

## ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY

PAVEL CMOREJ

## VII

## VÝROKOVÁ LOGIKA

V úsudkových pravidlách, na ktoré sústreďuje svoju pozornosť výroková logika, nachádzajú sa iba výrokové formy zložené zo zátvoriek, výrokových premenných a výrokových spojok. Výroková logika totiž abstrahuje od vnútornej štruktúry výrokových výrazov, ktoré sa už nedajú rozložiť na nejakú výrokovú spojku a jej argumenty (odhliada od toho, že sú zložené z nejakých predikátových, individuálno-menných, prípadne iných výrazov, napr. individuálno-názvotvorných funktorov) a vzťah logického vyplývania skúma iba natoľko, ako závisí od významu výrokových spojok. A preto jednou z najdôležitejších úloh výrokovej logiky je presné určenie významu výrokových spojok, na ktoré nadväzuje vymedzenie výrokovologickeho vyplývania a iných sémantických pojmov. K významným úlohám výrokovej logiky patrí aj hľadanie a skúmanie rôznych rýdzo syntaktických prostriedkov a metód, pomocou ktorých možno zistiť, či z nejakých výrokových výrazov  $V_1, V_2, \dots, V_n$  výrokovologiccky vyplýva výraz  $W$  alebo nie. V našom výklade sa najprv zameriame na bližšie určenie významu výrokových spojok.

## § 4. Výrokové spojky

V predchádzajúcej časti sme výrokové spojky charakterizovali ako funktoxy, ktoré denotujú funkcie typu  $v/v$  alebo  $v/vv$ . Možno ich však chápať i ako nevlastné výrazy, ktoré v určitých spojeniach s výrokmi alebo výrokovými formami tvoria nové výroky alebo výrokové formy, na čo sme tiež poukázali. Toto chápanie výrokových spojok bude čitateľovi intuitívne bližšie, lebo stanovisko, podľa ktorého výrazy ako „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“, „ak . . . , tak — — —“, „vtedy a len vtedy, keď“ sú *mená* nejakých objektov, bude mu pripadať dosť čudné, prinajlepšom veľmi abstraktné. Z tohto dôvodu najprv ukážeme, čo denotujú alebo aké hodnoty nadobúdajú výrokové výrazy, v ktorých sa výrokové spojky nachádzajú (t. j. určme, ako ich možno charakterizovať, keď sa ponímajú ako nevlastné výrazy) a až potom objasníme, aké funkcie sa im vo výrokovej logike priradujú ako ich denotáty (v prípade, že sa ponímajú ako vlastné výrazy, denotujúce určité objekty). Uvidíme, že pri priradovaní týchto funkcií jednotlivým výrokovým

spojkám možno vychádzať z výsledkov, ktoré získame skúmaním výrokových spojok ponímaných ako nevlastné výrazy; tým zároveň naznačíme, ako obidve chápania výrokových spojok navzájom súvisia.

Výrazy „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“ atď. sa v slovenskom prirodzenom jazyku používajú v rôznych kontextoch a zväčša sú syntakticky alebo sémanticky mnohoznačné. V logike majú jednoznačný a presný význam, ktorý sa (už z tohto dôvodu) viac či menej líši od ich významu v prirodzenom jazyku. Avšak i v prirodzenom jazyku existujú kontexty, v ktorých sa výrokové spojky používajú v tom istom význame ako v logike. Pri určovaní ich významu sa budeme zámerne opierať o také príklady výrokov, v ktorých majú ten istý význam ako v logike. Pritom poukážeme i na niektoré rozdiely a odlišnosti medzi ich používaním v logike a v prirodzenom jazyku.

Význam nevlastných výrazov možno zistiť alebo stanoviť tak, že určíme, ako vplyvajú na význam výrazov, v ktorých sa vyskytujú. Keďže nás tu zaujíma iba denotačná stránka významu jazykových výrazov, stačí určiť, aký vplyv majú výrokové spojky na to, čo denotujú (resp. aké hodnoty nadobúdajú) výrazy, v ktorých sa vyskytujú.

