OBSAHOVO KONŠTRUKTÍVNE LOGIKY

VOJTECH FILKORN

Venované šesťdesiatke významného českého logika prof. Dr. O. Zicha.

Konštruktívne logiky, presnejšie povedané, konštruktívne logické systémy vznikali ako sprievodný znak konštruktivistických, antiaprioristických tendencií pri budovaní vedy, ale najmä matematiky. Konštruktívne logiky sú primeraným nástrojom budovania konštruktívnych vedeckých systémov, ale aj nástrojom konštruktívneho budovania vedy. Logiky, ktoré plnia prvú funkciu, voláme obsahovo konštruktívnymi, logiky plniace druhú funkciu voláme formálne konštruktívnymi. Logiky plniace obidve funkcie sú jednoducho konštruktívne. Prvé dva druhy logík môžeme nazývať aj semikonštruktívnymi.[1]

Konštruktivistické tendencie vo vede a v matematike nie sú jednoznačne vymedzené. Predstavujú bohatú škálu odtienkov od radikálneho konštruktivizmu, ktorý sa na celú logiku (na pojem pravdy, nepravdy, na logické častice a logické pravidlá) díva z hľadiska verifikovateľnosti a jej čisto metodologickej funkcie, cez umiernené formy, alebo mierne konštruktivistické „nedôslednosti" a končia sa na pokraji nekonštruktivizmu, apriorizmu alebo uznania nejakej ontologie. Naše štúdie chcú oboznámiť čitateľov s tymito tendenciami a tak prispieť k rozšíreniu metodologickej orientácie u nás.

1. Definícia pojmu konštrukcie

Všetky konštruktivistické tendencie sa opierajú, čo je samozrejmé, o svoju vlastnú definíciu konštrukcie. Z hľadiska rôznosti konštruktivistických tendencií sa tieto definície často veľmi hlboko rozchádzajú. Na začiatku sa pukúsime názorným spôsobom objasniť tento pojem.

Konštrukcia nejakého prvku (napr. čísla, výpovede, dôkazu a pod.) *A* vzhľadom na konštruktívnu (induktívnu) triedu **A** sa často určuje ako proces, ktorým sa prvok *A* dosiahne konečným počtom (opakovanej) aplikácie určitých spôsobov kombinovania.[2] Konštruktívnu triedu **A** dostaneme z určitých počiatočných prvkov tvoriacich základ triedy **A** pomocou určitých spôsobov kombinovania, napr. pomocou funkcií o *n* argumentoch (sčítanie, násobenie a pod.). To znamená, že konštruktívna trieda je určená dvoma druhmi predpisov. Prvý druh určuje počiatočné prvky (základ triedy **A**), druhý určuje ako z počiatočných prvkov pomocou konečného počtu presne sledovateľných konkrétnych krokov postupne dostaneme prvok *A* triedy **A**. Potom aj hovoríme, že prvok *A* triedy **A** sme dosiahli *efektívnym* spôsobom. Efektívne spôsoby, ktorými dostaneme ľubovoľný prvok konštruktívnej triedy **A**, voláme *efektívnou metódou* vzhľadom na **A**. Ak **A** by bol celý systém, tak by sme ho nazývali *konštruktívnym systémom* (teóriou) a metódu jeho budovania *konštruktívnou metódou.*

---

[1] O formálno konštruktívnej logike uverejníme ďalšiu štúdiu.

[2] H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic,* New York 1963, 39 n.

Matematika bola dlhú dobu prevažne konštruktívna a efektívna vypočítateľnosť sa často stotožňovala s matematičnom vôbec. V geometrii sa konštruovalo pomocou kružidla a lineára (pri čom postuláty boli vety, ktoré zaručovali možnosť konštruovania), v aritmetike a v algebre sa vypočítavalo. Základný pojem celého čísla je konštruktívny, lebo vychádzajúc z jednotky (ktorú tu chápeme ako danú a nie množinovoteoreticky definovanú) pripočítavaním jednotky dostaneme ľubovoľné celé číslo. Podobne konštruktívnym je aj pojem prvočísla, lebo o každom čísle $n > 1$ môžeme efektívne zistiť, či je prvočíslo. Robíme to napr. konečným počtom postupných delení (a delenie je efektívna operácia) čísla n číslami, ktoré sú väčšie ako 1 a menšie ako n. Ak n nemôžeme bez zvyšku deliť ani jedným číslom i $1 < i < n$, tak n je prvočíslo. To znamená, že konštruktívnou bude aj množina prvočísiel, lebo o *každom* prvočísle sa môžeme efektívne presvedčiť, že je členom tejto množiny. No množina prvočísiel je aj *rozhodnuteľná*, lebo o *každom* čísle sa môžeme efektívne presvedčiť, či patrí do množiny prvočísiel, alebo do množiny neprvočísiel, t. j. množinu celých čísiel vieme rozložiť na dve efektívne určené doplnkové podmnožiny. Efektívnym spôsobom môžeme určiť veľké množstvo funkcií. Napr. pri funkcii $y = x + 3$ môžeme pri každej hodnote argumentu x vypočítať hodnotu funkcie y.

Mnohé matematické vety vyjadrujúce vlastnosti čísiel alebo vzťahy medzi číslami sú konštruktívne v tom zmysle, že vyjadrujú niečo, čo sa dá efektívnym spôsobom vypočítať, dokázať a pod. Tieto vety teda vyjadrujú možnosť vykonania konštrukcií. Tak napr. veta „10 je párne číslo“ sa dokazuje tým, že sa nájde také číslo, ktoré násobené dvoma dáva práve 10.

V matematike, ale aj v ostatnej vede poznáme veľké množstvo efektívnych metód riešenia určitých okruhov problémov (napr. riešenie lineárnych, kvadratických a iných rovníc, zisťovanie, či v určitej chemickej látke je obsiahnutý kyslík, vodík a pod.) a tvorivá vedecká činnosť je spätá s hľadaním týchto efektívnych metód. Kde jestvuje taká metóda, hovoríme, že primeraný problém je riešiteľný. Samo toto riešenie (počítanie, zisťovanie určitého chemického prvku, ktorý je už vedecky opísaný) v princípe však už nie je tvorivou činnosťou a má význam skôr len v aplikáciách.

V súčasnej matematike sa efektívne postupy dávajú do súvisu s rekurzívnymi funkciami, alebo sa aj vyjadrujú pomocou *rekurzívnych* funkcií. Najjednoduchšie rekurzívne funkcie sa definujú dvoma rovnicami, z ktorých prvá určuje hodnotu funkcie, keď hodnota argumentu je rovná nule a v druhej rovnici vypočítame hodnotu funkcie pri argumente $n + 1$ z hodnoty funkcie pri argumente n. Tak sčítanie môžeme rekurzívne definovať takto:

$$0 + a = a$$

$$(n + 1) + a = (n + a) + 1$$

Ak $n + a$ označíme $\varphi\,(n, a)$ tak dostaneme

$$\varphi\,(0, a) = a \qquad [1]$$

$$\varphi\,(n + 1, a) = \varphi\,(n, a) + 1 \qquad [2]$$

Z prvej rovnice sa dozvieme výsledok, keď $n = 0$. V druhej rovnici dosadíme za n nulu a dostaneme výsledok pre $1 + a$. Tento výsledok znovu dosadíme do druhej rovnice a dostaneme výsledok pre $2 + a$ atď. Tak dostaneme efektívnym spôsobom hodnoty funkcie $\varphi(n, a)$, pre ľubovoľné n. Takéto a im podobné jednoduché funkcie sa nazývajú *primitívne* rekurzívne. Komplikovanejšie sú *všeobecné* rekurzívne funkcie, ktoré sa definujú konečným počtom takých rovníc, že keď sa v nich za premenné dosadia čísla, tak pre každé číslo n jestvuje odvodená rovnica $\varphi(n) = r$, kde r je číslo vyjadrujúce hodnotu $\varphi(n)$.[3] Uvedené postupy rekurzívneho vypočítavania sú podobné našej definícii konštruktívnej triedy.

