O GNOZEOLOGICKOM VÝZNAME MATEMATICKÝCH MODELOV

JURAJ VIRSIK

Po revolučných prevratoch v názoroch na fyzikálny svet v prvej polovici nášho storočia (teória relativity, kvantová teória) otvorilo sa široké pole aplikácií tradične špekulatívnej „čistej“ matematiky na formovanie, ale i formulovanie klasických i nových fyzikálnych teórií. Približne v tom istom čase sa objavujú možnosti aplikácie matematiky v najrôznejších neformálnych, induktívnych vedných odboroch (ekonómia, biológia, lingvistika a pod.), a to nielen ako pomocný výpočtový aparát, ako je to napríklad v technických vedách, ani nie iba prostredníctvom symbolickej logiky, ale i priamo ako aparát pre opisovanie skúmaného odboru, ako aparát pre tvorenie tzv. matematických modelov. Tento nástup matematiky má už dnes nesporne vzrastajúcu tendenciu, pričom rastie jej význam nielen pre zvládnutie problémov technickej praxe, ale i pre tvorbu adekvátneho obrazu objektívnej reality vo vedomí mysliaceho subjektu, t. j. v gnozeologickom procese. Tento, v istých aspektoch „zmatematizovaný“, prístup k poznávaniu hmotnej reality zohráva dnes prevratnú úlohu i v rozvoji samotnej gnozeologickej teórie najmä v aplikácii na problémy fyziky.

Praktickú stránku matematickej aplikácie môžeme nazvať *matematickými metódami,* gnozeologická sa prejavuje v konštrukcii *matematických modelov.*

Ide asi o tieto dve veci: Ak máme použiť matematiku pri riešení problému z niektorého vedného (najčastejšie prírodovedného) odboru, treba najprv problém matematicky formulovať („matematicky modelovať situáciu“) a potom riešiť problém ako problém z matematiky, teda použiť matematickú metódu. Napríklad ak treba zistiť, či sa obsah kvapaliny jednej nádoby vmestí do druhej nádoby, treba najprv modelovať každú nádobu — napr. ako ideálny válec — modelovať proces prelievania (nestlačiteľnej) kvapaliny ako porovnávanie objemov a až takto modelovaný problém riešiť matematickou metódou, t. j. vypočítať objemy a rozhodnúť, ktorý je väčší.

Tento jednoduchý príklad — práve pre svoju jednoduchosť — nevystihuje však dostatočne celú problematiku, a to asi z dvoch príčin: Predovšetkým išlo tu o komplex bežne známych javov a formulácia i riešenie problému je známe každému, i tomu, kto si neuvedomuje neempirický, formálny charakter matematiky. Za druhé, išlo tu o skôr praktickú než gnozeologickú úlohu, t. j. išlo o zistenie (jednoduchého) dôsledku známych zákonitostí, a nie o „objavenie“ neznámych zákonitostí. Je totiž zrejmé, že skôr než možno pristúpiť k riešeniu praktickej úlohy, treba vedieť matematicky modelovať nielen javy vystupujúce bezprostredne vo vecnej formulácii daného problému, ale javy zo širšieho, v istom zmysle uzavretého komplexu javov. V našom prípade to boli modely empirickej geometrie.

Z nejasností, ktoré vznikajú okolo tohto jednoduchého problému, by sa dalo usudzovať, že sám pojem matematického modelu je konfúzny a zbytočne komplikuje vec. Skutočne z analýzy podobných elementárnych úloh by sa mohlo zdať, že do istej miery je to pravda. Situácia sa však stane úplne inou v komplexe javov, pre opis ktorých nestačí názornosť, ako sú problémy z kvantovej fyziky, teórie gravitácie a vôbec teórie polí, zo štatistiky (v ekonómii i fyzike) a nakoniec i problémy ekonomickej praxe. Preto pre ilustráciu ďalších úvah týkajúcich sa matematických modelov budeme brať príklady z takýchto oblastí, kde na jednej strane názornosť matematického modelu, na druhej strane evidentnosť prístupu k riešeniu nebudú pri analýze pôsobiť rušivo. Pritom sa zameriame najmä na matematické modely komplexov fyzikálnych javov vyšetrovaných vo fyzikálnych teóriách.

