OBJEV PLURALITY MATEMATIKY A JEHO FILOSOFICKÝ DOSAH*

ARNOŠT KOLMAN

Je dobře známou historickou skutečností, že odjakživa z matematiky čerpali argumentaci filosofové těch nejrůznějších směrů, obzvláště však — pro krajně abstraktní charakter matematiky — směrů idealistických.

Uvedu pouze tři příklady, které mně pomohou rozvinout téma přednášky.

Pythagorovci vycházeli z mylného předpokladu, že vztah mezi jakýmikoli dvěma veličinami, zejména mezi dvěma úsečkami, se dá vyjádřit jako poměr dvou celých čísel. Proto považovali celá čísla za podstatu všech věcí a za základ jednoty světa. Avšak kolem r. 400 do n. l. sami pythagorovci objevili nesouměřitelnost. Byla dokázána nemožnost vyjádřit poměr mezi úhlopříčnou a stranou čtverce jako poměr dvou celých čísel. Tím propukla první krize základů matematiky, přímo na počátku jejího vzniku jako samostatné vědy. A současně se i zhroutil pythagorovský mystický světový názor.

Kant se opíral na mistrovské dílo Euklidova geometrického systému, jehož poučky platily dva tisíce let jako bezpodmínečně všeobecné a bezpodmínečně nutné, a byl ovlivněn zdánlivou samozřejmostí bezpodmínečné nevyvratitelnosti aritmetiky. Proto prohlásil, že smyslová názornost prostoru a času — kterou pokládal za základ geometrických, resp. aritmetických soudů — je apriorní, existuje do veškeré smyslové zkušenosti.

Ale 23. února 1826 ve vzdálené, tenkráte zapadlé Kazani, Lobačevskij poprvé veřejně vyslovil myšlenku, že Euklidova geometrie není jediná možná nerozporná geometrie. Vyvinul svůj vlastní neeuklidovský systém, jeho logická konsistence byla později dokázána, v tom smyslu, že se ji podařilo redukovat na konsistenci euklidovské geometrie. Tím se stávalo jasné, že smyslová prostorová názornost a samotný pojem prostoru jsou abstraktní, neúplná a jednostranná zobrazení věcí a vztahů objektivního materiálního světa. Tudíž, je-li vůbec možné zodpovědět otázku o pravdivosti geometrie, pak může jedině empirická zkušenost — pozorování a pokusy astronomie a fyziky — rozhodnout, jaká z různých geometrií zobrazuje přesněji objektivní realitu. Tuto tézi Lobačevského potvrdila teorie relativity. Současně se však vyjasnilo, že ani dnešní pozorovací prostředky nestačí, aby se dalo rozhodnout, která geometrie je ta „pravá". Jedno je však jisté: kantovský subjektivní idealismus ztratil tím vším svou oporu v geometrii. Ovšem, zbyla mu dočasně ještě aritmetika jako nadějný argument. Přesto však zahájil objev neeuklidovské geometrie novou epochu v logicko-filosofickém opodstatnění matematiky.

Když r. 1873 osmadvacetiletý Georg Cantor počal budovat teorii množin jako

---

* Na túto tému prednášal Arnošt Kolman na schôdzi Slovenskej filozofickej spoločnosti v Bratislave dňa 23. novembra 1967. Táto stať je dodatočne skoncipovaným textom jeho prednášky.

logickou základnu matematiky, sledoval za Platonem a za středověkými scholasty, neboť přisuzoval číslům a všem matematickým abstrakcím, včetně stvořeným jím pojmům různých nekonečných množin, aktuálnímu nekonečnu atd. samostatnou existenci v říši idejí. Matematika se v té době právě vzpamatovala z druhé krize svých základů, spojené s objevem infinitezimálního počtu Newtonem a Leibnizem, z rozporů, obejdených spíše než překonaných pomocí pojmu limitního přechodu, který zavedli Bolzano a Cauchy. A teď teorie množin, kterou Cantor rozpracovával během čtyřiadvaceti let, dávala, jak se zdálo, matematice konečně pevnou základnu. Proto, po jistém váhání, matematikové ji přijali.

