ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY

PAVEL CMOREJ

IV

Venujeme teraz trochu sústredenejšiu pozornosť funkciám, ktoré sú denotátmi predikátov. Už vieme, že sú to funkcie, ktoré niektorým (alebo žiadnym) usporiadaným n-ticiam ($n \geqq 1$) indivíduí z univerza daného jazyka priraďujú hodnotu **P** a ostatným (prípadne všetkým) hodnotu **N**.[40] Pokúsme sa zistiť ako súvisí priebeh tejto funkcie s významom predikátu, ktorý ju denotuje. Objasnime si to na príklade predikátu z jazyka aritmetiky prirodzených čísel. Skúmajme, akú funkciu denotuje napr. predikát „. . . je deliteľom . . .". Namiesto výrazu „je deliteľom" budeme používať predikátový symbol „D". Keďže predikát „D" denotuje funkciu, ktorá každej usporiadanej dvojici prirodzených čísel priraďuje pravdivostnú hodnotu **P** alebo **N**, spojením tohto predikátu s dvoma individuálnymi menami dostaneme výraz, ktorý denotuje pravdivostnú hodnotu **P** alebo **N**, t. j. výrok. „Nech „a_1" a „a_2" sú ľubovoľné individuálne mená prirodzených čísel a c_1, c_2 ich denotáty. Funkcia, ktorá je denotátom predikátu „D", priraďuje usporiadanej dvojici $\langle c_1, c_2\rangle$ pravdivostnú hodnotu **P** práve vtedy, keď výrok „$D(a_1, a_2)$", ktorý vznikne spojením predikátu „D" s individuálnymi menami „a_1", „a_2" (v tomto poradí) je pravdivý. Ak je výrok „$D(a_1, a_2)$" nepravdivý, denotát predikátu „D" priraďuje usporiadanej dvojici $\langle c_1, c_2\rangle$ pravdivostnú hodnotu **N**. Napr. dvojiciam $\langle 2,4\rangle$, $\langle 3,9\rangle$, $\langle 10,20\rangle$, $\langle 9,90\rangle$, $\langle 7,14\rangle$ priraďuje táto funkcia hodnotu **P** a dvojiciam $\langle 2,3\rangle$, $\langle 4,9\rangle$, $\langle 5,7\rangle$, $\langle 7,15\rangle$, $\langle 9,3\rangle$ hodnotu **N**. Obdobne možno postupovať pri stanovení priebehu funkcií, ktoré sú denotátmi viacmiestnych predikátov. V prípade jednomiestnych predikátov neuvažujeme usporiadané dvojice, trojice, . . . atď. indivíduí, ale jednotlivé indivíduá. Denotát jednomiestneho predikátu priraďuje nejakému indivíduu hodnotu **P** vtedy, keď výrok, ktorý vznikne spojením tohto predikátu s menom príslušného indivídua, je pravdivý. V opačnom prípade mu priraďuje hodnotu **N**. Napr. denotát predikátu „je prvočíslo" priraďuje hodnotu **P** prvočíslam a ostatným indivíduám hodnotu **N**.[41]

Nech M je ľubovoľná množina a N nejaká podmnožina množiny M. Funkcia definovaná na množine M, ktorá ľubovoľnému prvku z N priraďuje pravdivostnú hodnotu **P** a ostatným prvkom z M hodnotu **N**, nazýva sa *charakteristickou funkciou množiny N*.[42]

---

[40] Neberieme už do úvahy funkcie, ktoré niektorým usporiadaným n-ticiam ($n \geqq 1$) indivíduí nepriraďujú nijakú pravdivostnú hodnotu (pozri pozn. 38). Zvrat „ktoré niektorým (alebo žiadnym) . . . a ostatným (prípadne všetkým)" treba chápať takto: „ktoré niektorým (všetkým alebo žiadnym) . . . a ostatným (žiadnym alebo všetkým)".

[41] Upozorňujeme na to, že naznačený postup skúmania funkcií, ktoré sú denotátmi predikátov nemožno uplatniť v každom jazyku a že ho tu uvádzame len preto, aby čitateľ lepšie pochopil vzťah medzi významom predikátu a jeho denotátom. Mlčky tu predpokladáme, že význam predikátu je vopred stanovený a že v danom jazyku existujú mená všetkých indivíduí z jeho univerza.

