ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY

PAVEL CMOREJ

VI

2.5 **Operátory.** V 2.4 sme uviedli, že okrem výrazov, ktoré pomenúvajú nejaké objekty alebo nadobúdajú určité hodnoty, v každom jazyku existujú i tzv. nevlastné (synkategorematické) výrazy a ich spojenia, ktoré samy osebe nič nepomenúvajú ani nenadobúdajú nijaké hodnoty, ale v určitom spojení s vlastnými výrazmi tvoria nové vlastné výrazy. Medzi najdôležitejšie nevlastné výrazy patria operátory. V prirodzených jazykoch sa operátory nevyskytujú, veľmi často sa však nachádzajú v jazykoch modernej logiky, matematiky a tých vedeckých disciplín, ktoré hojne používajú logicko-matematický pojmový aparát. Podobný význam a funkciu ako operátory majú v prirodzenom slovenskom jazyku výrazy ako „každý", „všetci", „niektorí", „žiadny", „existuje aspoň jeden", „ten jediný . . , ktorý" a pod.

Operátory sú jednoduché nevlastné symboly alebo ich spojenia, ktoré v určitom spojení s premennými a formami (alebo konštantami) tvoria nové formy a konštanty.[78] Hoci operátory nepomenúvajú nijaké objekty ani nenadobúdajú nijaké hodnoty, predsa výrazne vplývajú na to, čo denotujú, alebo aké hodnoty nadobúdajú zložené vlastné výrazy, v ktorých sa vyskytujú. Keď budeme ďalej hovoriť o význame operátorov, budeme mať na mysli práve túto okolnosť. Samy osebe operátory nemajú nijaký význam v tom zmysle, že nič nepomenúvajú ani nenadobúdajú nijaké hodnoty.

Aby sme sa bližšie oboznámili s významom a používaním niektorých operátorov, najprv si všimneme niekoľko príkladov. Majme výrokovú formu „Ak $D(x,4)$, tak $D(x,8)$", kde „D" je predikát „je deliteľom". Oblasťou hodnôt jej premennej „x" nech je množina nezáporných celých čísel. Hodnotou tejto formy pri ľubovoľnej hodnote jej premennej je pravdivostná hodnota **P**, pretože každé nezáporné celé číslo, ktoré je deliteľom čísla 4, je aj deliteľom čísla 8. Inak povedané, uvedenú výrokovú formu spĺňa každé udelenie hodnôt. Fakt, že každé nezáporné celé číslo x, ktoré je deliteľom čísla 4, je aj deliteľom čísla 8, môžeme vyjadriť takto: „Pre každé x platí, že ak $D(x,4)$, tak $D(x,8)$" (resp. „Pre každé x: ak $D(x,4)$, tak $D(x,8)$"). Namiesto zvratov „pre každé . . . platí, že", „pre

[78] Podľa niektorých teórií aj operátory možno chápať ako vlastné výrazy. Popri R. Suszko, *Syntactic structure and semantical reference*. Studia logica VIII, 213—243 a Studia logica IX, 63—91.

každé", „pre všetky" sa v logike používa jednoduchý nevlastný symbol „∀".[79] Tento symbol je operátor. Vlastný výraz, ktorý dostaneme spojením operátora „∀" s nejakou premennou, napr. „x", a výrokovou formou (alebo výrokom) Ψ zapisujeme v logike spravidla takto: $(\forall x)(\Psi)$, napr. $(\forall x)$(Ak $D(x,4)$, tak $D(x,8)$).

Výrokovú formu „$D(x, 100)$" spĺňajú iba niektoré udelenia hodnôt premennej „x", pretože iba niektoré nezáporné celé čísla sú deliteľmi čísla 100. Túto okolnosť môžeme vyjadriť takto: „Pre niektoré x platí, že $D(x,100)$" (resp. „Pre niektoré x: $D(x,100)$"). Zvrat „pre niektoré ... platí, že" (resp. „pre niektoré") nahradzujeme v logike jednoduchým nevlastným symbolom „∃", ktorý čítame aj takto: „existuje aspoň jedno ... také, že". Symbol „∃" je operátor, ktory spolu s nejakou premennou, napr. „x", a výrokovou formou (alebo výrokom) Ψ vytvára nový vlastný výraz $(\exists x)(\Psi)$, napr. „$(\exists x)(D(x,100))$"[80]

