislosť. Nie je vylúčené, že niektorí Slováci ho budú pokladať za nepravdivý výrok alebo nebudú vôbec vedieť, ako ho majú kvalifikovať. No keďže charakter požadovanej obsahovej súvislosti je veľmi nejasný a neurčitý, nie je možné všeobecne a náležite presne stanoviť, aké významové (či iné) vzťahy majú vo výroku „Ak V, tak W“ (alebo vo výroku „V alebo W“, „V a W“) existovať medzi výrokom „V“ a „W“, aby výrok „Ak V, tak W“ („V alebo W“, „V a W“) bol správne utvorený, resp. pravdivý. Tým skôr, že táto súvislosť môže byť podmienená situáciou alebo kontextom, v ktorom je výrok „Ak V, tak W“ vyjadrený.

Výrokmi tvaru „Ak V, tak W“ v prirodzenom jazyku často vyjadrujeme presvedčenie, že výrok „W“ logicky vyplýva z výroku „V“, že situácia opísaná výrokom „V“ je príčinou situácie opísanej vo výroku „W“ alebo že situácia opísaná výrokom „W“ nasleduje po situácii opísanej výrokom „V“ atď.⁹⁵ Logika význam spojky „ak . . . , tak ---“ značne zjednodušuje a pri formulácii podmienok kladených na pravdivosť výrokov tvaru „Ak V, tak W“ úplne odhliada od roz-

⁹⁴ Niekedy sa také výroky pokladajú za správne utvorené (z čisto syntaktického hľadiska), no nie sú vraj ani pravdivé ani nepravdivé (podmienky ich pravdivosti sú vonkoncom neurčené).

⁹⁵ Tým sú dané i podmienky, za ktorých sa výroky tvaru „Ak V, tak W“ pokladajú v niektorých situáciách alebo kontextoch za pravdivé (nie sú však stanovené natoľko jasne a jednoznačne ako sa to na prvý pohľad zdá).

manitých významových súvislostí medzi čiastkovými výroky „V“ a „W“ (a obdobne v prípade výrokov utvorených pomocou spojky „a“, „alebo“ a ďalších). Výrok tvaru „Ak V, tak W“ znamená v logike to isté, čo výrok tvaru (10) alebo (11). Iné významy, ktoré má spojka „ak . . . , tak ---“ v prirodzenom jazyku, sú predmetom zaujímavých skúmaní logickej sémantiky, modálnej logiky a metodológie vied. Pre tieto významy spojky „ak . . . , tak ---“ sa v uvedených vedeckých disciplínach zavádzajú iné výrazy („vyplýva“, „je príčinou“, „nasleduje po“ alebo nejaké symboly a podobne). Ak „V“ a „W“ sú výroky nejakého jazyka *J*, ľubovoľný výraz tvaru „Ak V, tak W“, „V alebo W“, „V a W“ (ako aj výrazy utvorené pomocou spojok, ktorými sa budeme zaoberať ďalej) je z hľadiska logiky správne utvorený výrok, ktorého pravdivosť (resp. nepravdivosť) jednoznačne závisí iba od pravdivostných hodnôt výrokov „V“, „W“ a význam výrokovej spojky, ktorá sa v ňom vyskytuje, je presne a úplne vymedzený určením, aká je pravdivostná hodnota tohto výroku, ak jeho čiastkové výroky „V“, „W“ majú takú a takú pravdivostnú hodnotu. Z hľadiska logiky sú nielen správne utvorené, ale i pravdivé tieto výroky:

(14) Ak J. F. Kennedy bol americký prezident, tak $2 < 3$.

(15) Ak $2 + 2 = 5$, tak mačka je cicavec.

(16) Ak Praha je slovenské mesto, tak A. Einstein napísal román *Proces*.

Výroky tvaru „Ak V, tak W“, v ktorých medzi „V“ a „W“ neexistuje nijaká obsahová ani formálna súvislosť sa niekedy používajú i v prirodzenom jazyku. Napr. výrok:

(17) Ak T. G. Masaryk bol americký prezident, tak mesiac je z tvarohu, v určitom kontexte bude temer každý používateľ slovenského prirodzeného jazyka pokladať za správne utvorený a pravdivý, hoci obidva čiastkové výroky obsahovo vonkoncom nesúvisia.

