

Predstavte si, že nejaký nešťastník je vám dlžný 10 000 Kčs, ktoré od neho už roky bezvýsledne vymáhate a že na vaše posledné naliehanie vám pošle lístok s prísľubom „Tento mesiac dlh splatím a tento mesiac dlh nesplatím“. Zaiste by vám tým spôsobil radosť, s ktorou by ste sa pravdepodobne zdôverili prokurátorovi, alebo by ste onomu nešťastníkovi odporúčali, aby vo vlastnom i vašom záujme čím prv navštívil psychiatra.

Všimnime si daný sľub trochu dôkladnejšie. Je zrejmé, že bez ohľadu na to, či onen nešťastník svoj dlh v sľúbenom mesiaci vyrovná alebo nie, svoj sľub nikdy nesplní, pretože nie je možné tú istú vec aj urobiť aj neurobiť, ako nie je možné tú istú vlastnosť mať aj nemať, ako nie je možné v nejakom vzťahu byť aj nebyť a podobne. Žiadna veta typu „To a to urobím a neurobím“, „To a to danú vlastnosť má aj nemá“ atď. nie je pravdivá, a preto nemôže byť pravdivý (a teda ani splniteľný) ani dlžníkov sľub. Nájdú sa čitatelia, ktorí nebudú s týmto názorom celkom súhlasiť. Na podporu svojho stanoviska budú môcť uviesť ne jeden citát z filozofie, literatúry (alebo literárnej kritiky) i z dennej tlače, kde sa formulácie uvedeného typu často s obľubou používajú a dokonca sa vydávajú za pravdivé. Nemožno povedať, že by uvedený spôsob vyjadrovania bol vonkoncom neprípustný, treba si však uvedomiť, za akých podmienok možno tieto tzv. paradoxné výroky chápať ako pravdivé.

Aby sme tieto podmienky mohli stanoviť a vyjadriť čo najjednoduchšie, budeme predpokladať, že každá veta spomenutého druhu sa dá „preložiť“ (a to bez nejakej podstatnej zmeny jej významu) na vetu formy „V a nie je pravda, že V“, kde „V“ je skratka za ľubovoľnú oznamovaciu vetu. Veta „V“ sa vo vete „V a nie je pravda, že V“ vyskytuje dvakrát, hovorí sa tiež, že má v tejto vete dva výskyty: prvý (pred výrazom „a“) a druhý (po výraze „nie je pravda, že“). Ďalej budeme predpokladať, že to, čo platí o vetách formy „V a nie je pravda, že V“ platí s určitými nepodstatnými úpravami aj o iných, bežnejších formuláciách týchto viet. Pri stanovení spomínaných podmienok sa teda môžeme obmedziť na vety formy „V a nie je pravda, že V“. Vety tejto formy možno chápať ako pravdivé vtedy, keď sa niektoré výrazy interpretujú inak v prvom a inak v druhom výskyte vety „V“ vo vete „V a nie je pravda, že V“, alebo vtedy, keď výrazom „a“, „nie je pravda, že“ udeľujeme iný význam ako klasická formálna logika.¹ Pravda, to ešte neznamená, že ak sa splní niektorá z týchto dvoch podmienok, že veta „V a nie je pravda, že V“ musí byť pravdivá. Rečníci a autori, ktorí siahajú po formuláciách formy „V a nie je pravda, že V“, počítajú temer výlučne s prvým spôsobom interpretácie svojich výrokov, t. j. s tým, že poslucháč alebo čitateľ bude niektoré výrazy vety „V“ interpretovať rôzne. Výrazy „a“, „nie je pravda, že“ sa pomerne zriedkavo používajú v inom význame ako v klasickej logike. Možnosť interpretovať niektoré výrazy vety „V“ rôzne sa zakladá najmä na ich neostrosti a mnohznačnosti. Formulácie formy „V a nie je pravda, že V“ (resp. ich štylisticky pôsobivejšie ekvivalenty), ktoré zámerne ťazia z mnohznačnosti výrazov vety „V“ sú v niektorých jazykových prejavoch nielen prípustné, ale dokonca aj veľmi pôsobivé. Možno ich však nahradiť inými formuláciami formy „W a nie je pravda, že V“ (kde „W“ a „V“ sú skratky za rôzne oznamovacie

* Časť tohto článku bola uverejnená v časopise *Príroda a spoločnosť* 1967, č. 7, 46–50.