Operátor „∀" sa nazýva *všeobecný kvantifikátor* a operátor „∃" *existenčný* alebo *čiastočný kvantifikátor.*[81] **Kvantifikátory** sú také operátory, ktoré v určitom spojení s premennými a *výrokovými* formami (alebo výrokmi) tvoria nové *výrokové* formy alebo *výroky.* Okrem všeobecného a existenčného kvantifikátora existuje aj mnoho iných kvantifikátorov; patria k nim rôzne nevlastné symboly, ktorým v slovenskom prirodzenom jazyku zodpovedajú napr. tieto zvraty: „existuje presne jedno ... také, že", „existuje nanajvýš jedno ... také, že", „existujú aspoň dva ... také, že" „existujú nanajvýš dva ... také, že", „existujú presne dva ... také, že", „existujú aspoň tri ... také, že" atď. Namiesto týchto výrazov sa v logike zavádzajú rôzne nevlastné symboly.

Nie každý operátor je kvantifikátor. Kvantifikátormi nie sú napr. operátory, ktoré spolu s premennými a nejakými formami alebo konštantami vytvárajú individuálnonázvové alebo rôzne funktorové výrazy. O niektorých z nich sa stručne zmienime v závere tejto časti. Osobitnú pozornosť budeme ďalej venovať najmä všeobecnému a existenčnému kvantifikátoru, o ostatných operátoroch budeme hovoriť len všeobecne.

Význam výrazov, v ktorých sa vyskytujú operátory silne závisí od toho, aká oblasť hodnôt je priradená premenným, ktoré s operátormi spájame. Ak oblasťou hodnôt premennej „x" je množina všetkých celých čísel, výraz $(\forall x)(\Psi)$ znamená to isté, čo výraz „Pre každé celé číslo x platí, že Ψ", no keď oblasťou hodnôt premennej „x" je množina reálnych čísel, výraz $(\forall x)\Psi$ má ten istý význam ako „Pre každé reálne číslo x platí, že Ψ". Obdobne od oblasti hodnôt premennej „x" závisí i význam výrazu $(\exists x)(\Psi)$.

Keďže kvantifikátory sú nevlastné výrazy, ich význam a sémantickú funkciu môžeme najpresnejšie stanoviť tak, že určíme, aký vplyv majú na to, čo denotujú alebo aké hodnoty nadobúdajú zložené vlastné výrazy, v ktorých sa kvantifikátory

[79] Okrem „∀" sa namiesto zvratu „pre všetky" používajú aj iné symboly.

[80] Okrem „∃" sa namiesto zvratu „pre niektoré" používajú aj iné symboly.

[81] Často sa kvantifikátormi nazývajú spojenia výrazov „∀" „∃" s premennými, niekedy ich spojenia so zátvorkami „(∀...)", „(∃ ...)", prípadne výrazy, ktoré dostaneme z posledných tak, že prázdne miesto „..." vyplníme ľubovoľnou premenou.

nachádzajú. Najprv však ukážeme, že niektoré správne utvorené výrazy, v ktorých sa kvantifikátory nachádzajú, môžu niečo denotovať, t. j. že môžu byť konštantami, hoci sa v nich vyskytujú premenné. To sa plne vzťahuje i na výrazy s inými operátormi.

Výraz „$D(x,100)$" je singulárna forma, ktorá môže nadobúdať rôzne hodnoty: pri niektorých hodnotách premennej „x" hodnotu P, pri iných — hodnotu N. Na rozdiel od formy „$D(x,100)$", výraz „$(\exists x)(D(x,100))$" je pravdivý a výraz „$(\forall x)(D(x,100))$" nepravdivý výrok, to znamená, že výraz „$(\exists x)(D(x,100))$" denotuje pravdivostnú hodnotu P, výraz „$(\forall x)(D(x,100))$" pravdivostnú hodnotu N. Teda napriek tomu, že v obidvoch výrazoch sa vyskytuje premenná „x", výrazy „$(\exists x)(D(x,100))$" „$(\forall x)(D(x,100))$" sú vlastne konštanty. Ich pravdivostná hodnota vôbec nezávisí od toho, aké hodnoty priradíme premennej „x" (z oblasti jej premennosti). Udeľovanie hodnôt premennej „x" v týchto výrazoch nemá nijaký zmysel. A nemá zmysel ani dosadzovanie nejakých konštánt za túto premennú. Napr. dosadením konštanty „2" za premennú „x" vo výraze „$(\exists x)(D(x,100))$" dostaneme výraz „$(\exists 2)(D(2,100))$", ktorý nemá nijaký zmysel. Premenná „x" sa vo forme „$D(x,100)$" vyskytuje iným spôsobom a má inú sémantickú funkciu ako vo výrazoch „$(\exists x)(D(x,100))$", „$(\forall x)(D(x,100))$", čo platí aj o premenných, ktoré sa nachádzajú v podobných spojeniach s inými operátormi v iných výrazoch. Logika obidva druhy výskytov premenných prísne odlišuje.

