# ÚVOD DO FORMÁLNEJ LOGIKY

PAVEL CMOREJ

## III

2.3 **Funktory.** V tejto časti sa budeme zapodievať viacerými kategóriami jazykových výrazov. Ľubovoľný výraz, ktorý patrí do niektorej z týchto kategórií, sa nazýva funktor. Aby sme mohli presnejšie určiť, ktoré výrazy sú funktory a do ktorej funktorovej kategórie patria, musíme najprv vymedziť niekoľko pomocných termínov. Hoci predpokladáme, že pojem funkcie nie je čitateľovi neznámy, uvedieme tu jeho definíciu, pretože v úvahách o funktoroch hrá veľmi dôležitú úlohu.

Nech $M$ a $N$ sú nejaké množiny (nie je vylúčené, že $M = N$).[28] Pod *funkciou jednej premennej* (*jednomiestnou funkciou*) definovanou na množine $M$ s funkčnými hodnotami z $N$ sa rozumie taký vzťah $R$, ktorým je každému prvku z $M$ priradený práve jeden prvok z množiny $N$. Presnejšie, vzťah $R$ je funkciou jednej premennej, keď ku každému prvku $x$ z množiny $M$ existuje v $N$ presne jeden prvok $y$ taký, že $x$ je vo vzťahu $R$ k $y$. Hovorí sa tiež, že funkcia $R$ je *zobrazením* (alebo zobrazuje) množina $M$ do množiny $N$. Množina $M$ sa nazýva *oborom definície funkcie* $R$ alebo aj *množinou* jej *argumentov*. Množina všetkých tých prvkov $y$ z množiny $N$, ktoré sú funkciou $R$ priradené prvkom $x$ z $M$ sa nazýva *množinou funkčných hodnôt* funkcie $R$. Jednomiestnou funkciou je napr. vzťah, ktorým je každému zápornému celému číslu $x$ priradené celé kladné číslo $y = x^2$.

Ľubovoľnú usporiadanú $n$-ticu prvkov $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ budeme označovať symbolom $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ a $x_1$ nazývať jej prvým *členom*, $x_2$ jej druhým členom, ... a $x_n$ $n$-tým členom tejto $n$-tice. Predpokladáme, že pojem usporiadanej $n$-tice prvkov je intuitívne jasný. Jednu zo základných vlastností usporiadaných $n$-tíc charakterizuje táto veta: $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle z_1, z_2 \ldots, z_n \rangle$ vtedy a len vtedy

[28] Vo vymedzení funkcie sa vyskytuje termín „*množina*", ktorý sme na niekoľkých miestach už použili (predpokladáme, že v daných kontextoch bol jeho význam dostatočne jasný). Veľmi voľne možno množinu charakterizovať ako súhrn alebo súbor nejakých objektov (pravda, to nie je nijaká definícia). Množinou je napr. súhrn všetkých prvočísel, súhrn kníh v nejakej knižnici alebo súhrn tipujúcich v poslednom stávkovom týždni roku 1966. V tom istom význame ako termín „množina" sa niekedy používa výraz „*trieda*" (ale v niektorých novších variantoch teórie množín sa tieto termíny chápu odlišne, čo v našom výklade robiť nebudeme). Ak nejaký objekt $x$ patrí do množiny $M$, hovoríme tiež, že $x$ je *prvkom* množiny $M$ a symbolicky to zapisujeme takto: $x \varepsilon M$. Množina s konečným počtom prvkov sa nazýva *konečná* a množina s nekonečným počtom prvkov — *nekonečná*. Medzi konečné množiny patrí aj tzv. *prázdna* množina, ktorá nemá ani jeden prvok. Množina, ktorá má presne jeden prvok, nazýva sa *jednotková*. Napr. prázdna je množina slovenských miliónových miest a jednotková — množina párnych prvočísel. Množina, ktorá obsahuje práve prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa často označuje symbolom $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Množina $M$ je *podmnožinou* množiny $N$ (symbolicky $M \subset N$) vtedy a len vtedy, keď každý prvok množiny $M$ patrí do $N$. $M = N$ práve vtedy, keď $M \subset N$ a $N \subset M$. $M$ je *pravou podmnožinou* $N$, vtedy, keď $M \subset N$ a $M \neq N$. Ďalšie pojmy zavedieme v prípade potreby neskôr.