[42] Množinou funkčných hodnôt charakteristickej funkcie je podľa uvedeného vymedzenia mno-

Je zrejmé, že denotátmi predikátov sú charakteristické funkcie určitých množín indivíduí, množín usporiadaných dvojíc indivíduí atď. Napr. funkcia, ktorá je denotátom predikátu „je prvočíslo", je charakteristickou funkciou množiny prvočísel, pretože každému prvočíslu priraďuje hodnotu **P** a ostatným prirodzeným číslam hodnotu **N**. Denotát predikátu „D" je charakteristickou funkciou množiny tých usporiadaných dvojíc $\langle c_1, c_2 \rangle$ prirodzených čísel, pre ktoré platí, že c_1 je deliteľom c_2. Funkcia, ktorá je denotátom dvojmiestneho predikátu „... je otcom ..."[43] je charakteristickou funkciou množiny tých usporiadaných dvojíc $\langle x_1, x_2 \rangle$, pre ktoré platí, že x_1 je otcom x_2. Denotátom ľubovoľného n-miestneho ($n \geqq 1$) predikátu je teda funkcia, ktorá z množiny všetkých usporiadaných n-tíc indivíduí vyčleňuje určitú podmnožinu, a síce podmnožinu všetkých tých usporiadaných n-tíc, ktorým priraďuje pravdivostnú hodnotu **P**.

Nech Φ je ľubovoľný n-miestny predikát jazyka J denotujúci nejakú funkciu f, ktorá je charakteristickou funkciou množiny M. Potom pre ľubovoľnú usporiadanú n-ticu indivíduí $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ z univerza jazyka J platí, že $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ je prvkom množiny M vtedy a len vtedy, keď funkcia f priraďuje usporiadanej n-tici $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ pravdivostnú hodnotu **P**. To znamená, že ľubovoľnou funkciou, ktorá je denotátom nejakého predikátu Φ z jazyka J, je jednoznačne určená nejaká množina M a naopak, množinou M je jednoznačne určená jej charakteristická funkcia.[44] A preto sa n-miestnym predikátom namiesto charakteristických funkcií určitých množín často priraďujú — ako ich denotáty — práve tieto množiny. Podľa tohto ponímania[45] denotátom jednomiestneho predikátu „je prvočíslo" je množina všetkých prvočísel, denotátom predikátu „D" množina všetkých tých usporiadaných dvojíc $\langle c_1, c_2 \rangle$ prirodzených čísel, pre ktoré platí, že c_1 je deliteľom c_2 a denotátom dvojmiestneho predikátu „je otcom" množina všetkých tých usporiadaných dvojíc $\langle x_1, x_2 \rangle$, pre ktoré platí, že x_1 je otcom x_2.[46]

žina pravdivostných hodnôt. Namiesto tejto množiny sa často uvádza množina $\{0,1\}$, ale mohla by to byť aj iná dvojprvková množina. Skutočnosť, že v uvedenom vymedzení sme si za množinu funkčných hodnôt charakteristickej funkcie zvolili množinu pravdivostných hodnôt, je podmienená potrebami nášho výkladu.

[43] Predpokladáme, že tento predikát je výrazom jazyka, ktorého univerzum tvorí množina všetkých ľudí.

[44] Za predpokladu, že je presne dané univerzum jazyka J.

[45] Toto ponímanie denotátu predikátov je intuitívne prijateľnejšie i bežnejšie ako koncepcia, ktorú sme naznačili vyššie. Na výber medzi jednou a druhou koncepciou vplýva jednak celkový charakter sémantickej teórie jazykových výrazov, jednak rôzne okolnosti technického rázu. Pretože sme funktory charakterizovali ako výrazy denotujúce funkcie nad U; $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$ a medzi funktory zaradili aj predikáty, načrtli sme najprv teóriu, podľa ktorej predikáty sú výrazy, ktoré denotujú určité funkcie. Teraz sme ukázali, ako táto teória súvisí s koncepciou, podľa ktorej predikáty denotujú určité množiny. V ďalšom výklade budeme vychádzať predovšetkým z druhej koncepcie denotátu predikátov. Množiny, ktoré sa priraďujú predikátom, ako ich denotáty majú ten istý typ, ako ich charakteristická funkcia.