Nech Ω je ľubovoľný operátor, z taká premenná a Ψ taký výraz, ktoré v spojení $(\Omega z)(\Psi)$ vytvárajú nový správne utvorený výraz nejakého jazyka J. Výraz Ψ, ktorý sa nachádza v zátvorkách za výrazom (Ωz), nazýva sa *dosahom operátora* Ω. Voľnejšie povedané, dosahom operátora Ω je výraz, na ktorý sa výraz (Ωz) vzťahuje. Napr. dosahom kvantifikátora „$\exists$" vo výrazoch „$(\exists x)(D(x,100))$", „Ak $(\exists x)(D(x,100))$, tak $x < 100$" je výraz „$D(x,100)$". Ak bude z kontextu jasné, že (Ωz) sa vzťahuje na celý výraz Ψ a nie iba na jeho časť, zátvorky, v ktorých sa vyskytuje dosah operátora Ω budeme často vynechávať.

Predpokladajme, že W je ľubovoľný správne utvorený výraz jazyka J. **Viazaným výskytom** premennej z vo výraze W budeme nazývať jednak výskyt premennej z vo výraze (Ωz), jednak každý výskyt tejto premennej v dosahu operátora Ω spojeného s premennou z. Výskyt nejakej premennej vo výraze W, ktorý nie je viazaný, nazýva sa **voľným výskytom** tejto premennej vo výraze W. Napr. vo výraze „$(\exists x)(x+x = y)$ *a* $(\forall u)(u+x>x)$" prvé tri výskyty premennej „x" sú viazané, posledné dva voľné, jediný výskyt premennej „y" voľný a obidva výskyty premennej „u" viazané.

Premenná sa nazýva **viazaná** vo výraze W vtedy, keď má v ňom aspoň jeden viazaný výskyt. Budeme tiež hovoriť, že operátor Ω *viaže* premennú z vo výraze W. Premenná, ktorá má vo výraze W aspoň jeden voľný výskyt, nazýva sa **voľná** premenná vo výraze W. Upozorňujeme na to, že tá istá premenná môže byť vo výraze W voľná i viazaná, napr. „x" vo výraze „$(\exists x)(x+x = 0)$ a

$(x+y = y)$".[82] Utvorenie výrazu $(\forall z)\Psi$ alebo výrazu $(\exists z)\Psi$ budeme nazývať *kvantifikáciou* výrazu Ψ.

Všimnime si teraz výrazy, v ktorých sa vyskytujú voľné i viazané premenné. Takým výrazom je napr. výraz „$(\forall x)(x . y = y)$", ktorý obsahuje voľnú premennú „y". Predpokladajme, že oblasťou hodnôt premennej „y" je tiež množina nezáporných celých čísel. Je výraz „$(\forall x)(x . y = y)$" výrok alebo forma? Nie je to výraz, ktorý by bol pravdivý alebo nepravdivý, nadobúda však určité hodnoty v závislosti od toho, aké hodnoty udelíme premennej „y". Ak premennej „y" udelíme hodnotu 0, hodnotou výrazu „$(\forall x)(x . y = y)$" je P, v ostatných prípadoch nadobúda tento výraz hodnotu N, pretože „$(\forall x)(x . 0 = 0)$" je pravdivý výrok a žiadny z výrokov „$(\forall x)(x . a = a)$", kde „a" je ľubovoľné meno celého nezáporného čísla rôzneho od 0, nie je pravdivý. Výraz „$(\forall x)(x . y = y)$" je teda forma, ktorej hodnota závisí od hodnoty, udelenej jej voľnej premennej „y".

Ak sa v ľubovoľnom správne utvorenom výraze W okrem viazaných vyskytujú aj nejaké voľné premenné, výraz W nemá nijaký denotát, nadobúda však určité hodnoty, ktoré závisia od hodnôt udelených voľným premenným výrazu W. Formu môžeme vlastne charakterizovať ako výraz, v ktorom sa vyskytuje aspoň jedna voľná premenná.[83]

Viazané premenné sa od voľných líšia predovšetkým v tom, že

(i) hodnota foriem, v ktorých sa vyskytujú, nezávisí od hodnôt priradených týmto premenným. Z tohto dôvodu nemá udeľovanie hodnôt viazaným premenným nijaký zmysel.