keď $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$, ..., $x_n = z_n$. Z toho vyplýva, že napr. ak $x_1$ a $x_2$ sú rôzne prvky, $\langle x_1, x_2\rangle \neq \langle x_2, x_1\rangle$, hoci $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$. Nech $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ ($n \geqq 2$) je ľubovoľná usporiadaná $n$-tica prvkov, pre ktoré platí, že $x_1 \varepsilon M_1$, $x_2 \varepsilon M_2$, ..., $x_n \varepsilon M_n$, pričom $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$ sú nejaké množiny (niektoré z nich, ba dokonca i všetky, môžu byť totožné). $N$ nech je nejaká množina, ktorá môže byť totožná s niektorou alebo i s každou z množín $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$ (samozrejme, v druhom prípade platí, že $M_1 = M_2 \ldots = M_n = N$). Vzťah, ktorým je ľubovoľnej usporiadanej $n$-tici $\langle x_1, x_2, \ldots x_n\rangle$ priradený presne jeden prvok z $N$, nazýva sa *funkciou n premenných* (*n-miestnou funkciou*). Oborom definície $n$-miestnej funkcie je množina *všetkých* usporiadaných $n$-tíc $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, pričom $x_1 \varepsilon M_1$, $x_2 \varepsilon M_2$, ..., $x_n \varepsilon M_n$. Príkladom dvojmiestnej funkcie je napr. funkcia, ktorá ľubovoľnej usporiadanej dvojici celých čísel $\langle x_1, x_2\rangle$ priraďuje celé číslo $y = x_1 - x_2$ (množinou $M_1$, $M_2$, $N$ je množina celých čísel, teda $M_1 = M_2 = N$).

Jednomiestne i viacmiestne funkcie, ktoré sme práve vymedzili, sú špeciálnym prípadom tzv. *čiastočných funkcií*. K týmto funkciám nepatria iba tie, ktoré každému prvku $x$ z $M$, resp. každej usporiadanej $n$-tici $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ prvkov $x_1 \varepsilon M_1$, $x_2 \varepsilon M_2$, ..., $x_n \varepsilon M_n$ priraďujú nejaký prvok $y$ z $N$, ale aj funkcie, ktoré iba niektorým prvkom z $M$, resp. iba niektorým usporiadaným $n$-ticiam $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, priraďujú nejakú funkčnú hodnotu $y$ z $N$. Keď budeme ďalej hovoriť o $n$-miestnych funkciách ($n \geqq 1$), budeme brať do úvahy aj čiastočné funkcie, ktoré iba niektorých prvkom $x$ z $M$, resp. iba niektorým usporiadaným $n$-ticiam $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ ($n \geqq 1$; ak $n = 1$, $\langle x_1\rangle = x_1$) priraďujú nejaký prvok $y$.

Množina $M$ v prípade jednomiestnej a niektorá z množín $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$ (alebo aj všetky)[29] v prípade $n$-miestnej funkcie môže byť množinou $m$-miestnych funkcií ($m \geqq 1$). To isté platí aj o množine funkčných hodnôt $N$. S týmito druhmi funkcií sa operuje najmä v abstraktnejších matematických a logických štúdiách. Pre naše úvahy majú význam predovšetkým funkcie, ktoré dostaneme tak, že za množinu $M$, $M_1$, ..., $M_n$ a $N$ si zvolíme univerzum nejakého jazyka alebo množinu pravdivostných hodnôt, prípadne množinu niektorých z týchto funkcií a podobne. Aby sme získali presnejší a úplnejší prehľad o týchto funkciách, rozdelíme ich do určitých tried, ktoré budeme nazývať *typmi* týchto funkcií. Budeme pritom vychádzať z toho, že určitý typ objektov, odlišný od typov funkcií, tvoria aj indivíduá a rovnako i pravdivostné hodnoty. Toto delenie funkcií, indivíduí a pravdivostných hodnôt na určité typy urobíme pomocou tzv. *typových symbolov*, ktorými budeme jednotlivé typy objektov označovať.