Avšak tato tvrz objektivního idealismu brzy padla. Nejprve sám Cantor objevil jednu, a pak jiní matematikové našli celou řadu antinomií nejen v teorii množin, ale i v matematické logice, která jí sloužila. Největší poplach vyvolala antinomie, objevená Russellem. Cantor, jemuž se přes obrovská úsilí nepodařilo zbavit se antinomií, a rovněž překonat jiné, ještě závažnější obtíže, o nichž si dále povíme, ztrávil jednadvacet posledních let svého života v psychiatrickém ústavě. Téměř pět desetiletí se čelní matematikové marně pokoušeli překonat antinomie — stav, který sami charakterizovali jako třetí krizi základů. Reagovali na to tím, že v základech matematiky vznikly školy subjektivně-idealistického intuicionismu a přidruženého k němu efektivismu, dále logicismu, konvencionalismu a formalismu. Přitom intuicionismus a obzvláště formalismus přispěly značně k projasnění základů matematiky, ačkoliv žádná z těchto škol nebyla s to zdůvodnit jednou pro vždy celou matematiku, jednoduše protože v takové antidialektické formulaci je tento problém zásadně neřešitelný. Je nutno poznamenat, že mnohých matematiků problém antinomií vůbec neznepokojoval, neboť jim dočasně nepřekážel vyvíjet dále oblasti, vzdálené od základů jejich vědy.

Pro vznik těchto škol, které dlouho a vášnivě mezi sebou diskutovaly, jež se však potom začaly vyvíjet ke konvergenci, počaly podstatně smiřovat své rozpory, a dnes vlastně již přestaly existovat v ryzí podobě, daly podnět, jak již bylo řečeno, antinomie teorie množin a logiky. Příčinou těchto antinomií bylo příliš široké, ničím neomezené pojetí pojmu „množina" v matematice a pojmu „oblast usuzování" (nebo „předmětná oblast") v logice. Logické pojmy, jež vznikly jako krajně zjednodušené abstraktní obrazy konkrétních vztahů, jež vládnou v konečnu, byly nekriticky přeneseny do ideálního nekonečna. Z hlediska filosofického všechy tyto školy byly zatíženy tím, že považovaly matematiku za ryze ideální vědu, která pouze historicky, heuristicky, psychologicky nebo didakticky, nikoli však gnoseologicky je spjata s materiálním světem. Proto skutečnost, že se dá matematika použít v praxi je — podle těchto škol — buď pouhá nahodilost: může účelně zjednodušeně popisovat jinak příliš složité fyzikální atp. zákonitosti — takové je hledisko subjektivního idealismu; nebo — podle objektivně-idealistickéh názoru má tuto možnost díky jakoby zásadní převaze logiko-matematických pravd nad empirickými. Vycházejíce ze svých idealistických pozic, stoupenci těchto škol formulovali problém nerozpornosti matematiky natolik metafyzicky absolutně, že museli nevyhnutelně ztroskotat.

Ale jak pro matematiku, tak i pro filosofii měla nemenší, ba snad ještě větší význam než přílišná šířka pojmu „množina“ ta okolnost, že se ukázalo, že systém axióm teorie množin je příliš úzký. Vyskytly se úkoly, které se nedařilo řešit. Již r. 1874 Cantor dokázal, že množina všech reálných čísel není spočetná, jinak řečeno, že má mohutnost větší než je mohutnost množiny přirozené řady číselné. Počínajíc r. 1880 Cantor se pokoušel dokázat vyzdvihnutou jím hypotézu, podle níž mohutnost množiny všech reálných čísel (mohutnost kontinua) je nejmenší ze všech mohutností, které jsou větší než mohutnost množiny přirozené řady číselné. Přesto, že se mnozí vynikající matematikové trvale namáhali tuto „hypotézu kontinua“ buď dokázat nebo vyvrátit, nedařilo se to — vedoucí matematik naší doby Hilbert zařadil tento problém jako číslo I do řady těch nejtěžších a nejnaléhavějších, jež čekají na své řešení. Tentýž osud stihl i jiná tvrzení, např. že jakoukoli množinu je možné plně uspořádat, t. j. že vždy existuje pravidlo, podle něhož se dá určit, který ze dvou libovolných prvků této množiny předchází před druhým, a že tato množina a všecky její neprázdné podmnožiny mají svůj první prvek. Stejně tomu bylo s větou, kterou r. 1904 zformuloval Zermelo, neboť ji potřeboval pro důkaz právě uvedeného tvrzení (tato věta obdržela název „Zermelův axióm výběru“), totiž že v každé rozčleněné množině lze vybrat ve všech jejích vzájemně se neprotínajících podmnožinách po jednom jedinému prvku. Všechna tato tvrzení se zatvrzele protivila pokusům dokázat je nebo je vyvrátit. Posléze r. 1938 Kurt Gödel dokázal nerozpornost axiómu výběru a hypotézy kontinua (t. j. že nejsou v rozporu s ostatními axiómy teorie množin), a v letech 1963—1964 Paul J. Cohen podal důkaz, že obě tyto věty nemohou být odvozeny z ostatních axiómů teorie množin, že jsou na nich nezávislé. Tedy zásadně nemohou být v tomto systému axiómů ani vyvráceny, ani dokázány.