[46] V pozn. 12 sme narazili na problém, či predikát „prvočíslo" (resp. „je prvočíslo" — výskyt spony „je" v niektorých predikátoch slovenského prirodzeného jazyka môžeme zanedbať jednak preto, že v niektorých predikátoch sa vôbec nevyskytuje, napr. „plače", „miluje" a podobne, jednak preto, že v logike sa obyčajne celý zvrat nahradzuje jedným symbolom alebo slovom) označuje množinu všetkých prvočísel alebo jednotlivé prvočísla. Podľa jedného možného

Predpokladajme, že individuálne meno w_1 denotuje objekt x_1, individuálne meno w_2 objekt x_2, ... a individuálne meno w_n objekt x_n; denotátom n-miestneho predikátu Φ nech je množina M. Výrok Φ $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, ktorý vznikne spojením predikátu Φ s individuálnymi menami $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (v uvedenom poradí) je pravdivý vtedy a len vtedy, keď usporiadaná n-tica $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ je prvkom množiny M, ktorá je denotátom predikátu Φ. Výrok Φ $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ je nepravdivý, keď usporiadaná n-tica $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ nepatrí do množiny M. Napr. výroky „2 je prvočíslo", „$D(3,6)$", „Ch. Chaplin je otcom Geraldiny Chaplinovej" sú pravdivé, pretože denotát číslice „2" je prvkom množiny, ktorú denotuje predikát „je prvočíslo", usporiadaná dvojica čísel $\langle 3,6 \rangle$ je prvkom množiny, ktorú denotuje predikát „D" a usporiadaná dvojica ⟨Ch. Chaplin, Geraldina Chaplinová⟩ je prvkom množiny, ktorú denotuje predikát „je otcom". Keďže usporiadaná dvojica $\langle 2,3 \rangle$ nepatrí do množiny, ktorá je denotátom predikátu „D", výrok „$D(2,3)$" je nepravdivý.

V tejto časti sme skúmali jazykové výrazy *rôznych* syntaktických kategórií, ktorým budeme hovoriť **funktorové kategórie výrazov.** Do jednotlivých funktorových kategórií patria okrem funktorov aj funktorové formy, na ktoré sústredíme našu pozornosť v nasledujúcej časti.

Ako individuálne mená a výroky, aj funktory sme analyzovali predovšetkým zo sémantického hľadiska. Ich syntaktickú stavbu a úlohu, ktorú majú pri konštrukcii zložených výrazov, bližšie si všimneme v 2.4.

2.4 **Konštanty, premenné a formy.** V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali jazykovými výrazmi, ktoré denotujú (pomenúvajú) nejaké objekty, a to indivíduá z univerza U daného jazyka, pravdivostné hodnoty alebo funkcie nad U; {**P**, **N**}. Tieto výrazy možno vlastne pokladať za *mená* objektov typu i, v alebo $\alpha/\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$, kde písmená α, β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ zastupujú ľubovoľné typové symboly. Naznačili sme, že v niektorých jazykoch sa vyskytujú výrazy, ktoré síce nemajú nijaký denotát, ale používajú sa ako mená, pretože svojou štruktúrou sa ničím nelíšia od mien určitej syntaktickej kategórie alebo aj preto, že o niektorých z nich niekedy predpokladáme, že im nejaký denotát zodpovedá. Takým výrazom určitej syntaktickej kategórie možno ako denotát priradiť jeden vhodne zvolený objekt určitého typu a tým sa v miešanom alebo umelom jazyku vyhnúť menám bez denotátu.[47] Mená, ktoré majú denotát, nazývajú sa **konštanty.**[48] V niektorých

---

chápania termínu „označuje" výraz, a teda i predikát „prvočíslo", označuje alebo predpokladáme, že označuje presne jeden objekt. V tomto význame sme namiesto mnohoznačného termínu „označuje" používali termín „denotuje". Už vieme, že predikát „prvočíslo" denotuje množinu všetkých prvočísel. Podľa iného, bežnejšieho ponímania termínu „označuje" predikát „prvočíslo" označuje jednotlivé prvočísla, teda číslo 2 aj 3, 5, 7 ... atď. V tomto význame sa v logike používa termín „designuje". *Designácia* je určitý sémantický vzťah medzi predikátmi a objektami, ktoré sú prvkami množín, denotovaných týmito predikátmi. Ľubovoľný n-miestny predikát φ *designuje* objekt x vtedy a len vtedy, keď x je prvkom množiny, ktorá je denotátom predikátu φ. Objekt x, ktorý predikát φ designuje, nazýva sa *designátom* predikátu φ. Designátmi predikátu „D" sú napr. usporiadané dvojice <2,4>, <4,8>, <3,6> atď.; designátom predikátu „párny" (z jazyka aritmetiky prirodzených čísel) je ľubovoľné prirodzené číslo deliteľné 2.