(ii) Za viazané premenné sa nedosadzujú nijaké konštanty, lebo výrazy, ktoré možno týmto dosadením získať, sú nezmyselné.

Veľký význam premenných je aj v tom, že nám umožňujú spolu s kvantifikátormi (aj inými operátormi) formulovať rôzne tvrdenia o tých predmetoch, ktoré nemajú v danom jazyku svoje mená, ale sú prvkami oblasti hodnôt týchto premenných.

---

[82] Výrazy, v ktorých sa nejaká premenná vyskytuje ako voľná i viazaná, nepokladajú sa v niektorých umelých jazykoch z určitých technických dôvodov za správne utvorené. Z podobných dôvodov sa za nesprávne utvorené niekedy pokladajú i výrazy, ktoré vznikajú spojením nejakej konštanty Ψ s výrazom (Ωz), kde z je ľubovoľná premenná.

[83] V 2.4 sme n-árnu formu charakterizovali ako výraz, ktorý možno z nejakého mena w získať nahradením nejakých mien $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ktoré sa vo w vyskytujú, premennými $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Pritom sme predpokladali, že premenné $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sa v mene w nevyskytujú. Aby sme objasnili zmysel tohto predpokladu, pripusťme, že niektorá premenná z_i $(1 \leq i \leq n)$ sa vyskytuje vo w. Keďže w je meno, t. j. konštanta, z_i sa vo w môže vyskytovať len ako viazaná premenná. Niektoré výskyty mena v_i sa vo w môžu nachádzať v dosahu operátora, ktorý viaže premennú z_i. Keby sme tieto výskyty mena v_i nahradili premennou z_i, nezískali by sme n-árnu formu, pretože každý z týchto výskytov premennej z_i by sa stal viazaným výskytom premennej z_i vo výraze w (získali by sme nanajvýš $(n$-$1)$-árnu formu, pravda, keby sa aspoň niektoré nahradzované výskyty každého z ostatných mien nachádzali mimo dosahu operátora, viažúceho premennú, ktorou by sme príslušné meno nahradzovali). Za predpokladu, že každé nahradzované meno v_i má v mene w aspoň jeden výskyt mimo dosahu operátora viažúceho premennú z_i možno n-árnu formu získať z mena w i v prípade, že niektoré z premenných $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sa vo w už vyskytujú (pozri pozn. 50, 51, 53, 54). Teda podmienka, aby sa premenné $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nevyskytovali vo w nie je vo vymedzení formy nutná, umožnila nám však toto vymedzenie zjednodušiť, čo bolo na danej úrovni výkladu nevyhnutné.

Teraz už môžeme presne stanoviť, čo denotujú alebo aké hodnotý nadobúdajú výrokové výrazy, v ktorých sa vyskytujú kvantifikátory. Nech Ψ je singulárna výroková forma, v ktorej sa vyskytuje voľná premenná z. Výrok $(\forall z)\Psi$ je pravdivý vtedy a len vtedy, keď každé udelenie hodnôt premennej z spĺňa formu Ψ. Ak existuje aspoň jedno udelenie hodnôt premennej z, pri ktorom má forma Ψ hodnotu N, výrok $(\forall z)\Psi$ je nepravdivý. Napr. výraz „$(\forall x)D(x,x)$" je pravdivý a výraz „$(\forall x)D(x,100)$" nepravdivý výrok, pretože formu „$D(x,x)$" spĺňa každé udelenie hodnôt premennej „x" a existujú také udelenia hodnôt premennej „x", pri ktorých má forma „$D(x,100)$" hodnotu N (t. j. ktoré túto formu nespĺňajú).

Výrok $(\exists z)\Psi$ je pravdivý vtedy a len vtedy, keď aspoň jedno udelenie hodnôt premennej z spĺňa formu Ψ. Napr. výrok „$(\exists x)$ $D(x,100)$" je pravdivý. Ak Ψ je výrok, $(\forall z)\Psi$ alebo $(\exists z)\Psi$ je pravdivý výrok vtedy a len vtedy, keď Ψ je pravdivý výrok. Výrokom $(\forall z)\Psi$, $(\exists z)\Psi$ pripisujeme v tomto prípade ten istý význam ako výroku Ψ.[84]

Pretože kvantifikátory sa môžu vyskytovať aj vo formách, musíme ukázať, aký vplyv majú kvantifikátory na nadobúdanie hodnôt týmito formami. Nech χ je ľubovoľné udelenie hodnôt premenným $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (každej premennej syntaktickej kategórie α nejaký objekt typu α z oblasti jej premennosti). Hodnotu priradenú udelením χ premennej z_i $(1 \leq i \leq n)$ budeme označovať symbolom $\chi(z_i)$. Budeme hovoriť, že *udelenie hodnôt χ' sa líši od udelenia χ nanajvýš tým, akú hodnotu priraďuje premennej z,* keď je splnená podmienka (1) alebo (2):

(1) Ak z je jedna z premenných $z_1, z_2, \ldots, z_n$, pre každú z_i platí, že $\chi'(z_i) = \chi(z_i)$ alebo pre každú premennú z_j rôznu od z platí, že $\chi'(z_j) = \chi(z_j)$, ale $\chi'(z) \neq \chi(z)$.