¹ Pod klasickou logikou tu nerozumieme tradičnú aristotelovskú logiku, ktorá sa kedysi učila na gymnáziách. Máme na mysli modernú formálnu logiku, ktorá sa vo vedách používa nepomerne viac ako tzv. neklasické logiky, ktoré vznikli v tomto storočí.

vety), ktoré sú rovnocenné formulácii „ V a nie je pravda, že V “, lebo veta „ V “ sa v tejto formulácii používa na vyjadrenie dvoch rôznych myšlienok.

Bežné používanie výrazov „a“, „nie je pravda, že“ sa prakticky nelíši od ich používania v klasickej formálnej logike. Potreba inej interpretácie týchto výrazov sa prejavuje iba v niektorých filozofických, matematických alebo neklasických logických teóriách. Lenže v takých teóriách znamená veta formy „ V a nie je pravda, že V “ niečo celkom iného ako v každodennom jazyku. Iné možnosti interpretácie „a“, „nie je pravda, že“ nás tu však nezaujímajú. Radšej si všimneme, ako sa tieto výrazy presne vymedzujú v klasickej formálnej logike (ďalej budeme namiesto termínu „klasická formálna logika“ používať v tom istom význame termín „logika“). Bude vhodné pri tejto príležitosti vymedziť aj niekoľko iných termínov, ktoré sa nám zídu neskôr.

Výrokmi nazývame v logike také jazykové výrazy, ktoré majú tú vlastnosť, že sú buď pravdivé, alebo nepravdivé. Napríklad výrazy „Eugen Suchoň je český spisovateľ“, „Číslo 24 je deliteľné číslom 4“ sú výroky. Z gramatického hľadiska výroky sú vlastne oznamovacie vety. Opytovacie a rozkazovacie vety nie sú výroky. Je zrejmé, že výrazy „Gerlach“, „český spisovateľ“, „nie je pravda, že“, „a“, „Kto je režisérom švédskeho filmu *Mlčanie?*“, „Prestaňte čítať tento článok!“ nie sú výroky. Ani jeden z týchto výrazov nemá tú vlastnosť, že by bol pravdivý alebo nepravdivý. Z daných výrokov možno pomocou takých výrazov, akými sú napríklad „nie je pravda, že“, „a“, „alebo“ a iné, tvoriť nové výroky. Nech „ W “ je skratka za ľubovoľný výrok. Výrok „Nie je pravda, že W “ nazývame negáciou výroku „ W “. Čitateľ si na príkladoch môže ľahko overiť, že negácia výroku „ W “ je pravdivá vtedy, keď výrok „ W “ je nepravdivý a nepravdivá vtedy, keď výrok „ W “ je pravdivý. Nech „ W “ a „ V “ sú skratky za ľubovoľné výroky. Výrok „ W a V “ nazývame konjunkciou výrokov „ W “ a „ V “. Konjunkcia „ W a V “ je pravdivá iba vtedy, keď je pravdivý výrok „ W “ ako aj výrok „ V “. Na konkrétnych príkladoch sa čitateľ môže presvedčiť, že uvedené chápanie výrazov „a“, „nie je pravda, že“ sa nelíši od ich bežného chápania. To, čo tvrdíme vo výrokoch formy „Nie je pravda, že W “, „ W a V “ možno v slovenčine vyjadriť aj inými spôsobmi, budeme však predpokladať, že ide napospol o formulácie významovo rovnocenné formuláciám „Nie je pravda, že W “ „ W a V “ (napríklad miesto „Nie je pravda, že Eugen Suchoň je český spisovateľ“ stačí povedať „Eugen Suchoň nie je český spisovateľ“ a miesto „ W a V “ — „ W i V “ alebo „Aj W aj V atď.).