Odtiaľ budeme každý výraz tvaru „Ak V, tak W“, kde „V“ a „W“ sú ľubovoľné výroky nejakého jazyka *J*, pokladať za správne utvorený výrok, ktorý je pravdivý vtedy a len vtedy, keď výrok „V“ je nepravdivý (pričom výrok „W“ môže byť pravdivý i nepravdivý) alebo výrok „W“ je pravdivý (a výrok „V“ je pravdivý alebo nepravdivý) a nepravdivý iba vtedy, keď „V“ je pravdivý a „W“ nepravdivý výrok. Ak „V“ alebo „W“ je výroková forma, výraz „Ak V, tak W“ nadobúda hodnotu N práve vtedy, keď výrokový výraz „V“ denotuje alebo nadobúda hodnotu P a výraz „W“ — hodnotu N, vo všetkých ostatných prípadoch nadobúda výroková forma „Ak V, tak W“ hodnotu P. Napr. forma „Ak $x > 0$ a $y > 0$, $x \cdot y > 0$ “ (oblasťou hodnôt jej premenných „x“, „y“ nech je množina reálnych čísel) nadobúda pri ľubovoľnom udelení hodnôt premenným „x“, „y“ hodnotu P, lebo neexistuje také udelenie hodnôt, pri ktorom by forma „ $x > 0$ a $y > 0$ “ nadobúdala hodnotu P a forma „ $x \cdot y > 0$ “ hodnotu N. Forma „Ak $x + y > 0$, tak $x > 0$ “ nadobúda pri udelení hodnôt 3, 2 premenným „x“, „y“ hodnotu P, ale pri udelení hodnôt -3, 5 hodnotu N.

Ľubovoľný výrokový výraz tvaru „Ak V, tak W“, v ktorom má spojka „ak . . . , tak ---“ význam určený uvedenými pravdivostnými podmienkami sa nazýva **implikácia** (výrokových výrazov „V“, „W“). Čiastkový výrokový výraz „V“

v implikácii „Ak V , tak W “ sa nazýva antecedent a výraz „ W “ konzekvent. Tab. 4 ukazuje, akú hodnotu denotuje alebo nadobúda implikácia „Ak V , tak W “ pri príslušných hodnotách jej zložiek „ V “, „ W “.

V	W	Ak V , tak W
N	N	P
N	P	P
P	N	N
P	P	P

Tab. 4

Táto tabuľka charakterizuje implikáciu „Ak V , tak W “ ako výraz, ktorý denotuje alebo nadobúda hodnotu P práve vtedy, keď antecedent „ V “ denotuje, resp. nadobúda hodnotu N alebo konzekvent „ W “ denotuje resp. nadobúda hodnotu P. Tým je jednoznačne a úplne vymedzený význam spojky „ak . . . , tak ---“. V tomto význame sa táto spojka používa v logike i v matematike.

4.5 Ekvivalencia. Výroková spojka „vtedy a len vtedy, keď“ sa v slovenskom prirodzenom jazyku príliš nepoužíva, veľmi často sa však vyskytuje vo formuláciách rôznych matematických tvrdení a viet a s postupujúcou matematizáciou mnohých vedeckých disciplín preniká i do jazykov iných vied. Jej význam približne zodpovedá významu zvrátov „práve vtedy, keď“, „v tom a len v tom prípade, keď“ a podobne.⁹⁶ Tabuľku, ktorá charakterizuje význam tejto spojky zostavíme na základe príkladov. Predpokladajme, že dnes je streda a skúmame tieto výroky:

- (1) Dnes je piatok vtedy a len vtedy, keď zajtra bude sobota.
- (2) Dnes je utorok vtedy a len vtedy, keď zajtra bude štvrtok.
- (3) Dnes je streda vtedy a len vtedy, keď zajtra bude piatok.
- (4) Dnes je streda vtedy a len vtedy, keď zajtra bude štvrtok.

Čitateľovi, ktorý nemá s používaním spojky „vtedy a len vtedy, keď“ nijaké skúsenosti odporúčame, aby v uvedených výrokoch nahradil spojku „vtedy a len vtedy, keď“ zvratom „v tom a len v tom prípade, keď“ a pod. a potom sa pokúsil zistiť ich pravdivostnú hodnotu.

Je zrejmé, že výroky (1), (4) sú pravdivé a výroky (2), (3) nepravdivé. Výroky tvaru „ V vtedy a len vtedy, keď W “ majú pravdivostnú hodnotu P práve vtedy, keď obidva čiastkové výroky „ V “, „ W “ majú tú istú pravdivostnú hodnotu. Výroková forma „ V vtedy a len vtedy, keď W “ nadobúda hodnotu P práve vtedy, keď výrokový výraz „ V “ denotuje alebo nadobúda tú istú hodnotu ako výrokový výraz „ W “. Napr. forma „ $x > y$ vtedy a len vtedy, keď $x - y > 0$ “ nadobúda

⁹⁶ Výraz „vtedy“, ktorý sa vyskytuje vo zvratoch „vtedy a len vtedy, keď“, „práve vtedy, keď“ a pod. sa nesmie chápať a interpretovať časovo, t. j. ako rovnoznačný s výrazom „v tom čase“.