V matematice jako celku, která se téměř zplna opírá na teorii množin, vznikla takto — jak to výstižně předpověděli Fraenkel a Bar-Hillel — situace, analogická té, která se vytvořila v geometrii se vznikem neeuklidovské geometrie. Skutečně, podobno tomu, jak se geometrie rozštěpila když bylo dokázáno, že axióm rovnoběžek je nezávislý na ostatních axiómech, stejně i teď došlo do rozštěpení teorie množin a spočívající na ní matematiky na dvě nebo více větví podle toho, zda uznáváme hypotézu kontinua a případně i jiná nevyvratitelná a nedokazatelná tvrzení, nebo jejich opak jako axiómy. Ovšem, jako všechny analogie, i tato není úplná. Vztah mezi euklidovskou a neeuklidovskou geometrií je vztah podřadnosti: euklidovská geometrie a stejně i geometrie Lobačevského jsou zvláštní případy obecné neeuklidovské Riemannovy geometrie. Kdežto teorie množin s hypotézou kontinua jeho axiómem, a teorie množin s axiómem protikladným hypotéze kontinua, nacházejí se ve vztahu souřadnosti, přičemž za dnešního stavu věcí neznáme žádný systém, jenž by obě tyto stejně nerozporné teorie jako své zvláštní případy obsahoval. Kromě toho, když šla řeč o geometrii, bylo rozhodujícím, že naše smyslové orgány a jejich umělá „prodloužení“ nejsou schopny rozhodnout, zda z bodu, ležícího mimo přímku, dá se v jedné rovině s ní sestrojit pouze jedna, nebo snad žádná, nebo nekonečné množství přímek, které by ji neprotínaly. Kdežto teď, když se jedná o matematiku jako celek, nikoliv smyslová percepce, nýbrž naše abstraktní myšlení projevuje neschopnost rozhodnout, zda mezi mohutností spočetné množiny a mohutností kontinua existuje jakási „střední" mohutnost nebo ne. Není tedy ani v principu naděje, že by další zdokonalení experimentální techniky mohlo — jako v případě s geometrií — pomoci tento problém vyřešit.

Ti matematikové a filosofové, kteří zastávají objektivně-idealistické, platonovské neb fenomenologické pojetí matematické pravdy jako reality říše idejí, jsou pochopitelně přesvědčeni, že v této ideální říši existuje jediná pravda, a tudíž může být pouze jedna z různých alternativ pravdivá, ostatní jsou falešné. Proto se snaží najít nějakou novou axiomatiku teorie množin, s nějakými novými, hlubšími pojmy, takovou, která by zabezpečila jednoznačné řešení všech problémů. Opačný, alternativistický názor je subjektivně-idealistický, neboť podřizuje otázku jsoucna otázce pravdy. Je to jakási moderní obdoba averroistického učení o „dvojí pravdě" — náboženské a vědecké. Margenau v USA, Heinemann v Anglii, Portmann ve Švýcarsku, Bar-Hillel v Israeli aj. usuzují o pravdě jako o charakteristice vědomí, a proto pokládají všechny alternativy, pokud jsou logicky nerozporné, za plně pravdivé. Je tedy tolik pravd, kolik je logiků nebo matematiků, podobně tomu jako podle „principu tolerance" v Carnapově „Logische Syntax der Sprache" — od něhož však Carnap již odešel, neboť (stejně jako dříve Reichenbach) se vyvíjí směrem od pozitivismu k materialismu.