Ďalej už nebudeme brať do úvahy situácie, v ktorých sa výrazy „a“, „nie je pravda, že“ chápu inak než v klasickej logike alebo situácie, v ktorých sa tie isté výrazy výroku „ W “, vyskytujúceho sa vo výroku „ W a nie je pravda, že W “, dajú interpretovať rôzne. Potom však celkom triviálne platí, že konjunkcia „ W a nie je pravda, že W “ je nepravdivý výrok bez ohľadu na to, či výrok „ W “ je pravdivý alebo nepravdivý. Tento fakt je taký zřejmý a očividný, že málokto bude pokladať výrok „ W a nie je pravda že W “ za pravdivý. A preto dlžníkov slub „Tento mesiac dlh splatím a tento mesiac dlh nesplatím“ bude každý pokladať skôr za hlúpy žart alebo metaforu než za pravdivý výrok. To isté, čo sa tvrdí vo výroku „ W a nie je pravda, že W “ možno vyjadriť aj vo výroku „ W vtedy a len vtedy, keď nie je pravda, že W “ a naopak. Z logického hľadiska sú to dva významovo rovnocenné výroky, nebudeme to tu však dokazovať. Pojem logického sporu určite nie je čitateľovi neznámy. Hovoríme, že v nejakom súhrne výrokov sa vyskytuje spor vtedy, keď do tohto súhrnu patrí nejaký výrok „ W “ a zároveň jeho negácia. Pri budovaní vedeckých teórií, pri rozvíjaní rôznych úvah i pri rozširovaní svojich poznatkov treba veľmi úzkostlivo dbať o to, aby sa nám do teórie, úvahy, resp. medzi naše poznatky ne-

dostal spor. Tam, kde sa tento spor vyskytuje, možno veľmi ľahko dokázať aj očividne nepravdivý výrok „W a nie je pravda, že W“ (a teda aj „W vtedy a len vtedy, keď nie je pravda, že W“). Ale aj naopak, z výroku „W a nie je pravda, že W“ možno odvodiť spor — výrok „W“ aj výrok „Nie je pravda, že W“. A to isté platí aj o výroku „W vtedy a len vtedy, keď nie je pravda, že W“. Ak sa v teórii vyskytuje niektorý z uvedených výrokov, vyskytuje sa v nej aj spor a naopak. A keďže sa pri výstavbe vedeckých teórií ako aj pri rozširovaní našich poznatkov snažíme vyhnúť nepravdivým výrokom a zahrnúť do teórie a medzi poznatky len pravdivé výroky, je celkom zrejmé, že tam nezaradíme očividne nepravdivý výrok typu „W a nie je pravda, že W“, ani výrok „W“ spolu s výrokom „Nie je pravda, že W“, pretože jeden z týchto dvoch výrokov je určite nepravdivý. A ešte jeden závažný dôvod, ktorý nás núti dbať o to, aby sa do teórie nedostal spor: v teórii, v ktorej sa vyskytuje spor, možno dokázať ľubovoľný výrok, tak pravdivý, ako aj nepravdivý. Lenže v teórii by mali byť dokázateľné iba pravdivé výroky.