Najprv určíme, ktoré symboly sú typové. Pri ich konštrukcii budeme používať tieto symboly: $i$, $v$, /, (,). [1] Najjednoduchšími typovými symbolmi sú písmená $i$ a $v$. [2] Ak $\alpha$, $\beta_1$, $\beta_2$, ..., $\beta_n$ ($n \geqq 1$) sú nejaké typové symboly, aj $(\alpha)/((\beta_1)(\beta_2)\ldots(\beta_n))$ je typový symbol. Podmienkami [1] a [2] sú vymedzené všetky typové symboly. Písmená $\alpha$, $\beta_1$, $\beta_2$, ..., $\beta_n$ v podmienke [2] nám reprezentujú ľubovoľné typové symboly, ale samy typovými symbolmi nie sú. Pretože $i$ a $v$ sú typové symboly, aj $(i)/((v))$, $(v)/((i))$, $(v)/((v)(v))$, $(v)/((v)(i))$ atď. sú

[29] Pozri vymedzenie jednomiestnej a $n$-miestnej funkcie.

typové symboly a teda aj $((i)/((v)))/((v)/((i)))$, $((v)/((v)(v)))/((v)/((v)(i)))$ a podobne. Keďže dôsledné používanie všetkých zátvoriek je dosť nepohodlné i neprehľadné, pri uvádzaní konkrétnych typových symbolov (aj ich schém konštruovaných pomocou písmen $\alpha$, $\beta$, $\beta_1$, ..., $\beta_n$) budeme niektoré zátvorky vynechávať. Pôjde o zátvorky, ktoré možno vynechať bez toho, že by tým utrpela jednoznačnosť typových symbolov. Napr. posledný z uvedených typových symbolov možno zapísať aj takto: $(v/vv)/(v/vi)$.[30]

Nech $U$ je neprázdne univerzum nejakého jazyka $J$ a $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$ množina pravdivostných hodnôt. Na množine $U$ (alebo na podmnožinách $U$) a $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$ možno definovať rôzne funkcie. Z týchto množín možno vychádzať pri definovaní rozmanitých viacmiestnych funkcií. Na množinách týchto funkcií možno definovať ďalšie funkcie s hodnotami v $U$, v $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$ alebo v množine nejakých funkcií, o ktorých sme sa už zmienili atď. Teraz rozčleníme všetky tieto objekty (indivíduá, pravdivostné hodnoty a funkcie) na určité typy. Na označenie jednotlivých typov objektov použijeme typové symboly. Objekty typu, ktorý budeme označovať typovým symbolom $\alpha$, budeme nazývať *objektami typu* $\alpha$. Rôznym typovým symbolom priraďujeme rôzne typy objektov a naopak. To znamená, že ak $\alpha$ a $\alpha'$ sú dva rôzne typové symboly, objekty typu $\alpha$ a objekty typu $\alpha'$ budeme pokladať za objekty rôznych typov. Ľubovoľnému typovému symbolu $\alpha$ priradíme zodpovedajúci typ objektov tak, že určíme, ktoré objekty sú objekty typu $\alpha$:

(i) Ľubovoľné indivíduum z $U$ je objekt typu $i$.

(ii) Pravdivostné hodnoty sú objekty typu $v$.

(iii) Ak $f$ je funkcia, ktorá objektom typu $\beta$ priraďuje objekty typu $\alpha$, potom $f$ je objekt typu $\alpha/\beta$. Nech $f$ je nejaká $n$-miestna ($n \geqq 2$) funkcia, ktorá usporiadaným $n$-ticiam $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ priraďuje objekty typu $\alpha$, pričom $x_1$ je objekt typu $\beta_1$, $x_2$ objekt typu $\beta_2$, ... a $x_n$ objekt typu $\beta_n$. Potom $f$ je objekt typu $\alpha/\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$.[31]

Je zrejmé, že funkcia $f$ typu $\alpha/\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$ má ten istý typ (resp. je toho istého typu) ako funkcia $f'$ typu $\alpha'/\beta'_1\beta'_2 \ldots \beta'_m$ vtedy a len vtedy, keď $n = m$ a $\alpha = \alpha'$, $\beta_1 = \beta'_1, \ldots, \beta_n = \beta'_m$.