(2) Ak žiadna z premenných $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nie je premenná z, $\chi'(z_i) = \chi(z_i)$ a χ' priraďuje nejakú hodnotu i premennej z.

Ľubovoľné udelenie hodnôt, ktoré sa od udelenia χ líši nanajvýš udelením premennej z, budeme označovať symbolom $[\chi^z]$. Napr. nech χ je nejaké udelenie hodnôt premenným z_1 a z_2. Udelením $[\chi^{z_1}]$ je jednak udelenie χ, jednak každé udelenie premenným z_1, z_2, ktoré $[\chi^{z_1}](z_2) = \chi(z_2)$, ale $[\chi^{z_1}](z_1) \neq \chi(z_1)$. Udelením $[\chi^{z_3}]$ je každé udelenie, ktoré priraďuje nejakú hodnotu premennej z_3 a $[\chi^{z_3}](z_1) = \chi(z_1)$, $[\chi^{z_3}](z_2) = \chi(z_2)$.

Majme ľubovoľnú n-árnu $(n \geq 2)$ výrokovú formu Ψ, ktorej sa vyskytujú práve voľné premenné $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Kvantifikáciou formy Ψ môžeme získať $(n\text{-}1)$-árne formy $(\forall z_i)\Psi$, $(\exists z_i)\Psi$. Nech χ je ľubovoľné udelenie hodnôt voľným premenným $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n$ formy $(\forall z_i)\Psi$ alebo $(\exists z_i)\Psi$. Hodnotou formy $(\forall z_i)\Psi$ (resp. $(\exists z_i)\Psi$) pri udelení hodnôt χ je pravdivostná hodnota **P** vtedy a len vtedy, keď každé (resp. aspoň jedno) udelenie hodnôt $[\chi^{z_i}]$ spĺňa formu Ψ. Napr. hodnotou formy „$(\forall y)(x \leq y)$" pri udelení hodnôt $\chi(x) = 0$ je **P**, lebo každé $[\chi^y]$ spĺňa formu „$x \leq y$, ale

[84] Pozri pozn. 82.

hodnotou tej istej formy pri udelení hodnôt $\chi(x) = 2$ je N, lebo nie každé $[\chi^y]$ spĺňa formu „$x \leq y$; nespĺňa ju napr. udelenie $[\chi^y](x) = 2$, $[\chi^y](y) = 1$.[85]

K operátorom, ktoré nie sú kvantifikátormi patria napr. výrazy, ktorým v slovenskom prirodzenom jazyku približne zodpovedajú tieto zvraty: „to jediné ... také, že", „množina tých ..., pre ktoré platí, že". Namiesto prvého zvratu sa zväčša používa jednoduchý nevlastný symbol „ι", ktorý nazývame *operátorom deskripcie* alebo *deskriptorom* a namiesto druhého zvratu — symbol „λ", ktorý nazývame *operátorom abstrakcie* alebo *abstraktorom*. Deskriptor „ι" tvorí v spojení s nejakou individuálno-názvovou premennou, napr. „x", a výrokovou formou Ψ individuálno-názvový výraz $(\iota x)\Psi$, ktorý čítame takto: „to jediné x také, že Ψ", napr. „$(\iota x)(x$ je párne a x je prvočíslo)". Keď s operátorom abstrakcie spojíme individuálno-názvovú premennú a výrokovú formu Ψ, dostaneme predikátový výraz $(\lambda x)\Psi$ syntaktickej kategórie v/i, napr. „$(\lambda x)(x$ je párne)". Obidva uvedené operátory sa používajú aj v iných spojeniach. Inými operátormi ani významom deskriptora a abstraktora sa tu ďalej zaoberať nebudeme.