Napriek snahe vyhnúť sa v každej teórii, ako aj v teoretických i praktických úvahách sporu, za určitých podmienok môže dôjsť k tomu, že sa v teórii alebo v úvahe spor nečakane objaví aj proti našej vôli — ako dôsledok prijatých východísk a predpokladov. Hoci nikdy nebudeme niekomu vážne sľubovať „Tento mesiac dlh splatím a tento mesiac dlh nesplatím“, môže sa nám stať, že za určitých podmienok sa do nášho sľubu vlúdi spor, ako sa to stalo jednému krokodilovi, o ktorom kolovala v starom Grécku táto obľúbená historka:

Neopatrnnej matke ukradol krokodíl dieťa. Rozžialená matka ho úpenlivo prosila, aby jej dieťa vrátil. Zlutoval sa krokodíl nad nešťastnou matkou a povedal jej: „Dobré, dieťa ti vrátim, ale musíš splniť určitú podmienku. Položím ti jednu otázku. Ak mi na túto otázku dáš pravdivú odpoveď, tvojej prosbe vyhoviem, ak nie, svoje dieťa už nikdy neuvidíš. Odpovedz mi na túto otázku: vrátim ti tvoje dieťa? Zúfalá matka vyhrkla: „Nevrátiš“.

Mohol za uvedených podmienok krokodíl svoj sľub splniť? Nech sa čitateľ sám presvedčí, že keby bola matka povedala „Vrátiš“, krokodíl by mohol svoj sľub splniť. Horšie je to v prípade odpovede „Nevrátiš“, v ktorom z krokodíľovho sľubu vyplýva spor. Krokodíl totiž matke sľúbil, že ak odpovie na jeho otázku pravdivo, dieťa jej vráti, ak nepravdivo, dieťa jej nevráti. Predpokladajme, že matkina odpoveď je pravdivá, teda že krokodíl jej dieťa naozaj nevráti. Keďže matka povedala pravdu, krokodíl je zaviazaný dieťa jej vrátiť, teda platí, že ak jej dieťa nevráti, tak jej dieťa vráti. Ak je matkina odpoveď nepravdivá, t. j. ak je pravdou to, že krokodíl jej dieťa vráti, tak krokodíl je zaviazaný dieťa nevrátiť, lebo matka neodpovedala pravdivo, teda platí, že ak jej dieťa vráti, tak jej dieťa nevráti. Z toho všetkého logicky vyplýva, že krokodíl dieťa vráti vtedy a len vtedy, keď ho nevráti, t. j., že krokodíl dieťa vráti a nevráti. Zistili sme, že ak matka odpovie „Nevrátiš“, z krokodíľovho sľubu vyplýva spor. Krokodíl sa v tomto prípade zaviazal splniť sľub, ktorý je práve taký nesplniteľný ako sľub „Tento mesiac dlh vrátim a tento mesiac dlh nevrátim“. Rozdiel medzi týmito sľubmi je iba v tom, že na krokodíľovom sľube to nie je také zjavné ako na sľube dlžníka.

Nebadane ako do krokodíľovho sľubu môže sa vkradnúť spor aj do vedeckej teórie alebo našich úvah. Netreba azda zdôrazňovať, že z dôvodov, ktoré sme uviedli vyššie, je nanajvýš žiadúce objavený spor z danej teórie alebo úvahy hneď odstrániť. Pritom sa nemožno obmedziť na to, že z príslušnej teórie alebo úvahy vylúčime jeden z výrokov „W“, „Nie je pravda, že W“, prípadne obidva tieto výroky, pretože z predpokladov, na základe ktorých sme tento spor získali, budeme môcť odvodiť spor znova.