Nech $U$ je univerzum jazyka aritmetiky prirodzených čísel. Potom ľubovoľné prirodzené číslo je objekt typu $i$. Funkcia, ktorá ľubovoľnému prirodzenému číslu $x$ priraďuje číslo $x^2$ je funkciou typu $i/i$. Typu $i/ii$ je napr. funkcia, ktorá usporiadaným dvojiciam prirodzených čísel priraďuje ich súčet (alebo rozdiel). Funkcia, ktorá každému prvočíslu priraďuje pravdivostnú hodnotu $\mathbf{P}$ a ostatným prirodzeným číslam pravdivostnú hodnotu $\mathbf{N}$ je funkciou typu $v/i$ atď. Pre funkcie, o ktorých tu uvažujeme, je charakteristické to, že množiny $M, M_1, \ldots, M_n$, na ktorých sa tieto funkcie definujú, resp. z ktorých sa pri ich definovaní vychádza (v prípade viacmiestnych alebo ľubovoľných čiastočných funkcií), i množina funkčných hod-

---

[30] Prehľadnejší je zápis v tvare zlomku, zavedený K. Ajdukiewiczom v jeho článku *Die syntaktische Konnexität*. Studia Philosophica I 1935, 1—27 (pozri tiež *Język i poznanie* I, Warszawa 1960, 222—242). Z typografických dôvodov tento zápis nepoužívame.

[31] Podotýkame, že symbol $\alpha/\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$ nám reprezentuje rôzne typové symboly.

nôt $N$ sú množiny objektov *jedného* typu (či už indivíduí, pravdivostných hodnôt alebo funkcií).[32]

Predpokladajme, že typovým symbolom $i$ a $v$, z ktorých sa skladá každý typový symbol formy $\alpha/\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ ($n \geqq 1$), je priradená určitá množina objektov typu $i$ (konkrétne univerzum $U$) a množina pravdivostných hodnôt $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$ — objektov typu $v$. Tým je každému typovému symbolu formy $\alpha/\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ priradená určitá množina funkcií typu $\alpha/\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$. Každú funkciu, ktorá patrí do niektorej z týchto množín, budeme nazývať *funkciou nad* $U$; $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$.

Teraz môžeme presne určiť, ktoré výrazy nejakého jazyka $J$ sú funktory. **Funktory** sú také výrazy jazyka $J$ s univerzom $U$, ktoré denotujú funkcie nad $U$; $\{\mathbf{P}, \mathbf{N}\}$. Ľubovoľné dva funktory jazyka $J$ patria do tej istej syntaktickej kategórie vtedy a len vtedy, keď denotujú funkcie toho istého typu. (Individuálne názvy by sme teraz mohli charakterizovať ako výrazy, ktoré denotujú objekty typu $i$ a výroky ako výrazy denotujúce objekty typu $v$.)