Alternativistické pojetí je subjektivistické a filosoficky-relativistické, neprovádí jasné odlišování mezi formální správností a pravdivostí, a nadto se pokouší rozprostranit svou koncepci na všechny vědy, včetně společenských věd a filosofie. Podle něho „každé pojetí je v určitém smyslu správné", ovšem jen pokud je to pojetí pluralistické, čímž — v logickém rozporu s touto větou — se vylučuje monistické pojetí světa (a to nejen idealistické, ale i materialistické), a — vědomě či nevědomě — vyzývá ke konsolidaci idealistických směrů proti materialismu. Proti tomu marxismus chápe tento problém poznání, který s takovou ostrostí byl postaven objevem plurality matematiky, tak, že různé, logicky stejně rovnoprávné. konsistentní druhy matematiky jsou různá jednostranná abstraktní zobrazení objektivní skutečnosti, jsou její jednostranné odrazy. Znovu se zde osvědčuje Leninovo učení o dialektické jednotě jednoty a mnohosti, o konkrétním, historickém charakteru pravdy byť i v té nejabstraknější oblasti poznání. Takové problémy, jako problém hypotézy kontinua, vznikají, protože skutečnost je dialektická nedělitelná jednota přetržitého (diskrétního) a nepřetržitého (kontinuálního), my však nutně vjímáme a chápeme tuto jednotu jednostranně jakoby rozdělenou propastí — v aritmetice jako individuální čísla, v geometrii jako homogenní prostorové útvary (tentýž protiklad mezi individuálním a nediferencovaným je i v našem pojetí času a prostoru vůbec). Zásada, kterou Lenin formuloval v „Materialismu a empiriokriticismu", jež je zaměřena proti dogmatickému zkostnatění, a která hlásá, že dialektický materialismus přesto, že je vědecká filosofie, vycházející ze zevšeobecnění výsledků jednotlivých konkrétních věd, neopomíjející nic z nich, a nepřimýšlející nic k nim, nesmí se dávat spoutat dočasnými přírodovědeckými představami, které vznikají na té či oné historické etapě, nýbrž trvá jedině na nezávislosti materiálního jsoucna na vědomí, a na poznatelnosti podstaty hybné hmoty a jejích projevů, dostává zde, když je aplikována na matematické představy, obzvláštní význam.

Naše filosofie nesmí se vydávat za jakousi „záchrannou stanici“, která — nejčastěji bez kompetentní věcné analýzy problémů, pouhým „nálepkovaním“ — spěchá řešit místo matematiků, fyziků, biologů atd. problémy, které sami dosud neřešili. Nemůže se však rovněž spokojit úlohou pouhé „ozdoby“ na průčelí budovy vědy. Musíme sice ponechat matematikům prozkoumat jaké důsledky se v samotné matematice objeví, když k axiómám teorie množin bude připojena buď axióm kontinua, nebo axióm právě opačný, a vyřešit na základě toho nesmírně obtížnou otázku o vztahu mezi těmito různými matematikami. Avšak jako filosofové můžeme napomáhat řešení tohoto problému tím, že budeme — aktivněji a úspěšněji než jsme to dosud činili — rozpracovávat filosofické pojmy, které leží na rozmezí mezi matematikou a filosofií (jako např. „celek a „část“, „jednota“ a „mnohost“, „individuálnost“ a „nediferencovanost“, „přetržitost“ a „nepřetržitost“, „nekonečnost“, „matematická existence“ atd. (a rovněž metodologickou stránku logických pochodů (např. „definice pomocí abstrakce“, různé druhy matematické indukce a mn. j.). Intensifikace pozornosti naší filosofie k otázkám matematiky je dnes nejen proto nanejvýš aktuální, že v základech matematiky nastoupilo období nového revolučního vzestupu, nýbrž i protože matematicko-logické metody, obzvláště metody matematického modelování, objímají stále nové a nové oblasti věd přírodních, společenských a psychických. Je načase, aby sama marxistická filosofie přešla od pouhého verbálního k exaktnímu formulování a odvozování svých pouček.