Church stotožnil pojem všeobecnej rekurzívnej funkcie s pojmom efektívne vypočítateľnej funkcie. O tejto Churchovej téze sa dnes vyslovujú už pochybnosti,[4] pretože pojem vypočítateľnosti nie je definitívne určený[5] a metóda počítania nie je uniformná.[6] Ďalší pojem, ktorý sa stotožňuje so všeobecnou rekurzívnou funkciou, je pojem *algoritmu*, t. j. všeobecného postupu pomocou ktorého dostaneme odpoveď na každú v algoritme formulovateľnú otázku pomocou konečného počtu krokov robených podľa predpísanej metódy.[7]

Nie všetky funkcie sú vypočítateľné a teda rekurzívne. Množinu všetkých vypočítateľných funkcií môžeme usporiadať do diagonály a postupom, ktorým Cantor dokázal, že množina reálnych čísiel je nespočítateľná, môžeme určiť nekonečne mnoho funkcií, ktoré sa nestotožňujú ani s jednou vypočítateľnou funkciou.

2. Konštruktívny systém

Mnohí autori stotožňujú konštruktívno s efektívnosťou v tom zmysle, že pojem „konštruktívno" je zovšeobecnenie (rozšírenie) rekurzívnosti funkcie na ostatné kategórie pojmov (množiny, vzťahov, viet, dôkazu a celého systému).[8] Iní zasa považujú efektívnosť za užší pojem ako konštruktívnosť.[9] Tento druhý názor si osvetlíme na štruktúre axiomatického systému. V bežných axiomatických systémoch, akými sú všetky známe axiomaticky budované logické systémy (či už klasické, alebo intuicionistické), Peanov systém aritmetiky a pod., opierame sa o množinu dobre budovaných výpovedí, o množinu axiómov a o množinu (deduktívnych) pravidiel. Množina dobre budovaných výpovedí je vypočítateľná (rekurzívna), lebo o každej výpovedi môžeme pomocou konečného počtu krokov

---

[3] Wang Hao, *A Survey of Mathematical Logic*, Peking 1962, 89, Pozri aj R. Péter, *Rekursive Funktionen*, Budapest 1951.

[4] L. Kalmár, *An Argument Against the Plausibility of Church's Thesis* v *Constructivity in Mathematics*, Amsterdam 1959, 72.

[5] D. Klaua, *Konstruktive Analysis*, Berlin 1961, VI.

[6] L. Kalmár, c. d., 73.

[7] A. A. Markov, *Teorija algorifmov*, Moskva 1954, 49 n.

[8] J. R. Mihill, *A Complete Theory of Natural, Rational and Real Numbers*, The Journal of Symbolic Logic, 1950.

[9] P. Lorenzen, *Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium* v *Infinitistic Methods*, Warszawa 1961, 193.

rozhodnúť, či je budovaná podľa prijatých formačných pravidiel,[10] alebo nie. Keby nejestvovala efektívna metóda budovania dobre budovaných výpovedí, nemohli by sme dobre formulovať otázky (problémy) a vtedy by sme ich nemohli ani riešiť.[11] Podobne aj množina axiómov musí byť efektívne určená, lebo v opačnom prípade by sme nevedeli, na čom stojí náš systém, či sme v dokazovaní použili všetky axiómy a tak využili všetky možnosti dané axiomatickým systémom. Ak si presne vymedzíme množinu pravidiel (a pri formalizovaných systémoch to musíme robiť), tak efektívny bude aj pojem dôkazu.

Dôkaz vety D (napr. teorémy) je rad viet $D_1, D_2, \ldots, D_n, D$. O každej vete $D_1, \ldots, D_n$ môžeme efektívne zistiť, či je axióma, alebo nie. Ak nie je axiómou, môžeme efektívne zistiť, či sa na základe niektorého pravidla odvodila z axiómy, alebo nie (to zn., že aspoň D_1 musí byť axiómou). Dôkaz vety D je teda taký rad viet, na začiatku ktorého stojí axióma (alebo viac axióm z $D_1, \ldots D_n$) a v ktorom nasledujúci člen radu vzniká z predchádzajúceho použitím niektorého pravidla a posledný člen radu je D. To znamená, že vzťah medzi východiskom a koncom dôkazu je efektívne určený. Tento vzťah nazývame dôkazovým a označme ho R_d.

Jestvujú logické systémy, v ktorých aj pojem teorémy je efektívny a teda množina teorém vypočítateľná. Medzi ne patria výpovedné kalkuly. V predikátových kalkuloch je množina teorém neefektívna; je to spojené s užívaním kvantifikátorov.[12] Osvetlíme si to na našom prípade.

Majme ľubovoľnú vetu A a množinu teorém T. To, že A je teoréma, označujeme $A \varepsilon T$. A je teoréma vtedy a len vtedy, keď *jestvuje* dôkaz R_d, ktorý je dôkazom vety A. To znamená, že platí

$$A \varepsilon T \longleftrightarrow V\, R_d\ (R_d \text{ je dôkaz vety } A) \qquad [3]$$

$V R_d$ čítame „jestvuje R_d". Ak vetu [3] spresníme tým, že určíme východisko dôkazu (napr. axiómu D_1) tak dostaneme vetu

$$A \varepsilon T \longleftrightarrow V R_d\, R_d (D_1, A) \qquad [4]$$

Existenčný kvantifikátor VR_d hovoriaci, že jestvuje taký dôkaz, že... je prameňom neefektívnosti. Ak máme nejaký vypočítateľný vzťah (teda rekurzívne určený) $R(x, y)$, tak z neho urobíme nevypočítateľný vzťah najjednoduchším spôsobom tak, že pred neho dáme existenčný kvantifikátor. Vetu [4] môžeme zovšeobecniť a dostaneme

$$\Lambda x\ x \varepsilon M \longleftrightarrow Vy\ R(x, y), \qquad [5]$$

[10] Ak ide o výpovedný kalkul tak formačné pravidlá budú tieto,
a) elementárne výpovede $p, q, \ldots$ sú výpovede,
b) ak p je výpoveď, aj nie-p je výpoveď,
c) ak p je výpoveď, a q je výpoveď, tak aj $p \vee q$ (po prípade $p \to q$) je výpoveď,
d) výpoveď je len to, čo je výpoveďou na základe pravidiel a) — c).

[11] A. Grzegorczyk, *Zarys Logiki matematicznej*, Warszawa 1961,361.

[12] A. Grzegorczyk, c. d., 353.

kde x a y sú celé čísla a Λx čítame „pre všetky x". Keď sa chceme presvedčiť, či platí $x \varepsilon M$, postupujeme tak, že prebiehame všetky prirodzené čísla $y = 0, 1, 2, \ldots$ a presviedčame sa, či jestvuje medzi nimi také, ktoré je vo vzťahu R s číslom x. To však nemôžeme urobiť v konečnom čase, lebo keď sa nám stále nedarí nájsť také číslo y, nevieme, či sa nám to nepodarí neskôr. Keby sme $x \varepsilon M$ mali definovať komplikovanejším vzťahom

$$x \varepsilon M \longleftrightarrow \Lambda v\, V z\, \Lambda y\, R(z, v, y, x), \qquad [6]$$

pri čom x, y, z, v sú premenné, za ktoré môžeme dosadiť celé čísla, tak by sme pre každé v ($v = 0, 1, 2, \ldots$) museli hľadať také z (kde z je alebo 0, alebo 1, alebo, 2 alebo ...), pre ktoré by znova pre každé y ($y = 0, 1, 2, \ldots$) platil vzťah $R(z, v, y, x)$. Tým by sme celý číselný rad museli nekonečnekrát prebehnúť. Z toho vidíme, že množstvo kvantifikátorov je mierou neefektívnosti.