4.1 Negácia. Spojka „nie je pravda, že“ sa v logike používa prakticky v tom istom význame ako v prirodzenom jazyku. Keď túto spojku spojíme s nejakým výrokom, napr. „ $2+2 = 5$ “, dostaneme nový výrok „Nie je pravda, že  $2+2 = 5$ “. Čo denotuje výrok utvorený zo spojky „nie je pravda, že“ a ľubovoľného výroku „ $V$ “<sup>91</sup> Rozoberme niekoľko príkladov. Keď so spojkou „nie je pravda, že“ spojíme napr. výrok „ $2+2 = 5$ “ alebo „4 je prvočíslo“, dostaneme pravdivé výroky „Nie je pravda, že  $2+2 = 5$ “, „Nie je pravda, že 4 je prvočíslo“, t. j. výrazy, ktoré denotujú pravdivostnú hodnotu P. Spojením spojky „nie je pravda, že“ s pravdivým výrokom „ $2+2 = 4$ “ alebo „2 je prvočíslo“ dostaneme nepravdivé výroky „Nie je pravda, že  $2+2 = 4$ “, „Nie je pravda, že 2 je prvočíslo“, teda výrazy denotujúce pravdivostnú hodnotu N. Výrok utvorený zo spojky „nie je pravda, že“ a nejakého výroku „ $V$ “ denotuje pravdivostnú hodnotu P práve vtedy, keď výrok „ $V$ “ je nepravdivý a pravdivostnú hodnotu N práve vtedy, keď výrok „ $V$ “ je pravdivý. Pravdivosť výroku „Nie je pravda, že  $V$ “ jednoznačne závisí od toho, akú pravdivostnú hodnotu denotuje výrok „ $V$ “. Ak „ $V$ “ je výroková forma, hodnota formy „Nie je pravda, že  $V$ “ jednoznačne závisí od hodnoty, ktorú pri danom udelení hodnôt nadobúda forma „ $V$ “. Ak pri danom udelení hodnôt premenným formy „ $V$ “ má forma „ $V$ “ hodnotu P, hodnotou formy „Nie je pravda, že  $V$ “ je N, no ak má forma „ $V$ “ hodnotu N, forma „Nie je pravda, že  $V$ “ nadobúda hodnotu P. Napr. hodnotou formy „Nie je pravda, že  $x > 2$ “ pri udelení hodnoty 3 jej premennej „ $x$ “ je N, lebo výrok „Nie je pravda, že  $3 > 2$ “ je nepravdivý, ale pri udelení hodnoty 2 má forma „Nie je pravda, že  $x > 2$ “ hodnotu P, pretože výrok „Nie je pravda, že  $2 > 2$ “ denotuje pravdivostnú hodnotu P. Výraz utvorený spojením ľubovoľného výrokového výrazu „ $V$ “ so

<sup>91</sup> Písmeno „ $V$ “ tu používame ako skratku za ľubovoľný výrokový výraz, a preto výraz „ $V$ “ nech čitateľ nepokladá za meno písmena „ $V$ “, ale za meno nejakého bližšie neurčeného výroku. Podobným spôsobom budeme ďalej používať aj iné písmená.

spojkou „nie je pravda, že“ vo výrokový výraz „Nie je pravda, že  $V$ “ sa nazýva negácia (výrokového výrazu „ $V$ “). Z pragmatického hľadiska môžeme negáciu „Nie je pravda, že  $V$ “, kde „ $V$ “ je výrok, charakterizovať ako výrok, v ktorom popierame výrok „ $V$ “. Závislosť pravdivostnej hodnoty výroku „Nie je pravda, že  $V$ “ od pravdivostnej hodnoty výroku „ $V$ “, resp. závislosť hodnoty formy „Nie je pravda, že  $V$ “ od hodnoty formy „ $V$ “ možno prehľadne vyjadriť pomocou tabuľky (pozri tab. 1).

$V$	Nie je pravda, že $V$
N	P
P	N

V tejto tabuľke sa pod výrokovým výrazom „ $V$ “ vyskytujú symboly pravdivostných hodnôt, ktoré môže denotovať alebo ako svoje hodnoty nadobúdať výrokový výraz „ $V$ “. Symbol denotátu alebo hodnoty výrokového výrazu „Nie je pravda, že  $V$ “ pri príslušnej hodnote výrokového výrazu „ $V$ “ sa nachádza v tom istom riadku ako symbol denotátu alebo hodnoty výrokového výrazu „ $V$ “. Tab. 1 stručne vyjadruje toto vymedzenie: Výrokový výraz „Nie je pravda, že  $V$ “ je pravdivý, resp. nadobúda hodnotu P (ak ide o formu) práve vtedy, keď výrokový výraz „ $V$ “ je nepravdivý, resp. keď nadobúda hodnotu N a naopak.