[47] Pozri pozn. 15.

[48] Pozri A. Church, *Introduction to Mathematical Logic* I. Princeton 1956, 9. Niekedy sa

umelých i miešaných jazykoch sa okrem mien (resp. konštánt), t. j. individuálnych mien, výrokov a funktorov vyskytujú aj tzv. individuálno-menné, výrokové alebo funktorové formy. Najjednoduchšími formami sú premenné, známe čitateľovi najmä z matematiky a fyziky. V prirodzených jazykoch sa premenné nenachádzajú, avšak existujú v nich výrazy, ktoré majú podobné sémantické vlastnosti ako premenné; patria k nim napr. osobné alebo niektoré ukazovacie zámená (ja, ty, on, ona, ono, ten, tá, to, tu atď.).

Všimnime si niektoré vlastnosti osobných zámen „on", „ona" a ich sémantický vzťah k mimojazykovým objektom. Je zrejmé, že ani jedno z týchto zámen samo osebe nemá nijaký denotát. Nemožno predsa tvrdiť, že zámeno „on" alebo „ona" denotuje tú a tú osobu, zviera a podobne. Avšak v určitých situáciách alebo kontextoch ich používame akoby boli menami nejakých objektov, t. j. priraďujeme im určitý objekt (najčastejšie osobu alebo zviera), o ktorom v danej situácii alebo kontexte pomocou nich hovoríme. No napriek tomu ani zámeno „on" ani zámeno „ona" nemožno pokladať za meno priradeného objektu, pretože každé meno má iba jeden denotát, kým zámenu „on" alebo „ona" môžeme v inom kontexte alebo situácii obdobne priradiť iný objekt. Napr. zámenu „on" môžeme v jednom kontexte priradiť F. M. Dostojevského (a teda pod „on" rozumieť Dostojevského), v inom L. N. Tolstoja. Tá istá veta „On napísal i román Anna Kareninová" bude potom v jednom kontexte nepravdivá, v druhom pravdivá — v závislosti od toho, čo budeme rozumieť pod zámenom „on", t. j. ktorú zo spomenutých osôb mu priradíme. Príznačnou črtou zámen „on" a „ona" je aj to, že im nepriraďujeme ľubovoľné objekty, napr. zámenu „on" nepriraďujeme osoby ženského pohlavia a zámenu „ona" osoby mužského pohlavia. Každému z týchto zámen zodpovedá *určitá* množina objektov, ktoré im priraďujeme.[49] Treba však zdôrazniť, že ani zámeno „on" ani zámeno „ona" nie je menom tejto množiny. Tieto zámená nepomenúvajú nijaký predmet, každému z nich možno však v určitej situácii alebo kontexte priradiť ľubovoľný objekt zo spomenutej množiny.

Podobný sémantický vzťah k mimojazykovým objektom ako zámená „on", „ona", majú aj premenné. **Premenná** je symbol, ktorý nie je menom nijakého určitého objektu (t. j. indivídua, pravdivostnej hodnoty alebo funkcie nad U; $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$), ale zodpovedá mu nejaká neprázdna množina objektov, ktoré 1. majú ten istý typ a 2. ktoré možno tomuto symbolu priraďovať. Množina objektov priraďovaných premennej sa nazýva **oblasťou hodnôt (premennosti)** a jej prvky **hodnotami** premennej. Priradenie ľubovoľnej hodnoty danej premennej sa nazýva **udelením hodnoty** tejto premennej. O premennej, ktorej sa ako hodnoty priraďujú objekty z nejakej množiny M, budeme tiež hovoriť, že *nadobúda* hodnoty z oblasti hodnôt M alebo že *prebieha* oblasť hodnôt M. Na rozdiel od konštánt, ktoré pomenúvajú určité objekty (každá konštanta *jeden* pevne stanovený predmet),

termín „konštanta" chápe širšie ako ľubovoľný výraz s pevným a presne ustáleným významom, ktorý sa v rámci danej úvahy nemení. Podľa tohto ponímania možno za konštanty považovať aj mená, ktoré nemajú denotát.