Najjednoduchší nevypočítateľný vzťah dostaneme z vypočítateľného vzťahu R tak, že pred neho dáme (ho zaviažeme) *jeden* existenčný kvantifikátor. Takto vzniknutý vzťah budeme volať rekurzívne *vyčísliteľný* (enumerabilný). Preto R a M v [5] sú rekurzívne vyčísliteľné. Ak v [5] x naozaj patrí do množiny M, tak sa o tom môžeme presvedčiť konečným počtom krokov sledujúc $R(x, y)$ postupne keď $y = 0, 1, 2, \ldots$ Ak však x nepatrí do množiny M, tak sa o tom nemôžeme nikdy presvedčiť, lebo keď budeme mať akékoľvek vysoké číslo dosadené za y, vždy sa ešte môžeme nazdávať, že nejaké iné väčšie číslo dosadené za y bude spĺňať vzťah $V y\, R(x, y)$. Keď tieto úvahy aplikujeme na vetu [4] a [3], tak môžeme povedať, že ak A je skutočne teorémou, tak sa o tom presvedčíme konečným počtom krokov, ak nie je teorémou, tak sa o tom nikdy nemusíme presvedčiť, lebo po akomkoľvek dlhom rade neúspešných dôkazov veta [4] nám rozkazuje hľadať ďalšie. Preto konečný postup nám môže dať kladnú odpoveď, ale nie zápornú. Preto pri rekurzívne vyčísliteľnej množine nemôžeme pre ľubovoľný prvok dokázať, či do množiny patrí, alebo nie. Vieme efektívne to dokázať, keď do množiny patrí. Pri vyčísliteľnej množine vieme, čo do nej patrí (preto dostala také meno) ale nevieme, čo do nej nepatrí. Keby sme mohli efektívne zistiť aj to, čo do nej nepatrí (teda jej doplnkovú množinu), dostali by sme vypočítateľnú množinu.

Z hľadiska systému je teda užitočné rozlišovať efektivno a konštruktívno.

Systém je *efektívny*, ak množina dobre utvorených výpovedí, množina axiómov a množina teorémov je vypočítateľná. Taký systém je aj *rozhodnuteľný*. Systém je *konštruktívny*, keď množina dobre budovaných výpovedí a množina axiómov je vypočítateľná, ale množina teorémov je len vyčísliteľná.[13] Podobne sa definuje aj *logický* konštruktívny systém.[14]

---

[13] J. Ladrière, *Les limitations des formalismes et leur signification philosophique*, Dialectica 1960, 304. Ladrière stotožňuje konštruktívne systémy s formálnymi.

[14] „Logický systém je koštruktívny, ak množina jeho zmysluplných výrazov a množina jeho axiómov je primitívne rekurzívna, množina pravidiel dôkazu konečná a pravidlá sú rekurzívne primitívne funkcie." A. Mostowski, *A Classification of Logical Systems* v *Studia Philosophica* IV, 1951, 248.

Nekonštruktívne a neefektívne prvky sa do matematiky dostávali zo začiatku *logickou* cestou pomocou nepriameho dôkazu. Tak sa dokázalo, že druhá odmocnina z dvoch nemôže byť racionálnym číslom, lebo vtedy by muselo byť aj párnym aj nepárnym. Podstata nepriameho dôkazu pozostáva v tom, že sa vysloví určitý predpoklad, (že napr. druhá odmocnina z dvoch je racionálne číslo, alebo že nejestvuje ani jedno číslo, ktoré má určitú danú vlastnosť) a z neho sa vyvodia také dôsledky, ktoré protirečia uznaným axiómom alebo teorémam. A pretože môže platiť buď východiskový predpoklad, alebo jeho negácia, a pretože východiskový predpoklad vedie do protirečenia, bude platiť jeho negácia, (že druhá odmocnina z dvoch nie je racionálne číslo, alebo že jestvuje číslo s danou vlastnosťou). To znamená, že organickou súčiastkou nepriameho dôkazu je princíp vylúčenia tretieho, pri čom disjunkcia a uznané protirečenie nám vôbec neukazujú cestu a spôsob konštrukcie objektu (ale napr. aj priameho dôkazu), o ktorom sa v nepriamom dôkaze hovorí. Nepriamy dôkaz len tvrdí (lepšie povediac, žiada), že „niečo" musí jestvovať, ale neumožňuje poznať jeho povahu a pod.[15] Preto sa takýto dôkaz nazýva existenčným a nekonštruktívnym. Logika, v ktorej platí princíp vylúčenia tretieho, nazýva sa klasická, logika, v ktorej tento princíp neplatí, nazýva sa *intuicionistická.*[16]

No aj nepriamy dôkaz sa dá chápať buď ako nástroj poukazovania na nejakú „hypotetickú" existenciu, ktorú potom dokážeme priamymi spôsobmi, alebo ako nástroj zavedenia entity, ktorá je nekonštruovateľná, alebo ktorej pripisujeme takú istú existenciu ako konštruovateľným entitám. V tomto druhom prípade nepriamy dôkaz s princípom vylúčenia tretieho implicitne predpokladajú určitú hotovú predstavu o oblasti, ktorá sa skúma, t. j. túto predstavu si skúmaním nevytvárajú a tak tento druh dôkazu má význam len pri ontologických predpokladoch. Môžeme to aj tak povedať, že ak konštruovateľným a nekonštruovateľným entitám pri nepriamom dôkaze pripisujeme rovnakú existenciu a nepriamy dôkaz je mostom medzi týmito entitami, tak logika nepriameho dôkazu má nevyhnutne ontologickú hodnotu[17] a matematika, ktorá ho užíva, má *platonovský* charakter. Tento charakter z hľadiska realistov pozostáva v tom, že na naše abstrakcie (akými sú pojem čísla, funkcie, množiny a pod.) a najmä na ich obsah prenášame také

---

[15] Pri určovaní druhej odmocniny z dvoch sa tento nedostatok odstránil len tak, že sa našla jeho geometrická interpretácia (konštrukcia) ako dĺžka uhlopriečky štvorca o strane rovnej jednotke.

[16] Intuicionistická logika bola axiomaticky prepracovaná Heytingom. Pozri A. Heyting, *Intuitionism,* Amsterdam 1956, 97 n.

[17] Ontologické pozadie princípu vylúčenia tretieho si môžeme ilustrovať na príklade. Majme dve výpovede: „Každé číslo ma určitú vlastnosť *A.*" „Jestvuje číslo, ktoré nemá vlastnosť *A.*" Ak sa dokáže prvá výpoveď, vylúči sa druhá, ak sa dokáže druhá, vylúči sa prvá. Ak však nevieme dokázať ani prvú ani druhú výpoveď, a takých prípadov je v matematike mnoho (sem patria napr. všetky nerozhodnuteľné výpovede) tak užívateľ nepriameho dôkazu a princípu vylúčenia tretieho povie (a musí povedať), že situácia sama osebe je taká, že hoci to neviem dokázať, platí buď prvá, buď druhá výpoveď. A keby jestvovala nejaká vyššia inteligencia, tá by to tak videla. Jestvuje preto pravda o sebe, veta o sebe a pod.

vlastnosti, ktoré patria len vonkajšej realite; preto môžeme povedať, že daná množina alebo číslo určitú vlastnosť (zákonitosť) alebo má, alebo nemá, že dané čísla sú alebo nie sú v určitých vzťahoch a vôbec neberieme do úvahy aj tú možnosť, že náš spôsob a formy abstrahovania nemusia byť (čo sa týka postihnutia podstaty) primerané a že teda „príroda" nám nemusí na otázku odpovedať ani áno, ani nie. To znamená, že konštruktivistické tendencie v miere ich konštruktívnosti sa zbavujú ontologického pozadia a ontologických predpokladov, ale aj naopak, príklad vzatý z analýzy princípu vylúčenia tretieho môžeme zovšeobecniť a povedať, že každá nekonštruktívna logika (alebo logický zákon) sa dá pochopiť len na ontologickom pozadí.

Neskôr sa nekonštruktívne prvky zavádzali do matematiky matematickou cestou tým, že sa veľmi rozšíril pojem funkcie[18] a že Cantor zaviedol taký široký a úplne nekonštruktívny pojem množiny, že umožnil až vznik antinómií. Cantor vychádzal z určitej hotovej nekonečne diferencovanej nekonečnej totality, ktorá sa dá chápať aj ako množina všetkých množín. A práve tento pojem množiny všetkých množín je protirečiaci si. Ak M je množina všetkých množín, mohutnosť tejto množiny budeme označovať $\overline{\overline{M}}$. Môžeme utvoriť množinu všetkých podmnožín množiny M a označme ju $U\ M$. Vieme, že množina všetkých podmnožín danej množiny M má väčšiu mohutnosť ako množina M. To zn., že $\overline{\overline{U\ M}} > M$; no pretože v našom prípade M je množina všetkých množín a $U\ M$ je množina podmnožín množiny M, bude $U\ M$ patriť do M, t. j. bude $U\ M \subseteq M$ a preto bude platiť $\overline{\overline{U\ M}} \leq \overline{\overline{M}}$, čo je v protirečení s predchádzajúcou vetou.