Ten istý význam ako výrok „Nie je pravda, že  $V$ “ majú v slovenskom jazyku aj výroky vytvorené z pôvodného výroku pomocou slova „nie“ kladeného pred tvary slovesa „byť“ alebo pomocou nesamostatnej častice „ne“, spájanej so slovesným tvarom prísudku pôvodnej vety a pod. Napr. namiesto výrokov „Nie je pravda, že dnes je pondelok“, „Nie je pravda, že J. K. má výhodné zamestnanie“ v tom istom význame používame výroky „Dnes nie je pondelok“, „J. K. nemá výhodné zamestnanie“. S týmito spôsobmi tvorenia negácie nejakého výroku „ $V$ “ sa možno v slovenčine stretnúť omnoho častejšie ako s negáciou tvaru „Nie je pravda, že  $V$ “; sú totiž stručnejšie a štylisticky pôsobivejšie. Lenže pomocou slova „nie“ alebo častice „ne“ nemôžeme z výroku „ $V$ “ vždy vytvoriť výrok, ktorý by mal ten istý význam ako „Nie je pravda, že  $V$ “. Napr. výrok „Niektorí filozofi nie sú logici“ nemá ten istý význam ako výrok „Nie je pravda, že niektorí filozofi sú logici“, to znamená, že výrok „Niektorí filozofi nie sú logici“ nemôžeme pokladať za negáciu výroku „Niektorí filozofi sú logici“. Kým vo výroku „Niektorí filozofi nie sú logici“ sa tvrdí iba to, že medzi filozofmi sa nachádzajú ľudia, ktorí nie sú logikmi, vo výroku „Nie je pravda, že niektorí filozofi sú logici“ sa tvrdí, že neexistuje ani jeden filozof, ktorý by bol logikom, čo je očividne nepravdivé tvrdenie. Na druhej strane obidva výroky „Niektorí filozofi sú logici“, „Niektorí filozofi nie sú logici“ sú pravdivé, čo je v prípade dvoch výrokov, z ktorých jeden je negáciou druhého, vylúčené. Výrok, ktorý by mal ten istý význam ako „Nie je pravda, že  $V$ “ nemožno pomocou častíc „nie“, „ne“ vytvoriť ani vtedy, keď „ $V$ “ je zložený výrok tvaru „Ak  $V_1$ , tak  $V_2$ “, „ $V_1$  a  $V_2$ “, „ $V_1$  alebo  $V_2$ “ a pod. Namiesto trochu ťažkopádneho a kostrbatého zvratu

„nie je pravda, že“ logika používa jednoduchý symbol, ktorý zavedieme neskôr.

4.2 Konjunkcia. Spojením spojky „a“ s nejakými dvomi výrokmi „V“, „W“ dostaneme v slovenskom jazyku nový výrok „V a W“. Spojka „a“ sa v slovenčine používa aj v iných kontextoch, napr. „červený a čierny“, „dva a tri“ atď., v ktorých má iný význam ako vo výroku „V a W“. Vo výrokovej logike má spojka „a“ ten istý význam ako v kontextoch tvaru „V a W“.<sup>92</sup> Na príkladoch sa možno ľahko presvedčiť, že výrok „V a W“ je pravdivý vtedy a len vtedy, keď je pravdivý výrok „V“ i výrok „W“, v ostatných prípadoch je výrok „V a W“ nepravdivý. Napr. kým výrok