*

Na záver našich úvah o logickej štruktúre jazyka ešte niekoľko poznámok. V predchádzajúcich častiach sa čitateľ zoznámil so základnými poznatkami o logickej štruktúre jazyka, pričom získal i určité elementárne znalosti z logickej sémantiky. Treba zdôrazniť, že pokiaľ ide o významovú stránku jazykových výrazov, naša analýza sa obmedzovala na niektoré problémy denotačnej sémantiky a úplne odhliadala od iných významových aspektov jazykových výrazov. Zaujímalo nás iba to, čo jazykové výrazy denotujú. Keď sme hovorili o význame jazykových výrazov, mali sme na mysli vždy iba to, čo tieto výrazy denotujú alebo aké hodnoty nadobúdajú, prípadne ako vplývajú na túto stránku iných výrazov, v ktorých sa vyskytujú. Avšak význam jazykových výrazov nespočíva len v tom, že niečo denotujú (tým skôr, že niektoré výrazy vôbec nedenotujú); dva výrazy môžu mať ten istý denotát a predsa nemusia mať ten istý význam, napr. výrazy „hlavné mesto Slovenska" a „najväčšie slovenské mesto". Hovorí sa tiež, že tieto výrazy majú ten istý denotát, ale rôzny zmysel. Týmito problémami sa zaoberá veľmi zaujímavá časť logickej sémantiky — teória zmyslu jazykových výrazov.[86] Od otázok zmyslu jazykových výrazov budeme však i naďalej plne abstrahovať.

Bolo by mylné domnievať sa, že do načrtnutej schémy logickej štruktúry jazyka možno vtesnať prirodzený jazyk alebo ľubovoľný fragment tohto jazyka. Tejto schéme plne vyhovujú iba niektoré ideálne vedecké jazyky. No napriek tomu podobnú analýzu a kategorizáciu jazykových výrazov možno *približne* urobiť v každom jazyku (alebo fragmente jazyka), skonštruovanom na vyjadrovanie poznatkov o určitej množine individuí, t. j. v jazyku, ktorý má plniť predo-

[85] Upozorňujeme na to, že oblasťou hodnôt premenných „x", „y" je množina nezáporných celých čísel.

[86] Táto teória je časťou tzv. intenzionálnej sémantiky, kým otázky denotácie patria do tzv. extenzionálnej sémantiky.

všetkým určitú kognitívnu funkciu. Pravda, to neznamená, že každý z týchto jazykov bude obsahovať všetky možné kategórie a druhy jazykových výrazov, o ktorých sme tu hovorili. Charakteristickou črtou týchto jazykov je to, že sa v nich nenachádzajú intenzionálne funktory a tzv. intenzionálne kontexty typu „$X.Y$ verí, že V", „Je možné, že V", „Je nutné, že V" atď. (kde „V" je ľubovoľný výrok), ktoré skúma intenzionálna sémantika.

Pri analýze a kategorizácii jazykových výrazov nejedného jazyka treba často robiť rôzne úpravy pôvodného textu alebo dokonca zavádzať nové výrazy, napr. premenné, operátory a podobne. Logickú analýzu konkrétneho textu (napr. filozofického) formulovaného vo fragmente prirodzeného jazyka možno často primerane zvládnuť iba preložením daného textu do umelého alebo miešaného jazyka, pretože len v takom jazyku sa vyskytujú premenné a operátory, potrebné na presnú formuláciu mnohých tvrdení. A práve v tom tkvie obťažnosť a náročnosť tejto analýzy, ktorá sa iba niekedy dá zredukovať na rozčlenenie textu a zaradenie jednotlivých výrazov do určitých syntaktických kategórií. Týka sa to najmä textov obsahujúcich zvraty, ktorým v jazyku logiky zodpovedajú operátory. Ku konkrétnej analýze niektorých výrazov slovenského prirodzeného jazyka sa vrátime pri výklade výrokovej a predikátovej logiky.

Treba tiež zdôrazniť, že načrtnutá syntakticko-sémantická analýza jazykových výrazov a ich kategorizácia nie je jediná, že existujú aj iné teórie logickej štruktúry jazykových výrazov a ich vzťahov k mimojazykovým objektom.

§ 3. Predmet logiky

V úvode sme formálnu logiku charakterizovali ako vedu o pravidlách správneho usudzovania. Teraz sa pokúsime túto charakteristiku spresniť a doplniť.