Do podobného protirečenia sa dostaneme aj keď utvoríme množinu M všetkých množín, ktoré neobsahujú seba ako prvok. Tak množina planét nie je sama planétou. Môžeme si položiť otázku, či táto množina patrí ako prvok do seba samej, t. j. či táto množina obsahuje seba ako prvok. Ak množina M všetkých množín, ktoré neobsahujú seba ako prvok, nepatrí do M, t. j. ak M neobsahuje seba ako prvok, tak podľa definície tejto množiny M patrí do množiny M. Ak však M patrí do M, tak podľa definície M, M nepatrí do M. Teda platí, že $M \varepsilon M$ a neplatí, že $M \varepsilon M$.

Antinómie sa z teórie množín odstraňovali viac-menej konštruktívnou cestou zužujúcou pojem množiny tak, aby nemohli vzniknúť protirečenia. A pretože naše dve a ešte iné protirečenia vznikli tým, že sa pripúšťa existencia ***nepredikatívnych*** množín, t. j. takých množín, ktoré sa dajú definovať len vzhľadom na celok, v ktorom samé sú prvkami,[19] teda ako hotové nekonečné celky,[20] ponechávajú sa

[18] „Funkcia prestala byť len analytickým výrazom. Určovala sa tým, že každej hodnote x v určitom intervale sa priraďovala určitá hodnota y bez ohľadu na to, či y je v celom intervale závislé na x podľa toho istého zákona, alebo nie, či sa závislosť môže vyjadriť matematickými operáciami, alebo nie". O. Becker, *Grundlagen der Mathematik,* München 1954, 222.

[19] Wang Hao, c. d., 577. Predikatívne množiny spĺňajú princíp bludného kruhu, podľa ktorého žiadna totalita nemôže obsahovať členy definovateľné len v termínoch tejto totality.

[20] V oblasti nekonečných množín vznikajú antinómie preto, že nekonečné množiny sa chápu ako o sebe jestvujúce hotové celky G. Gentzen, *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung,* Leipzig 1938, 6.

len *predikatívne* množiny, ktoré sa niekedy stotožňujú s *konštruktívnymi* množinami.[21] Pri konštruktívnych teóriach množín sa nevychádza z pojmu množiny, ale z pojmu „množiny niečoho" (set of),[22] napr. z pojmu množiny celých, racionálnych čísiel. Opakovanou aplikáciou operácie „množiny niečoho" dostaneme stále širšie množiny, ale nikdy nedostaneme množinu všetkých množín. Môžeme povedať, že konštruktívne teórie neuznávajú nejakú uzavretú totalitu, ktorá vylučuje možnosti ďalších konštrukcií, ale len totality relatívne z hľadiska rozličných stupňov konštrukcie.[23]

Antinómie v teórii množín však mali aj „dobrú" stránku. Pretože teória množín zasahovala aj do teórie čísiel a pretože vynáraním antinómií vznikla obava, aby sa najistejšia časť matematiky nedostala na neistú pôdu, vznikla opačná tendencia vybudovať teóriu čísiel rekurzívnym spôsobom myslenia bez odvolávania sa na nekonečné množiny.[24] Treba však, pravda, dodať, že rekurzívny štýl myslenia nadobudol na význame v súvislosti so vznikom a veľkým rozšírením matematických strojov a tvorbou rôznych algoritmov pre ne.

4. Nekonštruktívne logiky

V našich diskusiách o povahe logiky a o jej vzťahu k realite sa objavovali názory, podľa ktorých logika sa buď celá má chápať ontologicky, alebo neontologicky, prípadne antiontologicky. Takéto zjednodušené názory vyplynuli zo schematického chápania vzťahu filozofie k ostatným vedám a z hľadania materialistickej interpretácie jednotlivých vedeckých teórií ba celých vied tam, kde to nie je týmto teóriam primerané. Pri bližšom skúmaní logických systémov, ako sa oni objavovali v dejinách, som došiel k názoru, že ani ontologizujúci logici (ku ktorým, som okrem veľkého množstva sovietskych, poľských, nemeckých a amerických logikov patril aj ja), ale ani neontologizujúci alebo antiontologizujúci teoretici logiky nemajú pravdu a že celý spor sa odohrával na rovine, ktorá nerešpektuje to, čo sa v priebehu dejín v logike utvorilo, t. j. na rovine filozofie, ktorá nerešpektovala z jednej alebo z druhej strany to, čo sa volá „logickým". V dejinách vedy sa stretávame s logickými systémami, ktoré logično stotožňovali s ontologickou formou, ale aj so systémami, ktoré logično stotožňovali výlučne s metodologickou formou. To znamená, že niektoré logiky, či chceme, či nechceme, boli a sú tak budované, že majú a musia mať ontologické pozadie, alebo sú tak budované, aby mali ontologické pozadie (nezáleží pri tom vôbec o aký druh ontológie ide), prípadne, že ich niektoré vety sa musia ontologicky interpretovať. Iné druhy logických systémov k takémuto ontologickému interpretovaniu prirodzenou cestou nevedú. Ak niektorému systému je ontologické pozadie imanentné, potom

[21] Wang Hao, c. d., 578.

[22] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?* The American Math. Montly, 1947, 519.

[23] Wang Hao, c. d., 563.

[24] T. Skolem, *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise*... 1923. Pozri R. Péter, *Rekursivität und Konstruktivität* v *Constructivity in Mathematics*, 226.

jeho neontologická alebo antiontologická interpretácia je nepravdivá a podobné platí o neontologických systémoch. A pretože každá ontológia predstavuje hotovú ucelenú predstavu o svete, môžeme na základe skúseností s princípom vylúčenia tretieho ontologicky „zaťažené“ logiky volať *nekonštruktívnymi* a tie ostatné budú konštruktívne. Môžeme teda povedať, že konštruktívna bude tá logika a ňou bude natoľko, ktorá nebuduje a nakoľko nebuduje na nejakej hotovej koncepcii (predstave) o realite, ani takú nepredpokladá a ani neumožňuje do nej vyústiť, ale ktorá aposteriórnymi spôsobmi pomáha budovať naše predstavy o skutočnosti. To znamená, že konštruktívna logika je jedna z prejavov zadekvátňovania logiky ako *nástroja vedeckého poznania.*

Takéto rozlišovanie dvoch typov logík neznamená hodnotenie jedného a znehodnotenie druhého typu. Nazdávame sa, že ontológia je nevyhnutná a že preniká skoro celou empirickou vedou. V ontológiách sa petrifikuje ako v uzlových bodoch určitý stav filozofie a vied. Každá ontológia má však dočasný charakter. Vzniká, ustaľuje sa, plodne pôsobí a prekonáva sa. To platí o Parmenidovej, Herakleitovej, Aristotelovej, Plotinovej, Tomášovej, Spinozovej, Leibnizovej a Heglovej ontológii, a to bude raz platiť aj o ontológii dialektického materializmu. Naše vedecké, empirické poznanie sa však rýchlejšie mení ako ontológie a tieto zmeny musia mať preto „neontologické“ príčiny, lebo ontológie sú voči týmto zmenám relatívne rezistentné. Preto logika vedeckého poznania musí mať nevyhnutne neontologické prvky. Veda musí mať svoju logiku, no táto sa nesmie stotožňovať s ontologickou logikou, ale s niečím, čo je nevyhnutné aj pre budovanie ontológií a od nich zavislých logík. Aj ontológia totiž je veda a aj ona sa musí logicky budovať. Autoreflexívne budovanie ontológie svojou zo samej ontológie plynúcou logikou je síce možné, ako to vidíme napr. u Aristotela alebo Leibniza, ale takouto logikou sa „logično“ nevyčerpá. Keby sa totiž logično stotožnilo s takouto logikou, znemožnilo by to ďalší vývoj vedy, ako aj ďalší vývoj ontológií. Keby sa ontológia budovala ontologickou logikou, tak by *danú* ontológiu neprekonala, zostala by v jej zajatí. Preto ontológia sa ontologickou logikou nedá budovať. Logika ako najtypickejší prejav ľudského myslenia a ľudskej existencie je preto nad akoukoľvek ontológiou. No takú logiku nesmieme stotožňovať s jednotlivými logickými systémami, ktoré sú len prejavy snahy adekvátne postihnúť šírku a možnosti ľudského myslenia.