Treba nájsť predpoklady, z ktorých spor vyplýva, a odstrániť ich z teórie. Tento postup oprávňuje logický zákon, ktorý možno voľnejšie formulovať takto: ak z nejakého výroku „ V “ logicky vyplýva nejaký výrok „ W “ a nie je pravda, že „ W “ (a teda aj spor), tak výrok „ V “ je nepravdivý (resp. platí výrok „Nie je pravda, že V “). Výrok „ V “ môže byť aj konjunkciou viacerých výrokov. Podotýkame, že medzi odstraňované predpoklady nemožno zaradiť jednoducho všetky výroky, ktoré sa vyskytujú v odvodení výroku „ W a nie je pravda, že W “, resp. sporu; nemôžeme však túto otázku podrobnejšie rozvádzať. Uvedený spôsob odstránenia sporu z teórie alebo z úvahy je pomerne jednoduchý. Nie vždy sa možno sporu zbaviť tak ľahko a neproblematicky. Niekedy je nutné pôvodnú teóriu značne prepracovať, hľadať chyby a nedostatky vo vyjadrovacích prostriedkoch teórie, pozmeniť formuláciu prijatých východísk, axióm, ba dokonca analyzovať aj logiku (jej zákony a pravidlá), ktorá sa použila pri odvodení sporu. V tomto prípade už ide o logický spor, ktorý sa nazýva *antinómiou* alebo *paradoxom*.² Význam skúmania antinómií neobyčajne stúpil koncom minulého a začiatkom tohto storočia, keď sa niektoré antinómie objavili v základnej matematickej disciplíne — v teórii množín. Snaha odstrániť antinómie z teórie množín viedla matematikov k zvýšenému záujmu o logiku, čo sa veľmi priaznivo prejavilo na jej rozvoji. Matematici sa začali intenzívne zaoberať skúmaním logických princípov, ktoré sa používajú pri výstavbe a rozpracúvaní matematiky. Antinómie sa totiž nedali odstrániť púhym odmietnutím nejakých matematických predpokladov; ukázalo sa, že ide o ťažkosti a problémy, ktoré sa prelínajú a úzko súvisia s určitými problémami logiky. Nie všetky antinómie, nad ktorými si logici a matematici na začiatku nášho storočia lámali hlavu, sú bezprostredne spojené s teóriou množín. Niektoré z nich patria skôr do logickej sémantiky než do matematiky.³

V tomto článku oboznámime čitateľa s niekoľkými jednoduchšími antinómiami, ktoré nepredpokladajú nijaké znalosti z matematiky alebo logiky. Budú to zväčša antinómie, ktoré spadajú do kompetencie logickej sémantiky. Žiaľ, nemôžeme tu ani len naznačiť, ako sa proti výskytu týchto antinómií zabezpečila moderná logika a matematika. Najprv uvedieme tzv. pseudoantinómiu holiča, ktorá je veľmi pekným príkladom na to, čo nemožno pokladať za pravú antinómiu, pretože tejto antinómií sa možno vyhnúť veľmi jednoducho: odmietnutím predpokladu, z ktorého spor vyplýva.

Pseudoantinómia holiča. Prepokladajme, že v dedinke D žije holič H , ktorý holí všetkých tých a len tých dedinčanov, ktorí sa neholia sami. Položme si teraz otázku, či holič H sa holí sám alebo nie. Najprv predpokladajme, že H holí H (teda že H sa holí sám). Pretože H holí práve tých dedinčanov, ktorí sa neholia sami, z uvedeného predpokladu vyplýva, že H sa sám neholí, teda že H neholí H . A keď predpokladáme, že H sa sám neholí, potom z toho vyplýva, že H holí H , pretože H holí práve tých dedinčanov (medzi ktorých patrí aj H), ktorí sa neholia sami. Teda platí, že ak H holí H , tak H neholí H a ak H neholí H , tak H holí H , t. j. H holí H vtedy a len vtedy, keď H neholí H , z čoho vyplýva, že H holí H a H neholí H , ako aj spor. Teda z predpokladu, že v dedinke D existuje holič H , ktorý holí všetkých tých dedinčanov, čo sa neholia sami, vyplýva, že H holí H a H neholí H , a preto môžeme tento predpoklad odmietnuť ako nepravdivý. Čitateľ si môže hravo navymýšľať mnoho iných pseudoantinómií, nápadne podobných pseudoantinómií holiča.

² Termíny „antinómia“, „paradox“ sa používajú zväčša ako synonymá, sú však autori, ktorí interpretujú termín „antinómia“ trochu inak ako termín „paradox“.