K varování proti simplifikačním a spekulativním pokusům řešit „ex cathedra philosophiae“ matematické problémy prohlašováním jedněch hypotéz za „dialektické“ a „materialistické“ a jiných zase za „idealistické“ a „metafyzické“, připojuji upozornění na opačnou chybu. Znechucení dogmatismem, rozšířeným v době Stalinovy teroristické diktatury, a stále ještě beze zbytku nepřekonaným, někteří marxisté přešli do druhého extrému, prohlásili, že prý marxizmus trpí „sklerózou“, chtějí ho „doplnit“ učením existencionalistů, fenomenologistů nebo thomistů, s lehkým srdcem se vzdávají jeho základních koncepcí, např. o nesmiřitelném protikladu mezi náboženskou vírou a vědeckým poznáním, teorie odrazu, učení o stranickosti filosofie, o její třídní podstatě atp. Užito na problém plurality matematiky to znamená, že dříve nebo později se dostanou buď na objektivně — neb na subjektivně-idealistické pozice, nebo na nějakou eklektickou jejich směs — na slepou kolej neplodných spekulací.

Stručné vysvětlení uvedených matematických pojmů

Podle Cantora *množina* je souhrn jakýchkoliv objektů v případě když existuje předpis, podle něhož se dá určit, zda daný objekt k souhrnu patří či nepatří. Je-li souhrn množina pak jeho objekty jsou její *prvky*. Množiny mohou být *konečné* nebo *nekonečné*. Množina, která nemá žádné prvky, je *prázdná*. Množina, sestávající z několika prvků dané množiny, je její *podmnožina*. O dvou množinách, které mají některé prvky společné, říkáme, že se *protínají*.

Jestliže je možné ustavit mezi prvky dvou množin *vzájemně-jednoznačný vztah* (t. j. když podle určitého předpisu každému prvku první množiny odpovídá jeden a pouze jeden prvek druhé množiny a naopak), pak říkáme, že tyto množiny mají stejnou *mohutnost*. Mohutnost *konečné* množiny se rovná počtu jejích prvků, vyjadřuje se (celým kladným) číslem. Množina nekonečné řady přirozených čísel 1, 2, 3, ... nazývá se *spočetná*, její mohutnost se označuje $\aleph_0$ (alef-nula). Je to *nejmenší* nekonečná mohutnost. Je-li množina M nekonečná, a jedině tenkrát, (pok existuje její podmnožina, která má stejnou mohutnost jako množina M (např. množina všech sudých čísel má stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel, ačkoliv množina všech sudých čísel je její podmnožina). Právě tato vlastnost *definuje* nekonečnou množinu.

Cantor dokázal, že mohutnost $\aleph_0$ má i množina všech *racionálních* čísel, t. j. všech zlomků $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou jakákoliv celá čísla. Dokázal však taktéž, že existují nekonečné množiny, jejichž mohutnost je větší než $\aleph_0$ taková je např. množina všech *reálných* čísel (t. j. racionálních a iracionálních), jejíž mohutnost je označována $\aleph$ (alef bez indexu). Trochu „názornější" je geometrická představa. Zobrazíme na úsečce [0,1] jednotkové délky nekonečnou *bodovou* množinu, jejímiž prvky jsou body, jejichž vzdálenosti od počátku úsečky jsou vyjádřeny ryzími zlomky $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ldots$ Tato množina je *všude hustá,* t. j. mezi jakýmkoliv sebe bližšími dvěma body této množiny leží nekonečné množství bodů, jí patrících. Přesto však na úsečce [0,1] existuje nekonečné množství mezer, kde leží body, jejichž vzdálenosti od počátku úsečky jsou vyjádřeny iracionálními čísly, takových bodů je dokonce „více", a to nekonečně mnohokrát více než těch prvních, a teprve tyto body zaplňují úsečku bez mezer, tvoří s prvními *kontinuum.* Cantorova hypotéza tvrdí, že $\aleph$ je nejmenší ze všech mohutností, které jsou větší než $\aleph_0$ že žádná mohutnost „prostřední" mezi nimi neexistuje.