I

Skôr než pristúpime k analýze načrtnutej problematiky, zdôraznime hneď od začiatku, že sa budeme a priori stavať na striktné stanovisko realistickej (a špeciálne teda i marxistickej) ontológie. Bez ďalších diskusií prijmeme existenciu objektívnej reality nezávislú od poznávajúceho subjektu. Nechajme tiež stranou otázku ontologickej štruktúry tejto reality. Pre naše účely postačí, keď ju budeme chápať ako v istom zmysle spoločného menovateľa všetkých komplexov javov. Pritom jav je tu primárny pojem a komplexom javov rozumieme istú súčasť, lepšie povedané stránku, objektívnej reality konfrontovateľnú poznávajúcim subjektom. Poznamenajme však, že substanciálne chápanie objektívnej reality — a špeciálne pojmy ako *časť* objektívnej reality, *vec* existujúca nezávisle od vedomia a pod. — budeme radšej obchádzať. Ďalej sám subjekt staviame striktne mimo poznávaného objektu a ani ho neuvažujeme ako možný predmet poznávania, čo vo sfére fyzikálnych komplexov javov nie je veľmi obmedzujúci predpoklad.

Gnozeologický proces budeme — opäť do značnej miery zjednodušene — chápať ako tvorenie *obrazov* objektívnej reality vo vedomí subjektu. Pritom daný obraz odráža len istý čiastkový komplex javov, alebo ešte ináč povedané, odráža javy len z istého prierezu objektívnej reality. Termínom obraz nahrádzame v našej literatúre zaužívanejší termín odraz sobjektívnej reality, aby sme sa vyhli otázke „podobnosti odrazu so zdrojom".

Poznatkom, v našej terminológii teda skôr obrazom, možno priraďovať atribúty estetické, racionálne a nakoniec i teleologické, účelové. Týmto trom hodnoteniam obrazov odpovedajú tri aristotelovské normy: krása, pravda a dobro. Na druhej stranei sám obraz môže byť prevažne zmyslový (názorný) alebo prevažne racionálny (vedecký) a azda je mysliteľný i obraz s prevládajúcimi inými aspektmi (morálne, politické, náboženské, mystické a pod.), týmto sa však bližšie nebudeme zaoberať. Poznamenajme len, že pre naše úvahy je privilegovaný aspekt racionálny, t. j. otázka pravdivosti alebo nepravdivosti obrazu.

Toľko stručne o východiskových stanoviskách. Pre ďalšie ešte bude nevyhnutné ujasniť si v tu používanej terminológii rozdiel medzi *obrazom* skutočnosti, presnejšie daného komplexu javov, a termínom *model* komplexu javov. Najprv však treba povedať niečo o bežných javoch a evidentných poznatkoch.

Určité komplexy javov budeme považovať za elementárne, bežné. Sú to javy, o ktorých si robí človek ľahko závery, kde nie je problém rozhodnúť o pravdivosti alebo vernosti obrazu, kde človek vystačí s gnozeologickým predpokladom naivného realizmu. Sú to javy, pre opis a „pochopenie" ktorých stačí „bežná životná prax". Obrazom týchto javov vo vedomí subjektu sú bežné poznatky, o pravdivosti ktorých je „bezpečne rozhodnuté". Táto trieda javov ako i im odpovedajúcich obrazov, poznatkov o nich, podstatne závisí však od úrovne inteligencie subjektu i od stupňa vývoja spoločnosti.

Obrazy odpovedajúce takýmto javom možno zaradiť do širokej kategórie poznatkov — nazvime ich *evidentnými poznatkami.* Sú to poznatky, o ktorých subjekt „nepochybuje". Je pochopiteľné však, že vývojom jednotlivca i spoločnosti niektoré evidentné poznatky môžu prestať byť evidentnými, ak totiž analýza iných poznatkov núti subjekt pochybovať i o pravdivosti prijatých evidentných poznatkov (zrovnaj krízu klasickej fyziky na prelome storočí). Okrem obrazov bežných javov patria do kategórie evidentných poznatkov všetky formálne poznatky, logické a matematické. Práve poznatky matematické, okrem, pravda, čisto logických, majú tú vlastnosť, že akonáhle sú známe, stávajú sa evidentnými a zostávajú *absolútne evidentnými,* lebo nie sú bezprostredne závislé od konfrontácie subjektu s vonkajšou realitou. Na druhej strane nemožno toto povedať o iných evidentných poznatkoch, a preto nie je možné ani striktnou hranicou oddeliť poznatky evidentné od poznatkov problematických. Prijmime teda a priori istú, bližšie už neopisovanú triedu evidentných poznatkov s vedomím jej relatívnosti a, dodajme, aj čiastočnej hmlistosti.