Ľubovoľný rad výrokových foriem $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, v ktorom je nejakým spôsobom vyčlenená a od foriem premís odlíšená forma záveru, budeme nazývať *úsudkovým pravidlom* (*pravidlom usudzovania* alebo *sekvenciou*). V zápise sekvencií budeme formy premís oddeľovať od formy záveru vodorovnou alebo svislou čiarou, t. j. budeme ich zapisovať takto:

$$\frac{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}}{\Psi_n}$$

alebo jednoducho takto: $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1} \mid \Psi_n$

Úsudkové pravidlo je vlastne určitá jazyková schéma nejakých úsudkov. Dosadením konštánt za voľné premenné, vyskytujúce sa vo výrokových formách $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ dostaneme konkrétny úsudok v jeho jazykovej podobe. Formami premís a záveru v úsudkových pravidlách môžu byť ľubovoľné výrokové formy.[87] Logika sústreďuje svoju pozornosť na pravidlá s takými výrokovými formami, v ktorých sa okrem zátvoriek, interpunkčných znamienok a premenných vyskytujú iba tzv. logické termíny. **Logickými termínmi** sú jednak výrazy „nie je pravda,

[87] To znamená, že za úsudkové pravidlá pokladáme aj schémy nesprávnych úsudkov.

že“, „a“, „alebo“, „ak ..., tak ...“, „vtedy alen vtedy, keď“, „$\forall$“ ‘„$\exists$“, „=“ (resp. „je“), jednak výrazy, ktoré možno pomocou uvedených výrazov definovať. Význam prvých piatich termínov bližšie určíme vo výrokovej a význam ostatných termínov v predikátovej logike. Príznačnou črtou logických termínov je ich univerzálnosť, ktorá spočíva v tom, že sa používajú v jazyku každej vedeckej disciplíny. Okrem týchto termínov sa v jazyku každej vedy nachádzajú tzv. **mimologické termíny,** ktoré sa používajú iba v jazykoch niektorých vied. Bez týchto termínov by špeciálne vedy nemohli formulovať svoje poznatky o prvkoch z konkrétneho univerza U, ktoré tvorí oblasť skúmania týchto vied. Svojím významom sú mimologické termíny úzko späté s určitým univerzom U a funkciami nad U; {P,N}.Bližším určením významu mimologických termínov sa zapodievajú špeciálne vedy. Skúmaním vlastností logických termínov a vymedzením ich významu sa zaoberá formálna logika.

Logická forma je taká forma, v ktorej sa nevyskytujú nijaké mimologické termíny. Napr. ak „R“ je dvojmiestna predikátová premenná a „x_1“, x_2“ individuálno-názvové premenné, tak „$R(x_1, x_2)$“, „Ak $R(x_1, x_2)$, tak nie je pravda, že $R(x_2, x_1)$“, „$(\forall x_1)(\exists x_2)R(x_1, x_2)$ a $(\exists x_2)(x_1)Rx_1,x_2)$“ atď. sú logické formy. Logika sa vo svojom skúmaní sústreďuje hlavne na logické formy. Skúma také vlastnosti logických (a to najmä výrokových) foriem a také vzťahy medzi nimi, ktoré závisia od ich vzťahov k *ľubovoľnému* neprázdnemu univerzu U. Preto sa jazyku, v ktorom logika formuluje svoje tvrdenia a pravidlá správneho usudzovania nepriraďuje nijaké konkrétne univerzum.[88] Kým v konkrétných jazykoch sa uvažuje o udeleniach hodnôt, daných určitým univerzom U a funkciami nad U; {P, N}, v logike uvažujeme všetky možné udelenia hodnôt z *ľubovoľného* univerza U a množiny funkcií nad U; {P, N}. Každé udelenie hodnôt χ, ktorým sa premenným logických foriem priraďujú indivíduá z nejakého univerza U, pravdivostné hodnoty alebo funkcie nad U; {P, N} budeme nazývať *udelením hodnôt nad* U.[89]

Jedným z najdôležitejších pojmov logiky je pojem logického vyplývania. Pomocou tohto pojmu možno presne vymedziť pravidlá správneho usudzovania. Nech $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ sú logické výrokové formy. Budeme hovoriť, že **z foriem $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ logicky vyplýva forma Ψ_n** vtedy a len vtedy, keď pre každé neprázdne univerzum U a pre každé udelenie hodnôt χ nad U platí, že ak χ spĺňa formy $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, tak χ spĺňa formu Ψ_n. Priradením určitých oblastí hodnôt premenným, ktoré sa nachádzajú vo formách $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ a dosadením vhodných konštánt konkrétneho jazyka J s univerzom U za ich voľné premenné (za každý výskyt určitej premennej vo všetkých formách tú istú konštantu) dostaneme nejaké výroky $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Ak forma Ψ_n logicky vyplýva z foriem

[88] Z toho vyplýva, že ani premenným nie sú priradené nijaké oblasti hodnôt; vieme o nich akurát to, do ktorej syntaktickej kategórie patria. Tento jazyk nie je vlastne jazykom v pravom zmysle slova.