Funktormi v jazyku aritmetiky prirodzených čísel sú napr. tieto výrazy: $+$, $.$, $<$, $>$, a, alebo. Funktory „$+$" a „$.$" denotujú funkcie, ktoré usporiadaným dvojiciam prirodzených čísel priraďujú ich súčet, resp. súčin. Pretože tieto funkcie majú ten istý typ $i/ii$, funktor „$+$" patrí do tej istej syntaktickej kategórie ako funktor „$.$". Funkcie, ktoré sú denotátmi ďalších dvoch funktorov „$<$", „$>$" priraďujú každej usporiadanej dvojici prirodzených čísel nejakú pravdivostnú hodnotu; sú to funkcie typu $v/ii$. Funkcia, ktorá je denotátom funktora „$<$" („$>$"), priraďuje dvojici $<x_1, x_2>$ hodnotu $\mathbf{P}$ práve vtedy, keď $x_1 < x_2$ ($x_1 > x_2$), v ostatných prípadoch im priraďuje hodnotu $\mathbf{N}$. Funktory „$<$", „$>$" patria do tej istej syntaktickej kategórie. Funktory „a", „alebo" denotujú funkcie, ktoré ľubovoľnej dvojici pravdivostných hodnôt priraďujú určitú pravdivostnú hodnotu. Funkcia, ktorú denotuje funktor „a" priraďuje dvojici $\langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle$ hodnotu $\mathbf{P}$ a ostatným dvojiciam hodnotu $\mathbf{N}$. Denotátom funktora „alebo" je funkcia, ktorá dvojici $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle$ priraďuje hodnotu $\mathbf{N}$, ostatným dvojiciam hodnotu $\mathbf{P}$. Obidve funkcie majú ten istý typ $v/vv$, a preto funktory „a", „alebo" patria do tej istej syntaktickej kategórie.

Teraz si všimneme funktory z iného hľadiska. Už vieme, že napr. funktor „$+$" denotuje funkciu, ktorá usporiadanej dvojici $\langle 2,3 \rangle$ priraďuje číslo 5 a funktor „a" funkciu, ktorá dvojici pravdivostných hodnôt $\langle \mathbf{P}, \mathbf{N} \rangle$ priraďuje hodnotu $\mathbf{N}$. V jazyku aritmetiky prirodzených čísel existujú výrazy, ktoré denotujú jednotlivé členy týchto usporiadaných dvojíc, napr. „2", „3", „$2 + 2 = 4$", „$2.2 = 5$".[33]

[32] Pozri vymedzenie jednomiestnej a $n$-miestnej funkcie.

[33] Pozor na rozdiel medzi číslom 2 a číslicou „2", číslom 3 a číslicou „3" atď. Číslo 2 je určitý abstraktný objekt, číslica je znak (názov), ktorému je číslo 2 priradené ako jeho denotát. Keď hovoríme o jazykových výrazoch, dávame ich obyčajne do úvodzoviek alebo kladieme pred ne také slová ako „symbol", „individuálny názov", „výrok", „jazykový výraz" a podobne. Často dávame do úvodzoviek aj výrazy, pred ktorými stojí niektoré z uvedených slov. Upozorňujeme na rozdiely medzi týmito výrazmi: Bratislava, „Bratislava", výraz Bratislava (alebo výraz „Bratislava"), „„Bratislava"". Kým prvý výraz denotuje hlavné mesto Slovenska, druhý a tretí denotujú meno tohto mesta a posledný meno mena tohto mesta.

Keď k funktoru „+" zľava pripíšeme individuálny názov „2" a sprava individuálny názov „3", dostaneme zložený individuálny názov „2 + 3", ktorý denotuje číslo 5, t. j. číslo, ktoré dvojici $\langle 2,3 \rangle$ priraďuje funkcia zodpovedajúca funktoru „+". Z funktora „a" a výrokov „2 + 2 = 4", „2.2 = 5", podobne získame výrok „2 + 2 = 4 a 2.2 = 5", ktorý denotuje hodnotu **N**, teda hodnotu, ktorú denotát funktora „a" priraďuje dvojici $\langle \mathbf{P}, \mathbf{N} \rangle$. Pokúsme sa naznačenú vlastnosť funktorov charakterizovať všeobecnejšie.