Pre poznanie a pochopenie nových, nie bežných javov tvorí si poznávajúci subjekt *modely* rôznych komplexov týchto javov, a to tak, že ich v istom zmysle priraďuje k známym, najčastejšie evidentným poznatkom. Ak sa toto priraďovanie deje pomocou poznatkov o bežných javoch, hovoríme o *modeloch názorných,* ak sa pre priradenie použijú súhrny formálne evidentných poznatkov — napríklad z matematiky — hovoríme o *formálnych modeloch,* napríklad matematických. Takéto, najmä názorné, modelovanie má bežne uznávaný význam (technické modely v bežnom slova zmysle). Modelovanie má však okrem bezprostredného gnozeologického významu pre subjekt konfrontujúci vonkajšiu realitu i význam komunikatívny pri odovzdávaní obrazu istej skutočnosti, alebo všeobecnejšie poznatku, jedného subjektu druhému, ktorý takto poznáva realitu práve prostredníctvom modelu. Ak ide o partnerov vedecky „rovnako erudovaných", vystupuje do popredia model formálny napríklad matematický pre svoju nižšie uvedenú vnútornú dokonalosť. V opačnom prípade ide o vyučovací proces a tu majú väčší význam názorné modely (spomeňme názorné, najmä vizuálne vyučovacie pomôcky, ale i napr. biblické podobenstvá).

Stručne je teda tento rozdiel medzi obrazom a modelom v tu používanej terminológii: obraz je v istom zmysle výsledkom, konečným produktom poznávacieho procesu, zatiaľ čo modely tvoria akési spojivo medzi obrazmi tvorenými a obrazmi alebo poznatkami známymi, najčastejšie evidentnými. Modely teda slúžia k dosiahnutiu obrazu alebo poznatku o skúmanom komplexe javov.

II

Všimnime si teraz bližšie privilegované postavenie matematiky pri konštrukcii modelov. Matematika ako formálna veda zahrňuje poznatky, o pravdivosti ktorých možno rozhodnúť bez priameho styku s realitou, t. j. z jej vlastnej logickej štruktúry. V tomto zmysle považujeme vlastne matematické poznatky za evidentné. Tieto dve vlastnosti — jej formálnosť a vnútorná gnozeologická uzavretosť — robia z nej výhodnú bázu pre modelovanie javov z objektívnej reality. Tento význam je ešte umocnený dobrou komunikatívnosťou matematických poznatkov medzi jednotlivými subjektmi („ideálne chápavými") plynúcou práve zo spomínanej formálnosti a evidentnosti. Poznamenajme však hneď, že iste nie každý komplex javov možno dostatočne adekvátne modelovať matematicky. Z podstaty matematiky totiž vyplýva, že takýto model môže vystihovať nanajvýš kvantitatívne vlastnosti skúmaného komplexu. Preto prípadne i adekvátne použitý matematický model môže byť chudobný a málo vraviaci (zrovnaj však napríklad význam štatistických údajov a vyhodnotení v spoločenských vedách). Okrem toho pre kvantitatívne vzťahy v mnohých skúmaných oblastiach postačí pre modelovanie najprimitívnejší matematický aparát (porovnaj príklad v úvode) a explicitné uvedomenie si použitého matematického modelu môže byť v poznávacom procese len zbytočným balastom. Inými slovami, použitie striktného a subjektom uvedomeného matematického modelu sa „vypláca" tým viac, čím je kvantitatívna štruktúra vyšetrovaného komplexu javov bohatšia a podstatnejšia pre racionálne, t. j. pravdivé poznanie skutočnosti.