(1) Bratislava je slovenské mesto a Praha je české mesto  
je pravdivý, výroky

(2) Bratislava je české mesto a Praha je české mesto,

(3) Bratislava je slovenské mesto a Praha je slovenské mesto,

(4) Bratislava je české mesto a Praha je slovenské mesto

sú zrejme nepravdivé. Vo výrokoch formy „V a W“ tvrdíme, že obidva čiastkové výroky „V“, „W“ sú pravdivé. Ak aspoň jeden z výrokových výrazov „V“, „W“ je výroková forma, aj „V a W“ je výroková forma, ktorá nadobúda hodnotu P práve vtedy, keď „V“ nadobúda alebo denotuje hodnotu P a zároveň i „W“ nadobúda alebo denotuje hodnotu P. Napr. forma „ $x > 1$  a  $x+1 > 2$ “ nadobúda hodnotu P pri tých udeleniach hodnôt premennej „x“, pri ktorých má forma „ $x > 1$ “ i forma „ $x+1 > 2$ “ hodnotu P. Forma „ $x > 3$  a  $4 > 3$ “ nadobúda hodnotu P vtedy, keď forma „ $x > 3$ “ nadobúda hodnotu P (výrok „ $4 > 3$ “ denotuje P), ale forma „ $x > 3$  a  $2 > 3$ “ má pri každom udelení hodnôt premennej „x“ hodnotu N, lebo čiastkový výraz „ $2 > 3$ “ je nepravdivý výrok. Pravdivosť, resp. hodnota výrokového výrazu „V a W“ závisí jednoznačne od toho, aké hodnoty denotujú alebo nadobúdajú čiastkové výrokové výrazy „V“, „W“. Výrokový výraz „V a W“, ktorý vznikne spojením výrokových výrazov „V“, „W“ pomocou spojky „a“ sa nazýva konjunkcia (výrokových výrazov „V“, „W“). Závislosť pravdivostnej hodnoty konjunkcie „V a W“ od hodnoty alebo denotátu výrokových výrazov „V“, „W“ ukazuje tab. 2.

V	W	V a W
N	N	N
N	P	N
P	N	N
P	P	P

V tejto tabuľke sa pod výrazmi „V“, „W“ nachádzajú symboly hodnôt, ktoré môžu byť denotované alebo nadobúdané výrazmi „V“, „W“. Pod konjunkciou „V a W“ sa vyskytujú symboly hodnôt, ktoré pri príslušných hodnotách výro-

<sup>92</sup> Pokiaľ ju berieme ako vlastný výraz, v kontextoch typu „guľatý a čierny“ vystupuje ako funktor syntaktickej kategórie  $(v/i)/((v/i)(v/i))$  a v kontextoch typu „dva a tri“ (v tom istom význame ako „plus“) ako výraz syntaktickej kategórie  $i/ii$  (pozri 2.4).

kových výrazov „V“, „W“ denotuje alebo nadobúda výraz „V a W“. Z tab. 2 je zrejme, že konjunkcia „V a W“ je pravdivá, resp. nadobúda hodnotu P vtedy a len vtedy, keď výrokový výraz „V“ i výrokový výraz „W“ denotuje alebo nadobúda hodnotu P. V ostatných prípadoch je konjunkcia nepravdivá, resp. nadobúda hodnotu N. Tým je presne určený význam výrokovkej spojky „a“.

Konjunkcia „V a W“ sa v slovenskom prirodzenom jazyku dá vyjadriť aj inými spôsobmi, napr. vo výrokoch formy „V i W“, „V aj W“, „V a zároveň W“ a pod.

4.3 Disjunkcia. Spojka „alebo“ sa v slovenskom jazyku tiež používa v rozličných kontextoch; pomocou tejto spojky tvoríme nielen nové výroky tvaru „V alebo W“, ale i nové predikáty typu „červený alebo čierny“ a iné kategórie výrazov.<sup>93</sup> Ani vo výrokoch tvaru „V alebo W“ nie je jednoznačná (na rozdiel od spojky „a“). Preskúmajme tieto príklady:

- (1) Bratislava je poľské mesto alebo Praha je poľské mesto,
- (2) Bratislava je slovenské mesto alebo Praha je slovenské mesto,
- (3) Bratislava je české mesto alebo Praha je české mesto,
- (4) Bratislava je slovenské mesto alebo Trnava je slovenské mesto.

Podistým každý používateľ slovenského jazyka bude pokladať výrok (1) za nepravdivý a výroky (2), (3) za pravdivé. Názory na pravdivosť hodnotu výroku (4) už nebudú také jednotné. Spojka „alebo“, vyskytujúca sa vo výrokoch tvaru „V alebo W“ je totiž dvojznačná: dá sa interpretovať jednak v zmysle vylučovacom, jednak v zmysle nevylučovacom. Výrok „V alebo W“, v ktorom je spojka „alebo“ použitá vo vylučovacom zmysle, znamená to isté ako výrok

(a) „V alebo W, ale nie je pravda, že (V i W)“ (resp. „Buď V alebo W“) a ak spojka „alebo“ je v ňom použitá v nevylučovacom zmysle, znamená to isté, čo výrok

(b) „V alebo W alebo (V i W)“.