Nech $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sú nejaké výrazy jazyka $J$ (s univerzom $U$) a $\Phi$ ľubovoľný funktor, ktorý denotuje nejakú funkciu $f$ typu $\alpha/\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ $(n \geq 1)$. Nepredpokladáme, že ľubovoľné dva výrazy $w_i$, $w_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sú rôzne. *Správne* utvorený výraz, ktorý dostaneme v jazyku $J$ spojením funktora $\Phi$ s výrazmi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (v tomto poradí) budeme označovať symbolom „$\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$".[34] Poradie, v akom sa výrazy $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vyskytujú vo výraze $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, je veľmi dôležité. Keby sme výrazy $w_1, w_2, \ldots, w_n$ spojili s funktorom $\Phi$ v inom poradí, v mnohých prípadoch by sme dostali iný výraz (ktorý môže mať iný denotát ako výraz $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w\ )$) alebo i nezmysel. Predpokladajme, že $w_1$ je výraz, ktorý denotuje objekt $x_1$, $w_2$ výraz, denotujúci objekt $x_2$, ... a $w_n$ výraz, denotujúci objekt $x_n$. Potom platí, že ak funkcia $f$, ktorá je denotátom funktora $\Phi$, priraďuje usporiadanej $n$-tici $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ objekt $y$, výraz $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, ktorý vznikne spojením funktora $\Phi$ s výrazmi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ v tomto poradí, denotuje objekt $y$.

Skutočnosť, že každý funktor tvorí spolu s inými vhodne zvolenými výrazmi nový výraz, ktorý denotuje niektorú z funkčných hodnôt funkcie, priradenej ako denotát príslušnému funktoru, súvisí aj s určitými syntaktickými vlastnosťami funktorov. Týmito vlastnosťami sa budeme podrobnejšie zaoberať v 2.4. Teraz si trochu dôkladnejšie všimneme niekoľko najdôležitejších a najčastejšie používaných druhov funktorov.

Prakticky v každom jazyku sa vyskytujú funktory, ktoré denotujú funkcie typu $v/v$ a $v/vv$. Tieto funktory sa niekedy nazývajú *výrokovými* (vetnými) *spojkami* alebo *výrokotvornými časticami*. Patria k nim napr. tieto výrazy: „nie je pravda, že ...", „ak..., tak---", „...a---", „... alebo---", „... vtedy a len vtedy, keď---" a iné (miesta „...", „---" naznačujú spôsob spojenia týchto funktorov s inými výrazmi v slovenskom grafickom jazyku; vyplnením týchto miest nejakými vý-

---

[34] Tvar výrazu utvoreného spojením funktora $\Phi$ s nejakými výrazmi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ závisí od špecifických vlastností jazyka $J$, do ktorého uvedené výrazy patria. V umelých jazykoch má tento výraz pomerne často tvar $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Keď $\Phi$ denotuje dvojmiestnu funkciu, spájame ho s výrazmi $w_1$, $w_2$ obyčajne takto: $w_1 \Phi w_2$ (napr. „2+3", „2 < 3", „2+3 = 4 a 2.2 + 5" atď.) Rozdiel medzi výrazmi „2 < 3" a „3 < 2" poukazuje na význam poradia, v akom výrazy $w_1, w_2, \ldots, w_n$ spájame s funktorom $\Phi$. S niektorými inými spôsobmi spájania funktora $\Phi$ s výrazmi $w_1, w_2, \ldots, w_n$, používanými najmä v prirodzených jazykoch, príležitostne sa zoznámime neskôr.

Pod spojením funktora $\Phi$ s výrazmi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ v jeden výraz $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ budeme vždy rozumieť spojenie, vytvárajúce výraz, ktorý je v príslušnom jazyku správne utvorený a v ktorom sa výrazy $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vyskytujú v tom istom poradí, v akom ich uvádzame vo výraze $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

rokmi získame nové výroky). Keď niektorý z uvedených funktorov spojíme s príslušným počtom výrokov, dostaneme nový výrok, napr. „Nie je pravda, že $2.2 = 5$", „$2+2 = 5$ alebo $2+2 = 4$" atď. Pravdivostná hodnota tohto výroku závisí do pravdivostných hodnôt čiastkových výrokov a od toho, akú funkciu denotuje použitý funktor.[35] Funktormi tohto druhu sa budeme podrobne zaoberať vo výrokovej logike.