Medzi najznámejšie ontologizujúce logiky patrí bez pochyby Aristotelova logika, podľa ktorej formy bytia určujú formy hovorenia (o bytí) a Leibnizova logika, ktorá je vedou o všetkých možných svetoch.[25] Leibnizovej logike je, nehľadiac na veľkú rozdielnosť ontologií, podobná Wittgensteinova a Carnapova logika, podľa ktorej analytické vety hovoria o všetkých možných stavoch.[26] Vyložene

---

[25] „nutné pravdy ostanú platné nielen dokiaľ bude svet jestvovať, ale boli by platné aj keby svet bol inak stvorený“ G. W. Leibniz, *Fragmente zur Logik,* Berlin 1960, 428, „večné a všeobecné pravdy... musia platiť vo všetkých svetoch a v každom čase, slovom aj u boha samého...“ G. W. Leibniz, *Die Philosophischen Schriften* (ed. Gerhardt) VII, 115.

[26] Tvrdenie, že logické vety sú platné vo všetkých možných svetoch, nepovažuje Carnap za nepravdivé, ale za nejasné a vysvetľuje ho takto: „Logicky pravdivá je tá veta, ... ktorá je pravdivá v každom možnom prípade.“ R. Carnap, *Einführung in die symbolische Logik,*

ontologický charakter má logika v *Principia mathematica*, ktorá slúžila na neprotirečivé rozvinutie teórie množín a svojou teóriou typov vyúsťuje do ontológie. Všeobecne môžeme povedať, že ontologický charakter má každá logika, ktorá slúži na rozvinutie nejakej už jestvujúcej predstavy. Sem patria napr. aj všetky formy takzv. kvantovej logiky, ktoré sa usilovali o adekvatne vyjadrenie situácie objavujúcej sa v kvantovej fyzike.

Medzi najznámejšie neontologizujúce logiky patrí bez pochýb stoická logika, ktorá nebola reflexiou sveta a ani nejakej hotovej reflexii neslúžila, ale bola skôr reflexiou alebo nástrojom vedeckej metódy. Do tejto skupiny patrí aj slabý Descartesov pokus o logiku, v ktorom sa nehovorí o nejakom reálnom poriadku, ale len o poriadkoch poznávania reality. Sem patrí Jaškovského a Gentzenova bezaxiomatická logika svojimi pravidlami slúžiaca na rozvíjanie vedeckého poznania. Jestvuje totiž dosť zdôvodnené podozrenie, že axiomatický systém je mysliteľný len na ontologickom pozadí. P. Lorenzen hovorí, že dnes je v matematike bežné „ontologizujúce" chápanie, ktoré nachádza svoj výraz v axiomatickej matematike.[27] Naozaj, každá axiomatická metóda spočíva na axiómoch a základných pojmoch ako daných; axiómy vyjadrujú a predpokladajú, ale nezdôvodňujú nejakú situáciu. Keby nič nevyjadrovali, boli by zbytočné.

Takéto radikálne odmietnutie axiomatickej metódy, ktorá mala a má v matematike veľký význam, zmierňujú intuicionisti tým, že rozlišujú dve funkcie axiomatickej metódy.[28] Ide o *deskriptívnu* funkciu, ktorú uznávajú, a o *postulatívnu* funkciu, ktorú odmietajú. Deskriptívna funkcia pozostáva v tom, že sa axiomatickou metódou usporiada niečo, čo je už pred tým známe. Tak axiomatizácia euklidovskej geometrie chce presným a jednotným spôsobom postihnúť poriadok v neaxiomaticky daných a medzi neaxiomaticky danými geometrickými útvarmi. To znamená, že deskriptívna je tá axiomatická metóda, pri ktorej sa modely pre axiomatický systém poznali alebo skonštruovali už pred ňou, a preto axiómy v nej vyjadrujú len možnosť matematických konštrukcií s vlastnosťami vyjadrenými axiómami. Axiomatická metóda je tak vlastne len pomocnou metódou pre konštruktívnu metódu. Postulatívna funkcia naopak jasne vystupuje do popredia tam, kde dopredu nepoznáme modely, alebo kde predaxiomatické štádium niektorej disciplíny (napr. teórie množín) sa ukázalo protirečivé. Ak takáto teória nemá byť prázdna, t. j. ak má o niečom hovoriť, tak *musí* niečo existovať, čo spĺňa tieto axiómy, pri čom spomínaná existencia sa prejaví *len cez* axiómy; čiže existencia je tu vytvorená axiómami. Pretože v konštruktivizme matematický objekt začína existovať len jeho možnou alebo skutočnou konštrukciou, nemôže začať jestvovať konštituovaním systému axióm. V každom prípade axiomatický systém, uvažovaný sám o sebe bez jeho vzťahov k modelom poznaným buď pred-

---

Wien 1960, 17; pozri R. Suszko, Ontológia v „Traktacie" Willgensteina, Studia filozoficzne n. 1, 1968.

[27] P. Lorenzen, *Über die Begriffe „Beweis" und „Defininition"* v *Constructivity in Mathematics*, 196. Lorenzen tu ukazuje, ako sa v aritmetike dá obísť bez explicitných definícií, základných pojmov a axiómov.

[28] A. Heyting, *Axiomatic Method and Intuitionism*, v Essays on the Foundations of Mathematics, Jerusalem 1961, 238 n.

axiomaticky, alebo axiomaticky, stavia na predpokladoch o existencii niečoho, čo sa vyjadruje v axiómach a na základe toho predpokladu sa skúma štruktúra tohto niečoho. Tieto predpoklady sa zdali prirodzené až dovtedy, pokiaľ sa nezistilo, že axiomatická metóda nemôže hrať principiálnu úlohu v aritmetike, lebo sa ňou nedá definovať obsah teórie aritmetiky,[29] t. j. že sa pojem celého, racionálneho a reálneho čísla nedá jednoznačne axiomaticky postihnúť, ako to vyplýva z Gödelovej vety o neúplnosti každého dostatočne bohatého axiomatického systému. V tejto situácii sa konštruktivistické snahy dostávajú do iného a voči axiomatickým tendenciám (voči axiomatickému štýlu myslenia) priaznivejšieho svetla. Konštruktívnym štýlom myslenia sa totiž nič (alebo skoro nič[30]) nepredpokladá, ale všetko sa konštruuje a len to, čo je už skonštruované, alebo čo môže byť skonštruované, stáva sa predpokladom ďalších konštrukcií.

5. Obsahovo konštruktívne logiky

Obsahovo konštruktívne sú tie logiky, ktoré sú nástrojom skúmania konštruktívnych alebo konštruovateľných systémov a ktoré *samé* podliehajú hlavnej zásade konštruktivizmu, že totiž existovať môže len to, čo sa dá skonštruovať.[31] Obsahovo konštruktívne logiky totiž majú vyjadriť štruktúru, skelet všetkých konštruktívnych systémov. Pri tom jadro zásady konštruktivizmu môžeme z matematiky rozšíriť na celú empirickú vedu. Potom konštruktívna logika bude mať len obsahovo metodologický význam, celá bude zameraná na budovanie, konštruovanie pojmov, systémov vedy. To znamená, že táto logika (a jej zložky ako napr. logické častice) bude mať len natoľko význam, nakoľko bude rešpektovať verifikačno-demonštračnú funkciu vedy.

Konštruktívne logiky nie sú nejako presne vymedzené, lebo nie je presne vymedzená ani verifikačná funkcia vedeckej metódy a ani pojem konštruovateľnosti. Pojem konštruovateľnosti totiž nemôže byť definovaným, ale len základným pojmom. Situácia sa aspoň dnes tak javí, lebo definícia konštruovateľnosti pomocou všeobecnej rekurzívnej funkcie vedie do bludného kruhu. Všeobecná rekurzívna funkcia je totiž daná systémom takých rovníc, pri ktorých *jestvuje* vždy konečný počítací postup, ktorý pre každú hodnotu argumentu jednoznačne určí hodnotu funkcie. No tento existenčný kvantifikátor „jestvuje" môžeme chápať platonovsky (a fixovať ho napr. pomocou princípu vylúčenia tretieho[32] alebo

---

[29] A. Mostowski, ..., *Der gegenwärtige Stand der Grundlagenforschung in der Mathematik*, Berlin 1953, 21.