³ Logická sémantika sa zaoberá štúdiom vzťahov medzi umelými formálnymi jazykmi a objektmi, o ktorých možno v týchto jazykoch hovoriť. Medzi najdôležitejšie pojmy logickej sémantiky patrí pojem označovania, splňania, pravdy, modelu, logického vyplývania a iné.

Antinómia luhára. Všimnime si trochu dôkladnejšie tento výrok: „Výrok vytlačený na tejto strane polotučnými písmenami je nepravdivý“. V tomto výroku sa o ňom samom tvrdí (nie totiž iného výroku, ktorý by bol na tejto strane vytlačený polotučnými písmenami), že je nepravdivý. Kvôli stručnosti si tento výrok označíme písmenom „L“. Je výrok *L* pravdivý alebo nepravdivý? Ak *L* je pravdivý, tak je pravdou to, čo sa v ňom tvrdí, teda je pravdou to, že je nepravdivý. Ak *L* je nepravdivý, tak to, čo sa v ňom tvrdí, nie je pravda; teda nie je pravda, že výrok *L* je nepravdivý, čiže výrok *L* je pravdivý. Môžeme teda uzatvárať na to, že výrok *L* je pravdivý vtedy a len vtedy, keď výrok *L* je nepravdivý, z čoho vyplýva spoj. Temuto sporu sa nemožno vyhnúť odmietnutím predpokladu, že taký výrok existuje; veď o jeho existencii sa čitateľ môže veľmi ľahko presvedčiť čítaním tejto strany. Nemôžeme sa tu rozpisovať o tom, ako sa proti tejto antinómii zabezpečuje moderná logika, resp. jej čiastková disciplína — logická sémantika.

Prvý úspešný pokus o vypracovanie účinných prostriedkov proti výskytu tejto antinómie v určitých úvahách modernej logiky pochádza od poľského logika A. Tarského, ktorý svojou prácou o pravde (vydanou r. 1933) pripravil logickej sémantike solidné základy. Antinómiu luhára poznali (v inej formulácii) už starí Gréci. Táto antinómia sa niekedy nesprávne formuluje takto: Kréťan Epidemides povedal, že „všetci Kréťania vždy luhajú“. Povedal Epimenides pravdu alebo nie? Ak predpokladáme, že uvedený Epimenidov výrok je pravdivý, potom z toho vyplýva, že luhá (hovorí nepravdu) aj Epimenides, že teda aj jeho výrok je nepravdivý. Avšak z predpokladu, že Epimenidov výrok je nepravdivý, nevyplýva, že tento výrok je pravdivý, ale iba toľko, že jestvuje Kréťan, ktorý aspoň niekedy hovorí (alebo povedal) pravdu. Pravda, to ešte neznamená, že týmto Kréťanom je práve Epimenides a že práve výrok „Všetci Kréťania vždy luhajú“ patrí medzi tie, v ktorých tento Kréťan hovorí pravdu.

Antinómia heterologických adjektív. Všimnime si tieto prídavné mená: „štvorslabičný“, „slovenský“, „krátky“, „ohybný“ (v zmysle gramatickom). Každé z týchto prídavných mien označuje určitú vlastnosť. Je zaujímavé, že každé z nich má vlastnosť, ktorú samo označuje. Veď adjektívum „štvorslabičný“ je štvorslabičné, adjektívum „slovenský“ je slovenské a adjektívum „ohybný“ je ohybné (možno ho napríklad skloňovať). Všetky slovenské adjektíva (včítane tých, ktoré sú cudzieho pôvodu), ktoré majú nimi označovanú vlastnosť, budeme nazývať autologickými a ostatné adjektíva budeme nazývať heterologickými. Heterologickými adjektívami sú napríklad tieto výrazy: „dvojslabičný“, „nemecký“, „dlhý“, „mokrý“ atď. Lenže aj výrazy „autologický“, „heterologický“ patria medzi slovenské prídavné mená. Vzniká teraz problém, či adjektívum „heterologický“ je heterologické alebo autologické. Namiesto výrazu „heterologický“ budeme ďalej používať skratku „het“. Predpokladajme, že adjektívum „het“ je heterologické. Z toho vyplýva, že „het“ nemá vlastnosť, ktorú označuje, čiže „het“ nie je heterologické. Ak predpokladáme, že „het“ je autologické adjektívum (t. j. že „het“ nie je heterologické), potom „het“ má vlastnosť, ktorú označuje, teda „het“ je heterologické. Tak dochádzame k záveru, že „het“ je heterologické vtedy a len vtedy, keď „het“ nie je heterologické.