Cantorova antinomie se týká „množiny všech množin". Podle samotné definice této množiny, musí tato množina mít největší možnou mohutnost. S druhé strany však Cantor dokázal, že je-li M jakákoliv množina, která má mohutnost m, pak množína U všech jejích podmnožin má mohutnost u větší než m, totiž $u = 2^m$. Musí tedy množina všech podmnožin množiny všech množin mít mohutnost větší než je mohutnost množiny všech množin, což je rozpor. *Russellova antinomie* se vztahuje na množinu A všech množin N, které neobsahují sebe jako prvek (taková je např. množina všech planet, neboť není planeta; kdežto např. množina všech abstrakcí obsahuje sebe jako prvek, neboť je rovněž abstrakce). Je samozřejmé, že jakákoli množina patří buď k množinám N, nebo k množinám N', které obsahují sebe jako prvek, žádná třetí možnost neexistuje. K jakým množinám — N či N' —patří množina A? Kdyby patřila k množinám N, pak, protože obsahuje veškeré množiny N, musela by být množinou N', což je rozpor. Kdyby však patřila k množinám N', pak by musela obsahovat sebe jako prvek, s tudíž podle definice množiny A, byla by množinou N, což je zase rozpor.

V matematice se rozeznávají *dva druhy nekonečna. Potenciální nekonečno,* např. číselné řady, dané jistým zákonem, které znamená, že počet jejích členů je neomezený, neurčitý, ustavičně může vzrůstat, aspoň pomyslně. *Aktuální nekonečno* pak máme tenkrát, když chápeme tuto řadu nikoliv jako stávající se, nýbrž jako hotový, dovršený celek.

Matematika rozeznává též *dva druhy důkazů.* Jedny *efektivní,* kdy nejen dokazujeme, že jakýsi matematický objekt (např. těžiště trojúhelníka) existuje, nýbrž zároveň ukazujeme způsob, jak tento objekt obdržet, sestrojit, nebo vypočítat. Druhé jsou důkazy *existencionální,* které pouze dokazují, že objekt existuje, aniž by ukazovaly způsob jak ho obdržet. Jsou to důkazy *apagogické,* dokazují že předpoklad o neexistenci tohoto objektu vede k rozporu. Pod *matematickou existenci* se chápe tvrzení, že určitý předpoklad není v rozporu s přijatým systémem axiómů, že se dá z nich aspoň zásadně dedukovat podle určitých přijatých logických pravidel závěru.

Intuicionismus, založený Brouwerem (*efektivismus* je jeho zmírněná odrůda), odmítal aktuální nekonečno a naivní pojetí matematické existence. Neuznával logiku jako vědu, která předchází matematice, neboť pokládal za poslední základ správnosti matematiky tzv. „praintuici", t. j. nepopíratelnou názornou jasnost a zřejmost takových elementárních matematických vět, jako „0 = 0", a takových pojmů, jako přirozená řada číselná. Intuicionistická logika (bez ohledu na rozdíly jejích variant) zavrhovala zákon vyloučeného třetího v tom smyslu, že ze dvou vzájemně se odporujících výroků nemusí být nutně jeden pravdivý. Zavrhoval též zákon zrušení dvojitého záporu, apagogický způsob důkazu a dávala disjunkci, negaci a obecným soudům svou vlastní, omezující interpretaci. Intuicionistické hledisko vedlo k tomu, že mnohé teoreticky a prakticky důležité matematické věty měly být z matematiky vyloučeny. Tato oběť nebyla však vykoupena logickou důsledností, neboť obtíže dokázal existenci nesmírně velikých konečných čísel (jako např. celého čísla, které má počet desetinných míst, vyjádřený číslem, jež má deset miliardů desetinných míst) nejsou o nic menší než obtíže s nekonečnými množinami. Avšak, jak ukázal Kolmogorov, intuicionistická logika se dá interpretovat jako „logika úkolů".

Logicismus, v čele s Russellem, v protikladu k intuicionismu, nesnažil se vyvozovat logiku z matematiky, nýbrž naopak, matematiku z logiky. Nedefinované výchozí matematické pojmy vyjadřoval logickými termíny, všechny matematické pojmy a věty převáděl do jazyku matematické logiky a dokazoval je pomocí jejích pravidel. Neočekávaný konečný výsledek těchto dlouhodobých pokusů byl však ten, že r. 1931 Gödel dokázal *zásadní neúplnost logiky,* která sestává ze systému tautologií, pokládaných za apriorně pravdivé. Jinak řečeno, dokázal, že je nemožné v takovém systému dedukovat všechny obsažné matematické věty a dokázat nerozpornost tohoto systému pomocí logických prostředků, formalizovaných v tomto samotném systému. Dále byla brzy dokázána *nerozhodnutelnost problému rozhodnutelnosti* v takových systémech, a rovněž nemožnost dokázat *axióm nekonečna* (t. j. existenci nekonečných množin) a *axióm reducibility,* který měl vyloučit nebezpečí *bludného kruhu.* Ztroskotání logicismu bylo spojeno především s tím, že místo toho, aby hledal v materiální skutečnosti konkrétní, nebo aspoň méně abstraktní modely, snažil se krajně abstraktní matematické pojmy vyvozovat z pojmů ještě abstraktnějších.