Alebo ešte ináč, každá veda tým viac môže potrebovať matematické modely pre opis ňou skúmaných javov, čím je exaktnejšia (v tradičnom slova zmysle) alebo čím je exaktnosť pre ňu dôležitejšia. Aj v tomto možno vidieť príčinu širokého uplatňovania matematiky na najrôznejšie oblasti v období vzostupu exaktnosti (ale i formálnosti) vo vedách. Z týchto dôvodov vďačí matematika za svoje široké aplikácie aj pozitivistickým filozofickým sústavám, ktorých stanovisko je síce diskutabilné (a ani ho tu nepreberáme), ale zohralo dôležitú úlohu katalyzátora v búrlivom rozvoji exaktných vied. Zdá sa teda už zrejmé, prečo práve fyzika je najstarším, ale aj najnáročnejším „zákazníkom" matematiky.

Všimnime si teraz samotný matematický model. Ako už bolo povedané, matematický model je sám osebe matematickou teóriou, jeho štruktúra je čisto matematická, teda formálna. Jeho gnozeologická náplň však spočíva v priradení matematických pojmov a vzťahov (explicitne alebo implicitne vystupujúcich v modeli) k javom a súvislostiam z modelovaného komplexu javov. Toto priradenie však obyčajne nie je bezprostredné, ale deje sa prostredníctvom *neformálnych pojmov* odpovedajúcich vyšetrovaným javom a opisujúcich štruktúru vyšetrovaného komplexu. Súhrn týchto pojmov má svoju bezprostrednú vnútornú štruktúru danú bežnými poznatkami o uvažovanom komplexe javov. Ak sa sám komplex skladá z bežných javov, vyčerpáva tento súhrn dostatočne pravdivý obraz komplexu a takýto komplex javov nemôže byť podkladom pre vytvorenie systematickej „vedeckej teórie" a pochopiteľne i použitie matematického modelu by bolo násilné a zbytočné. Ak však ide o dosť široký komplex javov, je uvedený súhrn pojmov so svojou bezprostrednou štruktúrou iba neúplným racionálnym obrazom reality — nazývajme ho racionálnym *predobrazom* vyšetrovaného komplexu javov — a vyžaduje zavedenie systému, t. j. dômyselnejšej štruktúry, aby bol vytvorený (relatívne) úplný racionálny obraz.

Predobraz teda zahrňuje neformálne poznatky nadobudnuté bezprostredne konfrontáciou s realitou, a to pasívnou (meraním) i aktívnou (experimentom) a na ňu nadväzujúcou dôležitou zložkou poznávacieho procesu — *abstrakciou*. Predobraz je teda bezprostredným produktom abstrakcie a v tomto zmysle budeme tento termín i v ďalšom chápať.

Matematický model je práve v prípade fyzikálnych javov (ale i iných) dôležitým faktorom pri prechode od predobrazu k viac-menej vyčerpávajúcemu racionálnemu obrazu reality, t. j. pri zavedení hlbšieho logického systému do súhrnu poznatkov tvoriacich predobraz.

Priradenie matematických štruktúr a závislostí v matematickom modeli k závislostiam (napr. fyzikálnym, ekonomickým) vnútornej štruktúry predobrazu, a teda i ku konkrétnym javom, umožňuje na druhej strane interpretovať neformálne — teda vo forme napr. prírodných zákonov a zákonitostí — závery dosiahnuté čisto formálnou, matematickou cestou vo zvolenom modeli a obohatiť tým vnútornú štruktúru predobrazu. Je tiež jasné, že nie priamo závery matematického modelu, ale tieto zákonitosti podliehajú praktickému overovaniu. V súlade s týmto nazveme *fyzikálnou teóriou* predobraz (čiastočného) komplexu fyzikálnych javov spolu s jeho matematickým modelom a závermi tohto modelu, interpretovanými vo forme všeobecných fyzikálnych závislostí a zákonov. V tomto úzkom slova zmysle chápaná fyzikálna teória nepripúšťa teda prírodné zákony a závislosti, ktoré nie sú postihnuteľné v príslušnom matematickom modeli, a je vlastne iba kvantitatívnou kostrou fyzikálnej teórie v bežne používanom slova zmysle.