[49] Bližšie určenie tejto množiny je úlohou jazykovedy, a preto sa tu ním zaoberať nebudeme.

premenné môžu nadobúdať rôzne hodnoty zo svojej oblasti premennosti. Premenná patrí do tej istej syntaktickej kategórie výrazov ako mená hodnôt z oblasti jej premennosti. Ak oblasťou hodnôt danej premennej je množina indivíduí (táto množina je obyčajne identická s univerzom jazyka), nazývame ju *individuálno-mennou (názvovou) premennou*. Hodnotami tzv. *jednomiestnych predikátových premenných* sú množiny indivíduí (resp. funkcie typu v/i) a hodnotami n-miestnych ($n \geqq 2$) *predikátových premenných* — množiny usporiadaných n-tíc indivíduí (resp. n-miestne funkcie typu $v/ii\ldots i$). Oblasťou hodnôt *výrokových premenných* je množina {P, N}. Individuálno-názvové premenné patria do tej istej syntaktickej kategórie ako individuálne mená, n-miestne ($n \geqq 1$) predikátové premenné do tej istej kategórie ako n-miestne predikáty a výrokové premenné do tej istej kategórie ako výroky. V niektorých umelých i miešaných jazykoch sa vyskytujú aj premenné iných syntaktických kategórií.

Majme ľubovoľný správne utvorený zložený výraz w. Nejaký výraz v sa môže vo výraze w vyskytovať na jednom, dvoch i viacerých miestach (prípadne ani na jednom mieste). Napr. výraz „2" sa vo výraze „$2+2 = 1+1+2$" vyskytuje na troch a výraz „1" na dvoch miestach. Budeme tiež hovoriť, že výraz v má vo výraze w jeden, dva alebo viac *výskytov*. Ak $v = w$, výraz v má vo výraze w presne jeden výskyt a je to práve výskyt výrazu w.

Nech J je jazyk, v ktorom w a v sú mená nejakých objektov a z premenná, ktorá sa nevyskytuje vo výraze w.[50] Predpokladajme, že výraz v má v mene w aspoň jeden výskyt a že denotát mena v je prvkom oblasti hodnôt premennej z. Výraz, ktorý získame z výrazu w tým, že jeden alebo viac výskytov výrazu v nahradíme premennou z, nazýva sa *singulárnou formou*.[51] Napr. keď v menách „$2(3+2)$", „$2 < 2+1$" nahradíme ľubovoľný počet výskytov mena „2" premennou „x", ktorej zodpovedá oblasť hodnôt obsahujúca ako svoj prvok číslo 2, dostaneme tieto singulárne formy: „$x(3+2)$", „$x(3+x)$", „$2(3+x)$", „$x<2+1$", „$2<x+1$", „$x<x+1$". Ak $v = w$, nahradením jediného výskytu výrazu v vo výraze w premennou z dostaneme najjednoduchšiu singulárnu formu — premennú z.[52]

Predpokladajme, že v_1 a v_2 sú dve rôzne mená vyskytujúce sa v nejakom *názve* w, pričom ani jedno z mien v_1 a v_2 nie je časťou druhého. Nech denotát mena v_1 je prvkom oblasti hodnôt premennej z_1 a denotát mena v_2 prvkom oblasti hodnôt premennej z_2 a ani jedna z premenných z_1, z_2 nech sa nevyskytuje vo výraze w.[53] Nahradením jedného, dvoch alebo viacerých výskytov výrazu v_1

---

[50] Zmysel podmienky, kladenej na premennú z objasníme v časti 2.5.

[51] V 2.5 ukážeme, že singulárnu formu možno z výrazu w v určitých prípadoch získať aj vtedy, keď sa premenná z v mene w už vyskytuje (to isté sa vzťahuje i na formy s viacerými premennými, ktoré vymedzíme v ďalšom texte). To znamená, že podmienka, aby sa premenná z vo výraze w nevyskytovala, neplatí všeobecne. Prijali sme ju však preto, že nám značne zjednodušuje vymedzenie singulárnej formy.

[52] Premenné sa k formám obyčajne nepočítajú. Pre náš výklad bude však účelné chápať formy všeobecnejšie a začleniť k nim aj premenné.

[53] Táto podmienka má vo vymedzení binárnej formy tú istú funkciu ako obdobná podmienka, položená pri vymedzení singulárnej formy (pozri pozn. 51).

premennou z_1 a výrazu v_2 premennou z_2 získame tzv. *binárnu formu.* Binárnymi formami môžu byť napr. výrazy „$x(y+x)$", „$x < y$", „$x+y = y+x$", „$2(x+y) = 2x+2y$" atď., kde „x" a „y" sú premenné s vhodne zvolenými oblasťami premennosti.