Konvencionalismus, zdůvodňovaný Poincaré, tvrdil, že matematika nemá empirický původ a podklad, nýbrž zakládá se na libovolných smluvených konvencích, zvolených z důvodů pohodlnosti nebo pragmatické užitečnosti. Nedal se však důsledně prosazovat, neboť byl nucen omezit libovůli ve výběru axiómů jejich vzájemnou nerozporností, která však mohla být jedině tenkrát dokázána, když se podařilo ukázat aspoň jednu oblast objektů, pro níž takový systém axiómů měl konkrétní obsažný smysl, a tudíž se ukázalo, že nespornost je závislá na pravdivosti. Stejně neměl štěstí pozdější konvencionalismus Carnapův a Ajdukiewiczův v matematické logice, podle něhož každý matematik má svobodu volby logického systému, omezenou pouze tím, že tento systém musí být „zřetelně a přesně“ formulován. Vždyť „zřetelnost“ a „přesnost“ se nedala určit jinak, než pomocí obsažné logiky, přes verifikaci praxí.

Konečně *formalismus* — škola Hilbertova — hledal východisko z obtíží, které vznikly z antinomií, pokoušeje se formální nerozpornost matematiky dokázat tím, že vykázal obsažnou matematiku do zvláštní oblasti — do *metamatematiky* — jakoby apriorně dané jako speciální schopnost našeho ducha. Hilbert dříve pro důkaz nerozpornosti euklidovy geometrie úspěšně použil aritmetický model (v němž se zúčastnily představy teorie množin), jehož nerozpornost se předpokládala. Tuto svou metodu chtěl použít i zde. Ale v tomto případě, když šlo o nerozpornost matematiky jako celku, bylo nutno dokázat, že rozpory teorie množin nezasahují do správně vedených matematických důkazů. Proto pokládal aktuální nekonečno pouze za symbol, jemuž ve skutečném světě neodpovídá vůbec nic, který však může sloužit jako výpomocný prostředek v konečné oblasti. Sestrojil *finistickou teorii důkazu,* jejímiž objekty jsou pouze konečné množiny symbolů, a pokoušel se dokázat, že matematika, tímto způsobem formalizovaná, nikdy nepřijde k rozporným vzorcům jako „$0 = 1$“. Avšak zmíněný výše Gödelův důkaz, že již teorie elementární aritmetiky přirozených čísel se nedá zplna formalizovat, odhalil nemožnost uskutečnit program formalismu.

Dnešní *konstruktivismus* v matematice a logice, který je budován nezávisle v USA a v Sovětském Svazu (Markovem, Šaniným aj.) — rozdíly se týkají hlavne filosofické interpretace — neuznává abstrakci aktuálního nekonečna, existencionální důkazy, klasické pojetí zákona vyloučeného třetího, líší se však od intuicionismu tím, že zavrhuje pojem „praintuice“ a jiné mystické pojmy, a soutřeďuje se na *algoritmickém* budování jednotlivých (matematických disciplin, v němž dosáhl značných úspěchů. (Pod *algoritmem* se chápe předpis, podle něhož konečným počtem kroků, z nichž každý se skládá z konečných vzorců, se dá vyřešit nekonečné množství jistých stejnorodých úkolů; např. předpis, jak najít největší společný dělitel dvou celých čísel.) *Ultrakonstruktivismus,* jehož zastáncem je Jesenin-Vol'pin, neuznává nejen abstrakci aktuálního, ale i abstrakci potenciálního nekonečna, a žádá, aby každý matematický objekt byl nejen zásadně, ale i skutečně *dosažitelný.*