[30] Predpokladajú sa len elementárne konštrukcie ako vychodisko.

[31] V nekonštruktívnych dôkazoch je nepochopiteľné, v akom zmysle „jestvuje" taký „objekt", t. j. čo sa reálne tvrdí teorémou dokázaným nepriamym dôkazom. A. A. Markov, *O konstruktivnych funkcijach*, Trudy matem. Instituta Im. Steklova, Moskva 1959, 315.

[32] Dôkaz vety $V\ y\ A\ (y)$ je konštruktívny a existenčný kvantifikátor je konštruktívny vtedy, ak v priebehu dôkazu sa nájde také y, že platí $A\ (y)$, alebo je daná metóda, pomocou ktorej sa také y dá skonštruovať. S. C. Kleene, *Recursive Predicates and Quantifiers*, v *The Undecidable*, New York 1965, 283. Z hľadiska konštruktivizmu všeobecne platná výpoveď $\Lambda\, y\ A\ (y)$ hovorí, že kedykoľvek sa skonštruoval matematický objekt, spĺňa výpoveď $A\ (y)$. A. Heyting, *Some Remarks on Intuitionism* v *Constructivity in Mathematics, 70.*

pomocou aktuálneho nekonečna; obidve fixovania sú ekvivalentné) alebo konštruktívne. Prvé chápanie je nekonštruktívne a druhé, ktoré malo objasniť pojem konštruktívnosti, samo sa musí objasňovať pojmom konštruktívneho existenčného kvantifikátora.[33]

Z toho, že pojem konštruovateľnosti sa nám javí ako základný pojem, vôbec nemusí nasledovať, ako sa mylne nazdáva Heyting, že v pojme konštruovateľného objektu nemôže byť nič arbitrérneho a že matematika musí byť úplne sebestačná.[34] Keby Heyting mal pravdu, tak konštruktivizmus by upadol do apriórneho ontologizmu. Existenčný kvantifikátor v rekurzívnych funkciách sa má síce konštruktívne definovať, ale dopredu nesmieme prejudikovať, o akú definíciu konkrétne ide. Pojem konštruovateľnosti nemôže byť ani absolútny, ale ani ľubovoľný; musí byť relatívny, a to relatívny z hľadiska celkovej situácie v logike, v matematike, ale najmä v celej vede, na pozadí ktorej sa logika a matematika dá jedine adekvátne chápať. Podľa toho, aké prísne a únosné požiadavky kladieme na budovanie vedy, dostávame rôzne druhy a stupne konštruktivizmov. Jedine imanentný vzťah konštruktivistických tendencií k budovaniu matematiky schopnej aplikácie a k budovaniu vied, ktoré samé v sebe a vo svojom vzťahu k vlastným aplikáciám sú autoregulatívne, zachraňuje konštruktivizmus alebo konštruktivizmy pred ontologickými predpokladmi a pozadiami. Tieto predpoklady sa konštruktivizmu práve pre množstvo jeho foriem a stupňov veľmi nebezpečne natískajú a pred nimi sa preto konštruktivizmy len veľmi ťažko bránia.

Konštruktívne systémy môžeme považovať za (jediné) systémy s vlastnou logikou nedovoľujúcou vybočiť z rámca konštruktívnosti, a to alebo úplne pomocou neplatnosti princípu vylúčenia tretieho a pomocou primeranej definície konštruktívnej negácie a pravdy,[35] alebo len neúplne vylúčením len samého princípu vylúčenia tretieho. Prvá logika je radikálnejšia ako druhá. Niektorí však považujú konštruktívne systémy za podsystémy a konštruktívne oblasti považujú za zúženie poľa výskumov napr. na vypočítateľné funkcie, pri čom pripúšťajú všetky druhy dôkazov, teda klasickú logiku.[36] Pri tom systémy konštruktívnych podsystémov sa môžu chápať ako reálne systémy (platonizmus) alebo ako akési idealizácie, ktoré však majú zmysel (Hilbert). Ak sa to, čo tieto podsystémy presahuje, považuje za nevedecké, za nezmysel, tak dostávame logiku, ktorá je podobná intuicionistickej logike. Ďalšie odrody konštruktivizmu dostaneme podľa toho, ako chápeme a užívame pojem rekurzívnej funkcie. Je známe, že množina (totalita) rekurzívnych funkcií nie je rekurzívna, a preto prísnejší konštruktivisti rekurzívne funkcie len užívajú, ale ich totalitou sa nezaoberajú; menej prísni konštruktivisti to považujú za správne, a tak môžu hovoriť o triede rekurzívnych (konštruktívnych) reálnych čísiel.[37] Konečne podľa toho, ako rôzne chápeme existenčný

---

[33] R. Péter, *Rekursivität und Konstruktivität*, 228.

[34] A. Heyting, c. d., 70.

[35] Ide najmä o Práce Grissa, Löba a Nelsona. Pozri sborník *Constructivity in Mathematics*.

[36] A. Grzegorczyk, *Some Approaches to Constructive Analysis, Constructivity in Mathematics*, 43.

[37] A. Mostowski, *On Various Degrees of Constructivism* v *Constructivity in Mathematics*, 182.

kvantifikátor v definícii rekurzívnej funkcie, dostávame nielen rôzne rekurzívne funkcie, ale aj rôzne vymedzenia „konštruovateľného". Okrem týchto konštruktivizmov uvedieme ešte tzv. realistický konštruktivizmus, ktorý osvetlíme vymedzením troch postojov ku *matematickej* realite. Podľa prvého postoja matematická realita (to, o čom sa hovorí v matematike) „leží" pred nami a matematika má k nej priamy vzťah, t. j. naše všeobecné matematické pojmy sú jej priame odrazy, sú nám vtlačené a v tom zmysle dané. Je jasné, že tu ide o platonovsky chápanú matematiku. Podľa druhého postoja matematickú realitu vytvárame činnosťou, konštrukciami. Otázka, či vytvoreným matematickým predmetom odpovedá ešte nejaká iná autentická realita, je tu metafyzická a nevedecká.[38] Tretí postoj, ktorý nazývame realistickým, a ktorý z hľadiska matematizovania ostatných vied sa nám vidí pravdivý, uznáva, že pred nami „leží" matematická realita. My našou matematikou túto realitu rekonštruujeme (nachkonstruieren). To znamená, že všeobecné pojmy nie sú dané, ale sa konštruujú a o realite môžeme len natoľko hovoriť, nakoľko sme ju rekonštruovali. Každé ostatné tvrdenia sú mimovedecké, ale po určitej dobe sa môžu stať vedeckými. Logika tohto konštruovania je realisticky konštruktívna, ale nie nevyhnutne ontologická.[39]

Je dosť rozšírený názor, že ťažkosti s nekonečnom, nekonštruktívnosťou a neefektívnosťou sa objavujú len v predikátovom kalkule v súvislosti so všeobecnými a existenčnými kvantifikátormi a že výpovedný kalkul a predikátový kalkul s voľnými premennými je principiálne finitný.[40] Chceli by sme ukázať, že nekonštruktívne prvky sa môžu objaviť aj v metamatematike (v teórii) výpovedného kalkulu a že teda aj tam jestvujú možnosti jeho konštruktívneho alebo nekonštruktívneho budovania.

Keď sa výpovedný kalkul definuje maticovou metódou, tak sa opiera o pojem logického univerza a o logické funkcie (častice). Matica charakterizujúca dvojhodnotový výpovedný kalkul bude

$$M = \langle F, P, f, g\rangle, \qquad [7]$$

pri čom F a P sú dve cudzie množiny (F je množina nepravdivých výpovedí, P množina pravdivých výpovedí) f je dvojargumentová funkcia (implikácia alebo disjunkcia), g je jednoargumentová funkcia (negácia). Spojenie P a F tvorí triedu všetkých výpovedí, teda univerzum výpovedného kalkulu. Budeme ju označovať U. Aby veda a logika mala význam, musí platiť $F \neq 0$. Keby totiž $F = 0$, všetky výpovede by boli pravdivé a akékoľvek dokazovanie by bolo zbytočné. Pri tom sa ako samozrejmosť predpokladá, že trieda všetkých výpovedí, tvoriaca univerzum výpovedného kalkulu, môže byť nekonečná;

$$\overline{\overline{U}} \leq \aleph_0, \qquad [8]$$

[38] A. Heyting, *Intuitionism*, 9, 3.