Podobne ako singulárnu a binárnu formu možno vymedziť aj formu, v ktorej sa vyskytuje viac ako dve rôzne premenné. Teraz pristúpime k všeobecnému vymedzeniu n-árnej formy ($n = 1,2,\ldots$), kde n je počet rôznych premenných, ktoré sa v nej vyskytujú. Nech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú navzájom rôzne mená vyskytujúce sa v nejakom názve w, pričom žiadne z nich nie je časťou iného. Ďalej predpokladajme, že $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sú rôzne premenné, ktoré sa nevyskytujú vo výraze w[54] a že denotát mena v_1 je prvkom oblasti hodnôt premennej z_1, denotát mena v_2 prvkom oblasti hodnôt premennej z_2, ... a denotát mena v_n prvkom oblasti hodnôt premennej z_n. Forma, ktorá vznikne z výrazu w nahradením jedného alebo viacerých výskytov mena v_1 premennou z_1, mena v_2 premennou z_2, ... a mena v_n premennou z_n nazýva sa *n-árna forma.* Ľubovoľný výraz φ je **forma** vtedy a len vtedy, keď existuje prirodzené číslo $n \geqq 1$ také, že φ je n-árna forma.

Pretože žiadna z premenných $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ktoré sa v n-árnej forme vyskytujú (spôsobom, ktorý sme naznačili v jej vymedzení) nedenotuje nijaký určitý objekt, ani forma nemá nijaký denotát. Napr. nemá zmysel tvrdiť, že forma „$x < y$" je pravdivá alebo nepravdivá (t. j. že denotuje hodnotu **P** alebo **N**), ako nemá zmysel tvrdiť, že forma „$x+y$" denotuje číslo 3 alebo 7. Vieme však, že premenné, ktoré sa vo forme vyskytujú, môžu nadobúdať rôzne hodnoty (každá zo svojej oblasti hodnôt!). V závislosti od toho, aké hodnoty sa udeľujú premenným, ktoré sa v nej vyskytujú, *určité hodnoty nadobúda aj forma.* Predpokladajme, že nejaký výraz φ je n-árna forma, v ktorej sa vyskytujú práve premenné $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a že h_1 je nejaký prvok z oblasti hodnôt premennej z_1, h_2 prvok z oblasti hodnôt premennej z_2, ... a h_n prvok z oblasti hodnôt premennej z_n. **Hodnotou n-árnej formy φ pri hodnotách $h_1, h_2, \ldots, h_n$ udelených premenným** $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (a síce takto: hodnota h_1 premennej z_1, hodnota h_2 premennej z_2, ... a hodnota h_n premennej z_n) budeme nazývať denotát výrazu, ktorý vznikne z formy φ tak, že každý výskyt premennej z_1 nahradíme menom objektu h_1, každý výskyt premennej z_2 nahradíme menom objektu h_2, ... a každý výskyt premennej z_n nahradíme menom objektu h_n.[55] Je zrejmé, že ak φ je premenná, hodnotou singulárnej formy φ pri nejakej hodnote h z jej oblasti premennosti je práve hodnota h. Nie je vylúčené, že pri niektorých hodnotách udelených premenným formy φ nemá táto forma nijakú hodnotu, lebo výraz, ktorý z formy φ uvedeným spôsobom dostaneme, nemá nijaký denotát.

---

[54] Pozri pozn. 51 a 53.

[55] Ďalej budeme často používať zvraty ako „hodnota formy... pri hodnotách $h_1, h_2, \ldots h_n$ udelených jej premenných $z_1, z_2, \ldots, z_n$". Budeme mať pri tom na mysli vždy také udelenie hodnôt, pri ktorom je hodnota h_1 priradená premennej z_1, hodnota h_2 premennej $z_2, \ldots$ a hodnota h_n premennej z_n (resp. pri ktorom je prvá z uvedených hodnôt priradená prvej z uvedených premenných, druhá z uvedených hodnôt druhej z uvedených premenných atď. — v prípade, že mená hodnôt alebo premenných uvedieme bez indexov).