Mnohí autori označujú termínom „funktory" iba výrazy, ktoré denotujú funkcie typu $i/i$, $i/ii$, . . ., $i/ii \ldots i$. S niektorými funktormi tohto druhu, vyskytujúcimi sa v jazyku aritmetiky, sme sa už zoznámili. V jazykoch matematických disciplín je ich veľmi mnoho. Patria k nim napr. tieto výrazy: „ — " (rozdiel), „:" (podiel), „!" (faktoriál), „′" (nasledovník), „sin", „cos", „tg", „cotg", „| |" (absolútna hodnota) atď. V mnohých jazykoch zodpovedajú niektorým z týchto funktorov funkcie, ktoré iba niektorým indivíduám, resp. iba niektorým usporiadaným dvojiciam indivíduí priraďujú nejaké funkčné hodnoty. Napr. v jazyku aritmetiky prirodzených čísel funktor „ — " denotuje funkciu, ktorá dvojiciam $\langle x_1, x_2 \rangle$, pre ktoré platí, že $x_1 < x_2$, nepriraďuje nijakú hodnotu.

V určitých úvahách možno za funktory (slovenského prirodzeného jazyka) denotujúce funkcie typu $i/i$ pokladať také výrazy ako „otec", „matka", „manželka", „vrah" a podobne. Keď niektorý z týchto výrazov spojíme s menom nejakého človeka, dostaneme individuálny názov, napr. „matka J. Kráľa", „otec Napoleona", „manželka Sokrata", „vrah J. F. Kennedyho".[36] Ale tie isté výrazy možno v kontexte inej úvahy chápať ako výrazy inej syntaktickej kategórie.[37]

Veľmi dôležitý druh výrazov tvoria funktory, ktoré denotujú funkcie typu $v/i$, $v/ii$, . . ., $v/ii \ldots i$. Tieto funktory sa nazývajú **predikáty** (presnejšie, predikáty prvého stupňa). Rozoznávame jednomiestne, dvojmiestne, . . . a $n$-miestne predikáty; jednomiestne predikáty denotujú jednomiestne funkcie typu $v/i$, dvojmiestne predikáty dvojmiestne funkcie typu $v/ii$, . . . a $n$-miestne predikáty $n$-miestne funkcie typu $v/ii \ldots i$ (kde symbol $i$ sa vyskytuje $n$-krát). Pretože predikáty denotujú funkcie, ktoré usporiadaným $n$-ticiam indivíduí priraďujú pravdivostné hodnoty, spojením $n$-miestneho predikátu s príslušným počtom individuálnych mien vznikne výrok, t. j. výraz, ktorý denotuje objekt **P** alebo **N**.[38]

---

[35] Niektoré z uvedených funktorov nie sú v slovenčine jednoznačné, čo sa vzťahuje na funktor „ak . . ., tak ---", „. . . a ---" a „. . . alebo ---". Funktory „a", „alebo" nespájame len s výrokmi, ale aj s inými výrazmi, ktoré denotujú objekty iného typu ako výroky. V slovenskom jazyku môžeme s funktormi „a", „alebo" spojiť napr. výrazy „červený", „čierny" a tak získať „červený a čierny", „červený alebo čierny". V podobných kontextoch majú výrazy „a", „alebo" iný denotát (a teda aj iný význam), ako keď ich spájame s výrokmi. Funktor „alebo" je mnohoznačný aj v kontextoch, v ktorých je spojený s výrokmi, ale o tom, ako aj o mnohoznačnosti funktora „ak . . ., tak ---", budeme hovoriť neskôr.

[36] Pravda, nie vždy bude mať denotát individuálny názov formy „manželka *XY*-na", „vrah *XY*-na" (keď univerzom jazyka bude napr. množina všetkých ľudí).

[37] Pozri pozn. 16.