Z pragmatického hľadiska môžeme výrok „V alebo W“, v ktorom má spojka „alebo“ vylučovací zmysel, charakterizovať ako výrok, ktorým vyjadrujeme presvedčenie o tom, že jeden a iba jeden z výrokov „V“, „W“ je pravdivý. Výrokom, v ktorom je spojka „alebo“ použitá v nevylučovacom zmysle, vyjadrujeme presvedčenie, že aspoň jeden z výrokov „V“, „W“ je pravdivý, to znamená, že výrok „V alebo W“ pokladáme za pravdivý i vtedy, keď obidva výroky „V“, „W“ sú pravdivé. Podľa toho, či spojku „alebo“ chápeme vo vylučovacom alebo nevylučovacom zmysle, výrok (4) budeme pokladať za nepravdivý alebo pravdivý.

Interpretácia spojky „alebo“ vo vylučovacom alebo nevylučovacom zmysle často závisí od kontextu alebo situácie, v ktorej je vyjadrený výrok „V alebo W“. Napr. žiakovu odpoveď „F. Kafka napísal román *Proces* alebo román *Zámok*“ (kde výraz „román *Zámok*“ možno chápať ako skratku výroku „F. Kafka napísal román *Zámok*“) budeme zaiste kvalifikovať ako správnu (hoci prezrádza určitú neistotu v jeho vedomostiach) a teda spojku „alebo“ interpretovať v nevylučo-

<sup>93</sup> Vystupuje v podobných kontextoch ako výraz „a“ (pozri pozn. 91).

vacom zmysle. V tomto zmysle budeme spojku „alebo“ interpretovať i vo výroku „Včera bola voľná sobota alebo štátny sviatok“, pretože tento výrok sotva budeme považovať za nepravdivý, ak sa ukáže, že včera bola voľná sobota i štátny sviatok. Ale máloktorý vojak základnej služby bude v nevyučovacom zmysle interpretovať spojku „alebo“, vyskytujúcu sa vo veliteľovej výstrahe „Ak nesplníte rozkaz, týždeň budete mať zakázané vychádzky alebo na Vianoce nepôjdete domov“.

Ak spojka „alebo“ má nevyučovací zmysel, výrok „ $V$  alebo  $W$ “ je pravdivý vtedy a len vtedy, keď aspoň jeden z výrokov „ $V$ “, „ $W$ “ je pravdivý. Ak výraz „ $V$ “ alebo „ $W$ “ je výroková forma, „ $V$  alebo  $W$ “ nadobúda hodnotu  $P$  práve vtedy, keď aspoň jeden z výrokových výrazov „ $V$ “, „ $W$ “ nadobúda alebo denotuje (ak je to výrok) hodnotu  $P$ . Napr. forma „ $x > 3$  alebo  $x+1 > 3$ “ nadobúda hodnotu  $P$  pri každom takom udelení hodnôt premennej „ $x$ “, pri ktorom má aspoň jedna z foriem „ $x > 3$ “, „ $x+1 > 3$ “ hodnotu  $P$ . Forma „ $x > 3$  alebo  $4 > 3$ “ nadobúda hodnotu  $P$  pri každom udelení hodnôt, lebo výrok „ $4 > 3$ “ je pravdivý.

Výrokový výraz „ $V$  alebo  $W$ “, v ktorom má spojka „alebo“ nevyučovací zmysel nazýva sa disjunkcia (výrokových výrazov „ $V$ “, „ $W$ “). Disjunkcia „ $V$  alebo  $W$ “ je pravdivá, resp. nadobúda hodnotu  $P$  vtedy a len vtedy, keď aspoň jeden z výrokových výrazov „ $V$ “, „ $W$ “ denotuje alebo nadobúda (ak je to forma) hodnotu  $P$ . Tým je presne vymedzený význam spojky „alebo“, ktorú budeme odteraz používať iba vo vymedzenom význame.

Pravdivosť výroku „ $V$  alebo  $W$ “, resp. hodnota formy „ $V$  alebo  $W$ “ jednoznačne závisí od toho, aké hodnoty denotujú, resp. nadobúdajú čiastkové výrazy „ $V$ “, „ $W$ “. Túto závislosť vyjadruje tab. 3.

$V$	$W$	$V$ alebo $W$
N	N	N
N	P	P
P	N	P
P	P	P