Richardova antinómia. Neuvedieme tu pôvodnú formuláciu Richardovej antinómie (z roku 1905), ale iba jej jednoduchšiu a nie celkom presnú verziu, ktorá vznikla trochu neskôr. Keby sme mali k dispozícii nekonečne veľa papiera a času, mohli by sme skonštruovať nekonečne veľa rôznych výrazov slovenského jazyka. Budeme predpokladať, že tento nekonečný súhrn všetkých gramaticky správne utvorených výrazov slovenského jazyka naozaj existuje (v tom zmysle, v akom existuje nekonečný súhrn prirodzených čísel 1, 2, 3, ... alebo všetkých zlomkov a podobne). Všetky výrazy

z tohto súhrnu možno usporiadať do určitej postupnosti, ktorú budeme nazývať úplnou postupnosťou výrazov slovenského jazyka. Výrazy úplnej postupnosti sú usporiadané takto: najprv sa v nej vyskytujú všetky výrazy, ktoré sa skladajú z jedného písmena, po nich nasledujú všetky výrazy z dvoch písmen atď.; výrazy, ktoré sa skladajú z rovnakého počtu písmen sú medzi sebou usporiadané ako v slovníku (abecedne). V úplnej postupnosti sa vyskytujú aj také výrazy ako „byť deliteľný tromi“, „byť väčší ako 100“, „byť nesúdeliteľný s číslom 10“, „byť párný“, „byť prvočíslom“, „byť párnym prvočíslom“ atď. Každý z týchto výrazov vymedzuje určitú vlastnosť niektorých prirodzených čísel. Keď z úplnej postupnosti odstránime všetky výrazy okrem tých, ktoré vymedzujú nejakú vlastnosť niektorých (prípadne i všetkých) prirodzených čísel, dostaneme novú, tiež nekonečnú postupnosť, v ktorej sa vyskytujú všetky slovenské výrazy vymedzujúce nejakú vlastnosť prirodzených čísel. Označme si túto postupnosť písmenom „ R “. Nech $R = \{R_1, R_2, \dots\}$ a R_i nech je ľubovoľný bližšie neurčený prvok postupnosti R . Budeme hovoriť, že prirodzené číslo i je richardovské vtedy a len vtedy, keď i nemá vlastnosť vymedzenú výrazom R_i . (Napríklad keby výraz „byť deliteľný dvomi“ bol R_1 , prvkom postupnosti R , číslo 67 by bolo richardovské, ale keby tento výraz bol R_2 , prvkom postupnosti R , číslo 68 by nebolo richardovské). Výraz „byť richardovským číslom“ sa tiež vyskytuje v postupnosti R , pretože vymedzuje určitú vlastnosť niektorých prirodzených čísel. Predpokladajme, že „byť richardovským číslom“ = R_m a skúmame, či prirodzené číslo m je richardovské alebo nie. Z predpokladu, že m je richardovské, vyplýva, že m nemá vlastnosť vymedzenú výrazom R_m . A keďže R_m vymedzuje práve vlastnosť byť richardovským číslom, potom m nemá vlastnosť byť richardovským číslom, t. j. m nie je richardovské číslo. Teraz predpokladajme, že m nie je richardovské, to znamená, že m má vlastnosť vymedzenú výrazom R_m . Lenže týmto výrazom je vymedzená vlastnosť byť richardovským číslom, čiže m má vlastnosť byť richardovským číslom, t. j. m je richardovské. Teda m je richardovské vtedy a len vtedy, keď m nie je richardovské.