A teraz si všimnime niekoľko príkladov. Predpokladajme, že „x" a „y" sú premenné z jazyka aritmetiky prirodzených čísel, ktoré nadobúdajú hodnoty z množiny všetkých prirodzených čísel. Hodnotou formy „$x(y+x)$" pri hodnotách 3 a 5 udelených premenným „x" a „y" je číslo 24, pretože toto číslo je denotátom výrazu „$3(5+3)$", ktorý dostaneme z formy „$x(y+x)$" tak, že každý výskyt premennej „x" nahradíme číslicou „3" a každý výskyt premennej „y" nahradíme číslicou „5". Hodnotou formy „x" pri hodnote 3 je číslo 3. Hodnotou formy „$x < y$" pri hodnotách 3 a 5 udelených premenným „x" a „y" je pravdivostná hodnota **P** (lebo výrok „$3 < 5$" denotuje **P**), ale hodnotou tej istej formy pri hodnotách 5 a 3 udelených premenným „x" a „y" je pravdivostná hodnota **N** (pretože výrok „$5 < 3$" denotuje **N**). Forma „$x - y$" nemá pri hodnotách 3 a 5 udelených premenným „x" a „y" nijakú hodnotu, lebo individuálne meno „$3 - 5$" nemá v univerze jazyka aritmetiky prirodzených čísel nijaký denotát. To však neznamená, že táto forma nemôže mať pri udelených hodnotách nijakú hodnotu ani v iných jazykoch; napr. v jazyku aritmetiky celých čísel (univerzom tohto jazyka je množina všetkých celých čísel) bude mať hodnotu -2. Iným príkladom formy, ktorá pri určitých hodnotách udelených jej premenným nemá nijakú hodnotu, je forma „$x{:}y$". Táto forma nenadobúda nijakú hodnotu pri každom takom udelení hodnôt jej premenným, ktoré premennej „y" priraďuje hodnotu 0 (a v aritmetike prirodzených čísel aj v iných prípadoch).[56]

Nech ψ je ľubovoľná n-árna výroková forma a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ všetky jej vzájomne rôzne premenné. Predpokladajme, že h_1 je ľubovoľný prvok z oblasti premennosti premennej z_1, h_2 ľubovoľný prvok z oblasti premennosti premennej z_2, ... a h_n ľubovoľný prvok z oblasti premennosti premennej z_n. Budeme hovoriť, že **udelenie hodnôt** $h_1, h_2, \ldots, h_n$ premenným $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (v uvedenom poradí) **splňa výrokovú formu** ψ vtedy a len vtedy, keď hodnotou formy ψ pri hodnotách $h_1, h_2, \ldots, h_n$ udelených jej premenným $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (v tomto poradí) je pravdivostná hodnota **P**. Napr. udelenie hodnôt 3 a 5 premenným „x", „y" splňa formu „$x < y$", ale nesplňa formu „$x > y$". Každé udelenie hodnôt premenným „x" a „y" splňa (v jazyku aritmetiky prirodzených čísel) formy „$x+y = y+x$", „$2(x+y) = 2x+2y$", no ani jedno udelenie hodnôt premenným „x" a „y" nesplňa formy „$x+y > y+x$", „$x+y < 0$" a podobne.[57]

Udelenie hodnôt premenným je sémantická operácia (ide tu totiž o priradenie mimojazykových objektov nejakým jazykovým výrazom — premenným). Tejto operácii zodpovedá syntaktická operácia dosadzovania mien priradených hodnôt za príslušné premenné. **Dosadzovanie** je nahradzovanie premenných, vyskytujúcich sa v nejakom výraze w (alebo množine výrazov) inými výrazmi (menami alebo formami) tej istej syntaktickej kategórie, pri ktorom každý výskyt tej istej premennej vo výraze w (vo všetkých výrazoch danej množiny) nahradzujeme tým

[56] Podľa vymedzenia hodnoty formy možno premenným, ktoré sa v nej vyskytujú, priraďovať iba tie objekty, ktoré sa nachádzajú v oblasti hodnôt príslušných premenných. Z tohto dôvodu forma nenadobúda nijakú hodnotu ani vtedy, keď niektorej z jej premenných priradíme ako hodnotu taký objekt, ktorý sa nevyskytuje v jej oblasti hodnôt.