[89] Pokiaľ ide o viazané premenné, ktoré sa nachádzajú v logických výrokových formách, predpokladáme, že pri danom udelení hodnôt nad U prebiehajú množinu objektov príslušného typu, t. j. buď indivíduá z U, pravdivostné hodnoty alebo funkcie nad U; {P, N}.

$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, aj o výrokoch $V_1, V_2, \ldots, V_n$ budeme hovoriť, že **výrok V_n logicky vyplýva z výrokov $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$**.

Úsudkové pravidlo, v ktorom $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$ sú logické výrokové formy premís a Ψ_n logická forma záveru budeme nazývať **deduktívnym úsudkovým pravidlom** (*pravidlom správneho usudzovania* alebo **platnou sekvenciou**) vtedy a len vtedy, keď z foriem premís $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$ logicky vyplýva forma záveru Ψ_n.[90]

Pretože každé udelenie hodnôt, spĺňajúce formy premís nejakého deduktívneho pravidla spĺňa i formu záveru, do výrokových foriem tohto pravidla nemožno nikdy dosadiť tak, že z foriem premís dostaneme pravdivé výroky a z formy záveru — nepravdivý výrok. Voľnejšie povedané, pomocou deduktívnych pravidiel možno z pravdivých premís vyvodiť vždy iba pravdivé závery. Jednou z hlavných úloh logiky je práve skúmanie deduktívnych úsudkových pravidiel. Logika hľadá metódy, pomocou ktorých možno zistiť, či určité úsudkové pravidlo, v ktorom sa vyskytujú len logické výrokové formy, je správne, deduktívne alebo nie. A buduje rôzne systémy týchto pravidiel. S týmito úlohami je neodmysliteľne spojené aj skúmanie vzťahu logického vyplývania a iných vzťahov medzi logickými výrokovými formami a medzi výrokmi (prípadne skúmanie rozličných vlastností týchto foriem a výrokov), ktoré so vzťahom vyplývania úzko súvisia.

Pokračovanie

Oprava:

V pokračovaní IV (Filozofia 2, roč. XXIII 1968) sú tieto tlačové chyby: na str. 216 v 7. riadku zdola treba vypustiť posledné dve čiarky, na str. 217 v 7. riadku zdola namiesto „φ" má byť „Ψ", na str. 221 v 7. riadku zdola namiesto „tým" má byť „tým istým", na str. 222 vo 4. riadku zdola má byť „$(i/i)/((i/i)(i/i))$" a v 3. riadku zdola namiesto „de" má byť „kde".

V pokračovaní V (Filozofia 3, roč. XXIII 1968) sú tieto tlačové chyby: na str. 325 vo 4. a 5. riadku zhora má byť veta „Funktorový výraz, s ktorým treba spojiť n argumentov, aby sme dostali správne utvorený výraz, nazýva sa *n-argumentovým funktorovým výrazom.*[63]". Na str. 325 v 9. riadku zdola má byť „W_1 a W'_1 sú výroky, v ktoré X.Y. verí a W_2 a W'_2 výroky", na str. 326 v prvom riadku zhora namiesto „W_1 a W_2 nepravdivé." má byť „W'_1 a W'_2 nepravdivé.", v druhom riadku zhora namiesto „W_1" má byť „W'_1" a v treťom riadku zhora namiesto „W_2 alebo s nepravdivým výrokom W_2" má byť „W_2 alebo s nepravdivým výrokom W'_2". Na str. 327 v 25. riadku zhora namiesto „výrazom w" má byť „výrazom výrazu w".

[90] V niektorých pravidlách obsažnejších logických systémov (napr. teórie typov) sa môžu vyskytovať aj výrokové výrazy bez *voľných* premenných. Tieto výrokové výrazy nie sú výrokmi v pravom zmysle slova (ich premenným nie sú priradené nijaké určité oblasti hodnôt), nie sú však ani logickými výrokovými formami, lebo sa v nich nevyskytujú voľné premenné, hoci ide o *logické* výrazy, pretože sa v nich nenachádzajú mimologické termíny. Pojem úsudkového pravidla a deduktívneho úsudkového pravidla treba v týchto systémoch modifikovať s prihliadnutím na tieto výrazy. V systémoch, ktorými sa budeme zaoberať v našom výklade sa tieto výrazy nevyskytujú a preto v definícii sekvencie i platnej sekvencie sa predpokladá, že $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ sú iba logické výrokové *formy*.