hodnotu P pri ľubovoľnom udelení hodnôt premenným „ x “, „ y “ (z univerza aritmetiky celých čísel), lebo ak forma „ $x > y$ “ nadobúda pri danom udelení hodnôt hodnotu P alebo N, nadobúda ju aj forma „ $x - y > 0$ “ a naopak. Forma „ $x < x$ “ vtedy a len vtedy, keď $2 < 2$ “ nadobúda pri každom udelení hodnôt premennej „ x “ hodnotu P, pretože výrok „ $2 < 2$ “ je nepravdivý a forma „ $x < x$ “ má pri ľubovoľnom udelení hodnôt hodnotu N. Pravdivostná hodnota výrokového výrazu „V vtedy a len vtedy, keď W“ jednoznačne závisí od toho, aké hodnoty denotujú alebo nadobúdajú výrokové výrazy „V“, „W“. Výrokový výraz tvaru „V vtedy a len vtedy, keď W“ sa nazýva ekvivalencia (výrokových výrazov „V“, „W“); závislosť hodnoty ekvivalencie od hodnôt denotovaných alebo nadobúdajúcich jej čiastkovými výrazmi „V“, „W“ ukazuje tab. 5.

V	W	V vtedy a len vtedy, keď W
N	N	P
N	P	N
P	N	N
P	P	P

Tab. 5

Teda ekvivalencia „V vtedy a len vtedy, keď W“ denotuje alebo nadobúda hodnotu P práve vtedy, keď výrokový výraz „V“ denotuje, resp. nadobúda tú istú hodnotu ako výraz „W“.

Výrokmi formy „V vtedy a len vtedy, keď W“ vyjadrujeme presvedčenie, že obidva čiastkové výroky „V“, „W“ majú tú istú pravdivostnú hodnotu. Ako pri tvorení negácie, konjunkcie, disjunkcie a implikácie, aj pri tvorení ekvivalencie „V vtedy a len vtedy, keď W“ vôbec nezáleží na tom, či medzi čiastkovými výrokovými výrazmi „V“, „W“ existuje nejaká obsahová súvislosť. Význam spojky „vtedy a len vtedy, keď“ je presne a úplne daný tabuľkou 5. Výrokový výraz „V vtedy a len vtedy, keď W“ znamená to isté, čo výraz „Ak V, tak W a ak W, tak V“.

Okrem spojok „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“, „ak . . . , tak ---“, „vtedy a len vtedy, keď“ sa v prirodzenom jazyku i v logike používajú aj iné spojky (napr. „ani nie . . . ani nie ---“, vylučujúce „alebo“ atď.). Týmito spojkami sa tu však podrobnejšie zaoberať nebudeme. Spojkám „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“, „ak . . . , tak ---“, „vtedy a len vtedy, keď“ sme venovali väčšiu pozornosť najmä preto, že sa veľmi často používajú v logike, matematike i v prirodzenom jazyku.

4.6 Výrokové spojky ako vlastné výrazy. Výrokové spojky sme zatiaľ chápali a charakterizovali ako nevlastné výrazy, ktoré v spojení s jedným alebo dvomi výrokovými výrazmi tvoria nový výrokový výraz, denotujúci, resp. nadobúdajúci pravdivostnú hodnotu P alebo N. V určitých úvahách je však účelné pokladať i výrokové spojky za vlastné výrazy, ktoré patria do syntaktickej kategórie v/v alebo v/vv , t. j. za funktoary, ktoré denotujú funkcie typu v/v alebo v/vv . Teraz ukážeme, ktoré funkcie sa analyzovaným spojkám „nie je pravda, že“, „a“,

„alebo“, „ak . . . , tak ---“, „vtedy a len vtedy, keď“ priraďujú ako ich denotáty.

Denotátmi výrokových spojok nemôžu byť lubovoľné funkcie. Typ a konkrétny priebeh funkcie priradenej ako denotát nejakému funktoru musí určitým spôsobom korelovať so syntaktickými a sémantickými vlastnosťami tohto funkтора. Syntakticko-sémantické vlastnosti výrokových spojok (napr. to, s akými a kolkými výrazmi tvoria nové správne utvorené výrazy, čo je denotátom týchto výrazov atď.), ktoré sme zistili a stanovili na základe ich skúmania v 4.1 – 4.5, nám poslúžia ako východisko pre hľadanie ich denotátov. Funktory majú totiž jednu veľmi dôležitú vlastnosť, o ktorej sme sa už zmienili v 2.3:

Správne utvorený výraz $\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n)$ ($n \geq 1$), ktorý vznikne spojením n -argumentovaného funkтора Φ s argumentami w_1, w_2, \dots, w_n (v uvedenom poradí) denotuje práve ten objekt y , ktorý funkcia f denotovaná funktorom Φ priraďuje usporiadanej n -tici $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, pričom x_1 je denotátom w_1 , x_2 denotátom w_2, \dots, x_n denotátom w_n . To znamená, že ak niektorej výrokovkej spojke priradíme funkciu, ktorá usporiadanej n -tici objektov $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ priraďuje objekt y , táto spojka by mala v spojení s n argumentami w_1, w_2, \dots, w_n denotujúcimi objekty x_1, x_2, \dots, x_n vytvárať správne utvorený výraz, ktorý bude denotovať objekt y . Keďže výrokové spojky tvoria s jedným alebo dvomi výrokmi nový výrok a výroky sú výrazy, ktoré denotujú pravdivostné hodnoty, bude vhodné každej výrokovkej spojke priradiť ako denotát funkciu, ktorá pravdivostným hodnotám alebo usporiadaným dvojiciam pravdivostných hodnôt priraďuje pravdivostné hodnoty. Ak výroková spojka vytvára nový výrok v spojení s jedným výrokom, jej denotátom musí byť jednomiestna funkcia, ak ho vytvára v spojení s dvomi výrokmi, jej denotátom bude dvojmiestna funkcia. Aké funkčné hodnoty budú tieto funkcie priraďovať jednotlivým pravdivostným hodnotám, resp. usporiadaným dvojiciam pravdivostných hodnôt?

Nech Φ je lubovoľná výroková spojka, ktorá v spojení s nejakým výrokom „ V “ vytvára nový výrok $\Phi(V)$ a Φ' spojka, ktorá v spojení s lubovoľnými dvomi výrokmi „ V “, „ W “ vytvára výrok $\Phi'(V, W)$. Písmená „ h “, „ h_1 “, „ h_2 “ nech nám reprezentujú pravdivostné hodnoty P, N. Ak výrok „ V “ denotuje pravdivostnú hodnotu h_1 a výrok $\Phi(V)$ hodnotu h_2 , funkcia, ktorá je denotátom spojky Φ , bude pravdivostnej hodnote h_1 priraďovať hodnotu h_2 (nie je vylúčené, že $h_1 = h_2$).⁹⁷ Funkcia, ktorá je denotátom dvojargumentovej spojky Φ' priraďuje usporiadanej dvojici pravdivostných hodnôt $\langle h_1, h_2 \rangle$ hodnotu h práve vtedy, keď výrok $\Phi'(V, W)$ denotuje hodnotu h , výrok „ V “ hodnotu h_1 a výrok „ W “ hodnotu h_2 (nie je vylúčené, že $h = h_1$ alebo $h_1 = h_2$ alebo $h = h_2$). To znamená, že jednotlivé výrokové spojky budú denotovať tieto funkcie:

I. Spojka „nie je pravda, že“ denotuje jednomiestnu funkciu, ktorá pravdivostnej hodnote P priraďuje hodnotu N a pravdivostnej hodnote N hodnotu P.

II. Spojka „a“ denotuje dvojmiestnu funkciu, ktorá usporiadanej dvojici $\langle P, P \rangle$ priraďuje hodnotu P a dvojiciam $\langle N, N \rangle$, $\langle N, P \rangle$, $\langle P, N \rangle$ hodnotu N.

III. Spojka „alebo“ denotuje dvojmiestnu funkciu, ktorá usporiadaným dvoji-

⁹⁷ Ak okrem „nie je pravda, že“ berieme do úvahy aj iné jednoargumentové spojky, ktorými sme sa tu nezaoberali.

ciam $\langle P, P \rangle$, $\langle N, P \rangle$, $\langle P, N \rangle$ priraďuje hodnotu P a usporiadanej dvojici $\langle N, N \rangle$ hodnotu N.

IV. Spojka „ak . . . , tak ---“ denotuje dvojmiestnu funkciu, ktorá usporiadaným dvojiciam $\langle N, N \rangle$, $\langle N, P \rangle$, $\langle P, P \rangle$ priraďuje hodnotu P a usporiadanej dvojici $\langle P, N \rangle$ hodnotu N.

V. Spojka „vtedy a len vtedy, keď“ denotuje dvojmiestnu funkciu, ktorú usporiadaným dvojiciam $\langle N, N \rangle$, $\langle P, P \rangle$ priraďuje hodnotu P a usporiadaným dvojiciam $\langle N, P \rangle$, $\langle P, N \rangle$ hodnotu N.

Tabuľky 1–5 môžeme pokladať za tabuľky funkcií denotovaných jednotlivými výrokovými spojkami.

Pokračovanie