[39] Nazdávame sa, že realistický postoj je iného charakteru ako ontologia-veda. Nedá sa zdôvodniť ontológiou, lebo vtedy tomu, čo je bezprostrednejšie, by predchádzalo to, čo je sprostredkovanejšie. Ak by sme predsa chceli tento postoj „zdôvodniť", tak by sme sa obracali na fakt, že vedy majú aplikácie mimo nich.

[40] Wang Hao, c. d. 43.

nemôže byť konečná, lebo vychádzajúc z ľubovoľnej výpovede p môžeme utvoriť novú výpoveď nie-p. Z p a z nie-p môžeme pomocou implikácie (alebo disjunkcie) vytvoriť molekulárnu výpoveď. Na ňu môžeme aplikovať negáciu, znovu implikáciu atď. Spôsob, ktorým sme postavili problém konštruktívnosti alebo nekonštruktívnosti výpovedného kalkulu nás núti sa pri tomto „atď." zastaviť. Kto uznáva oprávnenosť tohto „atď.", t. j. kto tvrdí, že v tvorbe výpovedí môžeme pokračovať bez ohraničenia do nekonečna, uznáva správnosť axiómy

$$\overline{\overline{U}} = \aleph_0 . \qquad [9]$$

Kto oprávnenosť „atď." neuznáva, uznáva správnosť axiómy

$$\overline{\overline{U}} < \aleph_0 \qquad [10]$$

Axióma (10) reprezentuje extrémny konštruktivizmus zavrhujúci pojem *možnej* konštrukcie ako veľmi nejasný a pripúšťa len pojem vykonateľnej konštrukcie. Logiku, v ktorej platí [10], nazývame podľa Jesenina — Volpina *ultraintuicionistickú*.[41] Jeseninove úvahy, ba vlastne pochybnosti o tom, že číselný rad $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ je kategorický (že teda tento rad sa až na izomorfizmus dá jednoznačne definovať), že platí princíp indukcie umožňujúci prechod od n ku $n + 1$, majú bezprostredný vplyv na logiku nielen z hľadiska jej aritmetickej interpretácie (aritmetizácia logickej syntaxe), ale aj z hľadiska platnosti niektorých logických pravidiel. Možnosť predlžovania číselného radu do nekonečna implikuje s princípom indukcie možnosť ľubovoľného použitia pravidla odlúčenia (modus ponens)[42] a predpokladá, že určitá zákonitosť, ktorá sa prejavuje pri konečných úsekoch tohto radu, indukciou sa môže rozšíriť na „celý" nekonečný rad a tak celý číselný rad považovať za homogénny. Podľa takejto úvahy aj za radom $0, 0', 0'', \ldots$ atď., skrýva sa hotová predstava vylučujúca možnosť, že pri veľkých konečných a nami nikdy nedosažiteľných číslach sa neobjavia nové javy a nevzniknú nové zákonitosti porušujúce kategoričnosť radu. Potom aj uznanie potenciálneho nekonečna, bežné pre intuicionistov, by bolo prejavom platonizmu. Ultraintuicionisti sa pýtajú na oprávnenosť slova „atď.", t. j. na oprávnenosť hotovej predstavy

[41] A. S. Ésénine-Volpine, *Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathématiques* v *Infinitistic Methods*, 202. Pozri A. S. Esenin-Volpin, *Analiz potencialnoj osučestvimosti*, v Logičeskije issledovanija, Moskva 1959.

[42] Keď užívame princíp indukcie, tak z platnosti vety $f(0)$ dostaneme platnosť $f(1)$, $f(2) \ldots$ takto:

$$\frac{f(0),\, f(0) \to f(0+1)}{f(0+1)}$$

$$\frac{f(1),\, f(1) \to f(1+1)}{f(2)}$$

$$\frac{f(2),\, f(2) \to f(3)}{f(3)}$$

$$\vdots$$

o číselnom rade. Ak zastávame platonovský názor o existencii číselného radu ako daného, tak potom nevieme vylúčiť možnosť vynorenia nových javov, vzťahov alebo vlastností pri nami nedosažiteľných číslach; ak nezastávame platonovský názor, tak potom nevieme, prečo máme predlžovať číselný rad do nekonečna. Dôsledne vzaté, číselný rad by sme mali alebo mohli definovať vždy len pomocou najrýchlejšieho matematického stroja. Tento rad by bol preto vždy len relatívne charakterizovaný a tým súčasne aj najradikálnejšie odmietnutý platonizmus. Ak by sme prijali aritmetickú interpretáciu logiky aspoň v minimálnej miere tak, aby sme všetky výpovede mohli usporiadať do postupnosti, ak by sme matematiku budovali ultraintuicionisticky, tak by to znamenalo veľmi hlboký zásah do logiky. Veľmi radikálne by sa relativizoval pojem logického zákona (analytickej vety) a mohol by vzniknúť len otvorený systém logických viet, do ktorého by sa postupne dostávali ďalšie vety (zákony), ktoré boli pred tým nedokázateľné. To znamená, že v tejto logike by neplatila Tarského definícia deduktívneho systému

$$Cn\ (X) = X \qquad [11]$$

(Cn je vzťah dôsledku a X je množina výpovedí)
uzatvárajúca určitú množinu X do seba, ale ani tranzitívnosť dôsledku Cn v jeho zovšeobecnenej forme

$$Cn \ldots (Cn\ (X) = Cn\ (X)) \qquad [12]$$

Dôsledky vyplývajúce z neplatnosti viet [11] a [12] sú také limitujúce, že, zdá sa, samé sú ukazovateľom priúzkeho chápania tak matematiky ako aj logiky, hoci z čisto teoretického hľadiska by rozpracovanie takejto logiky bolo nesmierne zaujímavé. V ultraintuicionistickom predikátovom kalkule by sme sa okrem limitujúcich podmienok vyplývajúcich z vlastného výpovedného kalkulu stretli s ďalšou relativizáciou, ktorá spočíva v tom, že premenné by tu reprezentovali oblasti síce konečné, ale neurčené a konečné, ale neurčené by bolo aj univerzum tejto logiky.[43]

Ak uznáme pravdivosť vety [9], tak $\aleph_0$ môžeme chápať buď ako potenciálne, buď ako aktuálne nekonečno. V obidvoch prípadoch tak množina pravdivých ako aj množina nepravdivých výpovedí bude nekonečná, t. j. v [7] aj $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$ aj $\overline{\overline{P}} = \aleph_0$. Ľahko dokážeme, že F je nekonečná množina. Vieme, že $F \neq 0$, t. j. že jestvuje aspoň jedna nepravdivá výpoveď p. Druhú dostaneme, keď p konjunkciou spojíme s ľubovoľnou výpoveďou q, tretiu dostaneme, keď $p \wedge q$ spojíme konjunkciou s r atď., Pretože negácia nepravdivej výpovede je pravdivá, aj $\overline{\overline{P}} = \aleph_0$.[44] Ak univerzum určujeme rekurzívnym spôsobom, teda ak je rekurzívnou efektívnou množinou, tak príslušná logika bude konštruktívna a podľa bližších kritérií určovania pravdivosti a nepravdivosti výpovedí sa bude viac alebo menej podobať intuicionistickej logike.

[43] Ak by tu malo zmysel vôbec hovoriť o konečnej a nekonečnej oblasti.

[44] Nekonečné množstvo pravdivých výpovedí dokážeme, ak pripustíme, že jestvuje aspoň jedna pravdivá výpoveď s. Tá jestvuje, lebo v opačnom prípade by dokazovanie nemalo význam. Vtedy však platí, že aj $Cn\ (s)$ je pravdivá a že aj $Cn\ (Cn \ldots (Cn\ (s)) \ldots)$ je pravdivá.