Ovšem, je zřejmé, že „dosažitelnost“ je *historická,* podmíněná úrovní matematické teorie a počítací techniky. Soudím, že protože matematika má vůbec co dělat pouze s *abstrakcemi*, je rozdíl mezi abstrakcí aktuálního a potenciálního nekonečna, případně i dosažitelnosti, spíše jen *kvantitativní*, než kvalitativní — řeč jde vesměs o abstrakce, *pouze různých úrovní* — a proto rigorózní připouštění jedněch druhů abstrakcí a zamítání jiných, není o nic oprávněnější, než kdybychom se např. stavěli proti komplexním číslům a uznávali pouze čísla reálná, nebo kdybychom uznávali i jen celá kladná čísla a zavrhovali čísla záporná, zlomky, čísla iracionální atp.

ФИЛОСОФСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОТКРЫТИЯ МНОЖЕСТВЕННОСТИ МАТЕМАТИК

А. Кольман

Идеалистическая философия издавна пыталась использовать математику для своих целей, однако развитие последней всякий раз лишало ее этой опоры.

Кризис основания математики на рубеже века был вызван неограниченностью понимания понятия „множество" и некритическим переносом логики, возникшей как абстрактное отражение отношений в конечном, на бесконечное. Возникшие математические школы не смогли дать логикофилософского обоснования математики, ибо понимали ее идеалистически, и абсолютизировали метафизически проблему ее непротиворечивости.

Не меньше чем чрезмерная широта понятия „множество" имела значение узость аксиом теории множеств, препятствовавшая решению ряда важных проблем, как-то: полной упорядоченности, свободного выбора, а в особенности континуума. Недавнее открытие независимости этих теорем от остальных аксиом теории множеств создало для математики как целого положение, аналогичное тому, которое возникло в геометрии с созданием неевклидовых геометрий. Вместо одной, единственной математики, мы имеем теперь множественность одинаково непротиворечивых математик.

Ни объективно-, ни субъективно-идеалистическое понимание математики не оказалось способным справиться с фактом множественности математик, между тем как он вновь подтвердил материалистически-диалектическую теорию отражения, согласно которой арифметика и геометрия — это два односторонних, неполных абстрактных отображения отношений материального мира, образующих в нем неотделимое единство прерывного и непрерывного.

Вместе с тем подтверждается важный, выдвинутый Лениным принцип познания: наша философия не должна связывать себя временными представлениями материи, пространства, времени, причинности и т. д., полученными отдельными науками, но будучи научной философией, опираясь единственно на обобщения их результатов, она связана все же только тем, что признает независимость материальной действительности от сознания и ее познаваемость.

THE DISCOVERY OF PLURALITY OF MATHEMATICS AND ITS PHILOSOPHICAL SIGNIFICANCE

Arnošt Kolman

Idealistic philosophy has been trying since long ago to utilize mathematics for its aims, but the development of the latter deprives it every time of this support.

The crisis of the foundations of mathematics at the beginning of our century was provoked

by the unrestricted interpretation of the concept of „set" and by the uncritical transference of logic which arose as an abstract reflection of relations in the finite into the infinite. Mathematical schools which came into being were not capable to provide a logico-philosophical foundation of mathematics because they comprehended it idealistically and gave the problem of its consistency an absolute metaphysical meaning.

The narrowness of the axioms of the set theory was not less important than the excessive breadth of the concept of set; this narrowness hindered the solution of many important problems such as: well-ordering principle, Auswahlsprinzip, and especially the continuum-problem. The recent discovery of the independence of these theorems of the rest of the axioms of the set theory yielded in mathematics as a whole a situation analogous to that one which arose in geometry with the creation of non-Euclidean geometries. In the place of one unique mathematics we are faced now with a plurality of equally consistent mathematics.

Neither objective- nor subjective-idealistic comprehension of mathematics is capable to cope with the fact of plurality of mathematics, while it corroborates again the materialistic-dialectical theory of reflection according to which arithmetic and geometry are two one-sided, incomplete abstract reflections of the material world, which forms in it an inseparable unity of the discrete and the continuous.

At the same time, an important principle of cognition is confirmed, advanced by Lenin: our philosophy ought not bind itself by the provisional notions of matter, space, time, causality etc. as obtained by special sciences, but being a scientific philosophy which leans solely upon the generalizations of their results, it is bound nevertheless only by the acknowledgement of the independence of the material reality of consciousness and its cognoscibility.