[57] Pravda, ak oblasť hodnôt premenných „x" a „y" obsahuje aj celé čísla (napr. v jazyku aritmetiky celých čísel), existujú také udelenia hodnôt, ktoré splňajú formu „$x + y < 0$".

výrazom.[58] Napr. keď za premennú „x“ vo forme „$x+y > x$“ dosadíme výraz „$(2+4)$“, dostaneme „$(2+4) + y > (2+4)$“ a keď za premennú „x“ dosadíme „$2x$“ a za premennú „y“ výraz „$(2+1)$“ dostaneme „$2x+(2+1) > 2x$“. Udeleniu hodnôt 2 a 5 premenným „x“ a „y“, vyskytujúcim sa vo forme „$x+y > x$“, zodpovedá dosadenie mien uvedených hodnôt za premenné formy „$x+y > x$“. Týmto dosadením získame výrok „$2+5 > 2$“.

Ak dané udelenie hodnôt všetkým premenným nejakej výrokovej formy túto formu spĺňa, dosadením mien udelených hodnôt do tejto formy dostaneme pravdivý výrok. Naopak, keď dosadením mien nejakých objektov $h_1, h_2, \ldots, h_n$ za všetky premenné vyskytujúce sa vo výrokovej forme získame pravdivý výrok, udelenie hodnôt $h_1, h_2, \ldots, h_n$ premenným, za ktoré sme dosadili ich mená, spĺňa túto formu. Pretože udelenie hodnôt 2,3 spĺňa výrokovú formu „$x < y$“, výrok „$2 < 3$“, získaný dosadením mien udelených hodnôt, je pravdivý. Dosadením mien „1“, „3“ za premenné „x“, „y“ do formy „$x+x < y$“ dostaneme pravdivý výrok „$1+1 < 3$“, a preto udelenie hodnôt 1, 3 (ktoré sú denotátmi číslic „1“, „3“) premenným „x“, „y“ spĺňa formu „$x+x < y$“.

Treba zdôrazniť, že v mnohých jazykoch (týka sa to najmä jazykov s nekonečným univerzom) nezodpovedá každému udeleniu hodnôt premenným nejakej formy (alebo množine foriem) dosadenie mien týchto hodnôt za príslušné premenné. Môže sa totiž stať, že v danom jazyku neexistujú mená všetkých hodnôt, ktoré možno premenným určitej syntaktickej kategórie udeliť.

Forma patrí do tej istej syntaktickej kategórie ako meno, ktoré z nej dostaneme tak, že za každú premennú, ktorá sa v nej nachádza, dosadíme nejaké meno (resp. do tej istej kategórie ako meno, z ktorého sme túto formu získali).[59] Rozoznávame *individuálno-menné* (*názvové*), *výrokové* a rôzne *funktorové formy*. K individuálno-názvovým formám jazyka aritmetiky patria napr. tieto výrazy „$x+y$“, „$x(3+y)$“, „$2 - x$“, kým výrazy „$x > 0$“, „$x = y$“, „x je prvočíslo“ sú výrokové formy. Ak „f“ a „g“ sú premenné, ktoré nadobúdajú hodnoty z množiny jednomiestnych číselných funkcií, „$f+g$“ a „$f \cdot g$“ sú funktorové formy, z ktorých dostaneme konštantné funktory tak, že za premenné „f“ a „g“ dosadíme mená nejakých jednomiestnych číselných funkcií.[60]

---

[58] Hoci toto vymedzenie dosadzovania je intuitívne dostatočne jasné, nemožno ho považovať za náležite precízne, lebo prehliada určité komplikácie, ktoré vznikajú pri dosadzovaní foriem za viacej premenných. Predbežne môžeme však od týchto komplikácií odhliadať a presné vymedzenie dosadzovania odložiť na neskôr.

[59] V niektorých jazykoch sa nemusia v každej syntaktickej kategórii výrazov vyskytovať mená i formy. Niekedy môžu do určitej kategórie výrazov patriť iba mená, alebo len formy. Pritom ľubovoľné dve formy patria do tej istej syntaktickej kategórie práve vtedy, keď ako hodnoty nadobúdajú objekty toho istého typu.

[60] Výrazy „$+$“, „$\cdot$“ vystupujú vo výrazoch formy „$f + g$“, „$f \cdot g$“ ako funktory, ktoré denotujú funkcie typu $(i/i)/((i/)(i/i))$ (za predpokladu, že „f“ a „g“ sú premenné, ktoré nadobúdajú hodnoty z množiny funkcií typu i/i), ale vo výrazoch formy „$x + y$“, „$x \cdot y$“ (de „x“ a „y“ sú individuálno-názvové premenné) ako funktory typu i/i. Nejednoznačnosť týchto výrazov nemusí viesť k nedorozumeniam, ak je z kontextu jasné, v akom význame sa v ňom používajú.