[38] Keď však predikát $\Phi$ denotuje funkciu, ktorá usporiadanej $n$-tici $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ nepriraďuje nijakú funkčnú hodnotu, a $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sú výrazy, denotujúce objekty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sporné, či výraz $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ je výrok. Tento výraz nemá totiž nijaký denotát (nie je v danom jazyku ani pravdivý ani nepravdivý), a výrok je podľa nášho vymedzenia výraz, ktorý denotuje pravdu alebo nepravdu. Obdobný problém vzniká aj pri individuálnych názvoch;

V prirodzenom jazyku tvoria predikáty veľmi pestrú a bohatú skupinu rôznych zvratov (často neúplných), ktoré v spojení s určitým počtom individuálnych mien tvoria oznamovacie vety, výroky. Jednomiestnymi predikátmi sú napr. tieto výrazy: „. . . je spisovateľ", „. . . je filozof", „. . . je chudobný", „. . . plače", „. . . uteká" a podobne. Medzi viacmiestne predikáty môžeme zaradiť napr. tieto výrazy: „. . . je väčší ako . . .", „. . . je deliteľom . . .", „. . . nenávidí . . .", „. . . číta . . .", „leží medzi . . . a . . .", „. . . je drzý k . . ." (miesta „. . ." tu tiež poukazujú na spôsob spojenia týchto funktorov s individuálnymi menami v slovenskom prirodzenom jazyku). Keď ktorýkoľvek z uvedených výrazov spojíme s príslušným počtom individuálnych mien, dostaneme výrok. I na uvedených príkladoch vidno, že gramatický tvar a štruktúra predikátov prirodzeného jazyka ako aj spôsob ich spojenia s individuálnymi menami je silne podmienený mimologickými zvláštnosťami jazyka, do ktorého predikáty patria. Z tohto dôvodu budeme od konkrétnej gramatickej podoby jednotlivých predikátov odhliadať a namiesto všelijakých zvratov prirodzeného jazyka často používať iba predikátové symboly a rôzne skratky (napr. zvrat „. . . leží medzi . . . a . . ." môžeme nahradiť predikátovým symbolom „$L$"). Ľubovoľný výrok, ktorý vznikne spojením predikátu $\Phi$ s individuálnymi menami $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (v tomto poradí) budeme zapisovať obyčajne takto: $\Phi(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. V prípade dvojmiestneho predikátu dáme niekedy prednosť zaužívanejšiemu spôsobu: $w_1 \Phi w_2$. Napr. výrok „Nitra leží medzi Bratislavou a Košicami" môžeme v tomto zápise (a za predpokladu, že symbolu „$L$" sme priradili ako denotát funkciu, ktorá zodpovedá výrazu „. . . leží medzi . . . a . . .") zaznamenať takto: $L$ (Nitra, Bratislava, Košice).[39]

*Pokračovanie*

---

nepriamo sme naň narazili v pozn. 15, kde sme uviedli, že niekedy budeme za mená pokladať aj výrazy, ktoré nemajú nijaký denotát, ale svojou syntaktickou stavbou spĺňajú všetky podmienky kladené na mená príslušnej syntaktickej kategórie. To, čo sme uviedli v pozn. 15 o individuálnych menách, vzťahuje sa i na výroky. Aby sme ďalší výklad príliš nekomplikovali, budeme abstrahovať od predikátov, ktoré denotujú funkcie, priraďujúce nejakú pravdivostnú hodnotu len niektorým $n$-ticiam indivíduí.

[39] V tomto zápise uvádzame všetky individuálne mená v prvom páde. Spôsob čítania výroku „$L$(Nitra, Bratislava, Košice)" je totiž jednoznačne určený poradím individuálnych mien, ktoré sa nachádzajú v zátvorke za predikátom. Ľubovoľný výrok formy $L(w_1, w_2, w_3)$ čítame takto: $w_1$ leží medzi $w_2$ a $w_3$. V slovenčine často vyjadrujeme pádovými príponami to, čo v logike (a do určitej miery aj v niektorých prirodzených jazykoch) pevne stanoveným poradím.

*Oprava:*

V druhom pokračovaní *Úvodu do formálnej logiky,* uverejnenom v 6. čísle Filozofie, roč. XXII (1967), sú tieto tlačové chyby: na str. 658 v poslednom riadku má byť namiesto slova „univerzite" slovo „univerza" a na str. 660 v treťom riadku zhora namiesto „nepravdivého" výraz „pravdivého".

*R.*