Definícia deduktívneho systému vo vete [11] považuje tento za hotový útvar, a preto, zdá sa, že má význam len ak sa $\aleph_0$ chápe ako aktuálne nekonečno. Nech sú tieto úvahy pravdivé, nech teda $\aleph_0$ je aktuálne nekonečno, ako to predpokladajú platonovci.[45] Ak P je hotová množina, tak môžeme utvoriť množinu všetkých podmnožín množiny P a táto bude mať mohutnosť kontínua 2 na $\aleph_0$. Každej podmnožine množiny P priraďme konjunkciu, ktorá sa skladá z toľko členov, koľko má podmnožina prvkov. Podmnožine majúcej jeden prvok priradíme nultú konjunkciu majúcu len jednu výpoveď p, podmnožine majúcej dva prvky priradíme konjunkciu o dvoch výpovediach $p \wedge q$ atď. Ak $\overline{\overline{P}} = \aleph_0$ tak na základe uvedeného priradenia konjunkcií podmnožinám množina pravdivých výpovedí by mala súčasne aj mohutnosť kontinua a preto by bolo 2 na $\aleph_0$ pravdivých výpovedí. Pretože počet dokázaných a dokázateľných výpovedí je len $\aleph_0$ budú niektoré výpovede z 2 na $\aleph_0$, nedokázateľné. Ak však počet dokázaných výpovedí je $\aleph_0$, mali by byť aj podmnožiny $\aleph_0$, t. j. všetky konjunkcie dokázateľné. No v 2 na $\aleph_0$ sú nevyhnutné aj nedokázateľné výpovede. Preto ak výpovede $p_1, p_2 \ldots, p_n$ (kde $n \leq \aleph_0$) sú dokázateľné, výpoveď $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ nemusí byť dokázateľná, a preto nebude platiť ani pravidlo

$$\frac{p \quad q}{p \wedge q}, \qquad [13]$$

presnejšie povediac, toto pravidlo by malo platiť len v konštruktívnej logike.

Ak $\overline{\overline{P}} = \aleph_0$ a $\aleph_0$ je aktuálne, tak musíme zaviesť pojmy „pravda o sebe" „veta o sebe" a pod. Ak totiž $\overline{\overline{P}}$ = aktuálne $\aleph_0$, tak budú „jestvovať" aj vety, ktoré nikto nikdy neobjaví a nedokáže a ktoré budú mať preto existenciu o sebe. Konštruktívna logika naopak viaže realitu vety na skutočnú alebo možnú konštrukciu.

Z hľadiska univerza môžeme konštruktívne a nekonštruktívne logiky charakterizovať aj iným spôsobom a tak dostať aj iné definície konštruktívnej logiky. V nekonštruktívnej logike a matematike je univerzum U dané a v ňom sa robia operácie. V konštruktívnej logike naopak máme východiskové prvky; z nich pomocou operácií dostávame ďalšie prvky a univerzum tak postupne tvoríme.

Môže sa namietať, že výpovedný kalkul budovaný inými metódami nenarazí na problémy nekonečna a že aj Carnapova definícia analytickej vety ako vety hovoriacej o možných stavoch hovorí vlastne len o konečnom počte stavov (v dvojhodinovej logike pri funkciách o dvoch argumentoch, len o štyroch stavoch). V axiomaticky budovaných výpovedných kalkuloch sa problém nekonečna prejavuje alebo zatajuje v pravidle substitúcie,[46] ktoré umožňuje nekonečný rad

---

[45] Pojem „platonizmus" má mnoho spoločného so starým Platonom. Stojí však viac v protiklade s moderným nominalizmom. Ak tvrdí reálnu existenciu množín a ak množiny sa nestotožňujú s individuálnymi predmetmi, ktoré sú prvky množiny, tak tvrdí, podobne ako Platon, existenciu neindividuálnych predmetov. Pozri J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematicznej a teorii mnogości*, Warszawa 1963, 263.

[46] H. B. Curry, R. Feys, *Combinatory Logic* I. Amsterdam 1958, 2. Tu sa pravidlo substitúcie považuje za o mnoho komplikovanejšie ako napr. pravidlo odlúčenia. Pravidlo substitúcie obsahuje nekonečne mnoho spôsobov manipulovania. Pozri aj P. C. Rosenbloom, *The Elements of Mathematical Logic*, New York 1950, 40, 109 n.

postupného dosadzovania. Preto konštruktívny systém môže užívať len rekurzívne definované pravidlo substitúcie, alebo ako sa to robí napr. v jednej forme kombinatorickej logiky, toto pravidlo (späté s pojmom premennej) z logiky vylúčiť. Dôsledok takéhoto vylúčenia je vznik ďalšej formy konštruktívnej logiky.

V budúcej štúdii budeme hovoriť o konštruktivistických a nekonštruktivistických interpretáciách logických častíc (negácie, implikácie, všeobecného a existenčného kvantifikátora) v súvislosti s ich metodologicko demonštračnou funkciou.

СОДЕРЖАННО-КОНСТРУКТИВНЫЕ ЛОГИКИ

Войтех Филькорн

Автор различает два типа конструктивных логик. Логика содержанно-конструктивная является орудием построения конструктивных систем в науке; формально конструктивная логика является орудием конструктивного построения науки. В статье анализируются некоторые проблемы конструктивных логик первого типа.

На основании анализа понятий конструкция и рекурсивные функции, он делает вывод, что понятие конструкции должно быть основным, но не единственным и не произвольно выбранным понятием. Оно должно быть относительным, именно с точки зрения положения математики в рамках всех наук и с точки зрения понимания проверочно-показательной функции науки. Это создает условия для возникновения разных типов конструктивизма и им соответствующих логических систем.

В статье показывается как попадают в математику разные неконструктивные элементы — логическим путем через косвенное доказательство и математическим путем через слишком широкое определение функции и слишком широкое понимание понятия множества — и далее, сравниваются конструктивные логики с неконструктивными, при чем оказывается, что неконструктивные логики неизбежно возникают на онтологическом фоне.

Довольно широко распространено мнение, согласно которому, двухценностный калькуль высказывания носит явно финитный характер и тем самым является, с точки зрения содержания, конструктивным. На основании анализа метода матриц калькуля высказывания делается вывод, что также в калькуле высказывания имеются неконструктивные элементы. Исходится при этом из первой метаматематической аксиомы Тарского $\overline{\overline{U}} \leq \aleph_o$, где U представляет множество всех высказываний. Изучаются последствия применения ультраинтуиционистской арифметики, согласно которой $\overline{\overline{U}} \leq \aleph_o$, далее последствия как потенционального так и актуального понимания бесконечности, т. е. последствия того, что $\overline{\overline{U}} = \aleph_o$.

Наконец анализируется с точки зрения бесконечности аксиоматический метод калькуля высказывания, основанного на правиле субституции.

CONTENTS-CONSTRUCTIVE LOGICS

Vojtech Filkorn

In the present paper, two kinds of constructive logics are distinguished. Contents-constructive logic is an instrument of building constructive systems in science; the formally constructive logic is an instrument of constructive building of science. Some problems of the former kind of constructive logic are dealt with in the present study.

By means of the analysis of the concept of construction and recoursive functions, the author arrives at a conclusion that though the concept of construction must be basic it need not be either unique or freely chosen. It must be relative, viz. relative from the viewpoint of the position of mathematics in the whole science and from the viewpoint of the conception of the verificative-demonstrational function of science. This enables the rise of various kinds of constructivism and logical systems which are adequate to them.

It is shown in the present paper how various nonconstructive elements came into mathematics, viz. in a logical way by means of indirect proof, and in a mathematical way by a broad definition of function and by a broad understanding of the concept of set. Constructive logics are then compared with nonconstructive ones and the latter are shown necessarily to have an ontological background.

An opinion is spread widely enough that the 2-valued propositional calculus is eminently finitistic and hence contents-constructive. By means of the analysis of the matrix method of the propositional calculus, the conclusions are drawn that there are nonconstructive elements even in the propositional calculus. The first metamathematical Tarský's axiom $\overline{\overline{U}} \leqq \aleph_o$, where U stands for the set of all propostions, serves as a starting point. The consequences of the application of ultraintuitionistic arithmetic are studied according to which $\overline{\overline{U}} < \aleph_o$ would hold good, then the consequences are studied of both potential and actual understanding of the infinite, i. e., the consequences of $\overline{\overline{U}} \gtreqless \aleph_o$. In the end, attention is devoted, from the viewpoint of the infinite, to the axiomatical method of propositional calculus using the rule of substitution.