Russellova antinómia. Čitateľovi je zo stredoškolskej matematiky možno známy pojem množiny. Pod množinou rozumieme súhrn ľubovoľných predmetov (či už konkrétnych alebo abstraktných), akým je napríklad súhrn všetkých miest v ČSSR alebo súhrn všetkých párných čísel, ale aj súhrn všetkých českých miest, ktoré majú aspoň jeden milión obyvateľov, alebo súhrn všetkých kozmonautov, ktorí pristáli na Mesiaci v roku 1965. Kým predposledná zo spomenutých množín má len jeden prvok (hovorí sa, že je to jednotková množina), posledná je prázdna, lebo neobsahuje ani jeden prvok. Ak nejaký objekt a patrí do danej množiny M , hovoríme tiež, že a je prvkom množiny M . Presne je pojem množiny vymedzený v teórii množín, ktorú založil významný nemecký matematik G. Cantor (1845–1918). Anglický filozof, matematik a logik B. Russel objavil na začiatku nášho storočia v tejto mladej a vtedy už značne rozpracovanej disciplíne antinómiu, ktorá sa nazýva Russellovou antinómiou.

Množiny, ktoré nie sú svojimi vlastnými prvkami, budeme nazývať normálnymi množinami. Napríklad množina všetkých svetadielov je normálna, lebo jej prvkami sú len jednotlivé svetadiely, ale nie ona sama. Normálnymi množinami sú aj tieto množiny: množina prirodzených čísel, množina všetkých žijúcich ľudí, množina všetkých amerických prezidentov do roku 1966 atď. Príkladom množiny, ktorá nie je normálna, je množina *všetkých* množín. Do tejto množiny musí patriť aj ona sama, inak by to nebola množina všetkých množín. Množinu všetkých normálnych množín označme písmenom „ N “ a skúmame, či množina N je normálna alebo nie. Keby N bola normálna množina, N by nepatrila do N . Avšak N je množina všetkých nor-

málnych množín, teda ak N nepatrí do N , tak N nie je normálna množina. Predpokladajme, že N nie je normálna množina. Z toho vyplýva, že N je prvkom N . A keďže prvkami N sú práve normálne množiny, potom N je normálna množina. Čiže N je normálna množina vtedy a len vtedy, ak N nie je normálna množina.

Russellova antinómia nápadne pripomína pseudoantinómiu holiča, ktorá tiež pochádza od Russella. Touto pseudoantinómiou sa často popularizuje Russellova antinómia (pre tento účel ju vlastne Russel sformuloval). Možno si čitateľ položí otázku, či aj Russellova antinómia nie je iba pseudoantinómia, z ktorej vyplýva, že množina všetkých normálnych množín N nejestvuje. V tomto prípade bola situácia omnoho zložitejšia. Matematikom sa zdal veľmi paradoxný aj samotný fakt, že presne vymedzený abstraktný objekt — množina N — nejestvuje. Russellova antinómia podnietila rozsiahle výskumy, ktoré výrazne poznamenali pôvodnú Cantorovu teóriu množín. Tieto výskumy svedčia o tom, že Russellova antinómia nebola pre matematikov iba sporom, ktorému sa mohli vtedy vyhnúť prostým odmietnutím predpokladu, že N existuje.

Moderná logika a matematika poznajú prostriedky a metódy, ktoré ich zabezpečujú pred uvedenými i mnohými neuvedenými antinómiami. Nie je však známy nijaký univerzálny návod na ochranu každej nožnej teórie, každého systému poznatkov pred všetkými možnými antinómiami. A je veľmi otázne, či taký návod vôbec existuje.

Pavel Cmorej