Keďže je matematický model čisto formálny, nemá zmysel otázka jeho pravdivosti. Pritom, pravda, predpokladáme jeho logickú formálnu dokonalosť v sebe, t. j. neprotirečivosť, niekedy i úplnosť tak, ako je to bežné pri formálnych matematických a vôbec logických systémoch. Aj keď otázka (logickej) neprotirečivosti v sebe matematického modelu nie je zďaleka elementárna, patrí do oblasti matematickej logiky a axiomatiky, je riešiteľná zo svojej štruktúry bez uvedomenia si charakteru gnozeologického procesu, a preto ju tu vypustíme.

Napriek tomu je však zrejmé, že nie všetky neprotirečivé v sebe matematické modely daného komplexu javov sú ekvivalentné z hľadiska pravdivosti alebo nepravdivosti. Z tohto hľadiska privilegovaný matematický model pevného komplexu javov budeme nazývať *adekvátnym*. Normou racionálnosti matematického modelu bude teda v tomto zmysle jeho adekvátnosť, presnejšie *miera adekvátnosti*, naproti tomu pri príslušnej fyzikálnej teórii budeme hovoriť o *miere pravdivosti*. Skôr než budeme toto stanovisko bližšie analyzovať, uvedieme príklad.

Skúmajme komplex javov, ktorý je zhrnutý pod pojmom *tvar našej Zeme*. Uvažujme tieto modely tvaru Zeme:

1. rovná ohraničená štvorhranná doska podopieraná štyrmi slonmi z indickej mytológie,
2. Thaletova rovinná predstava,
3. guľa s polomerom niečo vyše 6300 km,
4. rotačný elipsoid rozmerov uvádzaných v dnešných atlasoch,
5. geometrický bod.

Je hneď jasné, že prvý model je názorný a nie matematický, nepatrí teda do našej oblasti, hoci otázka jeho miery pravdivosti je triviálna. Ostatné sú však matematické (geometrické) modely toho istého komplexu javov. Na prvý pohľad sa zdá, že pravdivý je len štvrtý z nich. Napriek istej jeho privilegovanosti, nemožno však ostatné modely (okrem prvého) označiť za absolútne neadekvátne. Pre kartografa obmedzujúceho sa na dostatočne malé plochy zemského povrchu je „pracovne" najadekvátnejšia predstava rovinná a napr. predstava elipsoidu je zbytočne zložitá, zatiaľ čo predstava bodu úplne nevhodná. Ak pôjde o rozlohy väčšie, bude najvhodnejšia predstava guľová a pre globálne mapovanie zemského povrchu je nevyhnutné modelovať zemeguľu ako rotačný elipsoid. Na druhej strane v niektorých astronomických napr. kozmologických modeloch je rovinná predstava úplne nevhodná, predstava gule, resp. elipsoidu obyčajne zbytočne zložitá a najadekvátnejší je model geometrického bodu.

Vidíme teda, že vo fyzikálnej, resp. technickej praxi ten istý komplex javov môže byť znázornený matematicky rôznymi relatívne adekvátnymi modelmi. Poznamenajme, že uvedený príklad je opäť príliš elementárny a názorný, než aby na ňom bolo možné demonštrovať všetky vlastnosti matematického modelu.

III

Oveľa menej triviálny podklad pre konštrukciu matematických modelov je napríklad komplex javov spadajúci pod názov *mechanika*. Tu máme veľmi bohaté fyzikálne teórie a na nich vybudované matematické interpretácie, teda modely. Je to Newtonova mechanika (klasická), špeciálnej teórie relativity (zahŕňujúca organicky i model priestoročasu), všeobecnej teórie relativity (modelujúca i javy gravitačné), alebo na druhej strane model kvantovej mechaniky nerelativistickej i špeciálno-relativistickej. Podobnú situáciu by sme dostali, keby sme chceli menovať teórie priestoročasu, alebo elektromagnetického poľa a polí vôbec a nakoniec i teórie biologické alebo ekonomické. Zostaňme však pri fyzike.

Na týchto netriviálnych príkladoch vidieť, že otázka adekvátnosti matematického modelu je oveľa zložitejšia než v prípadoch diskutovaných vyššie. Ak sme v príklade o tvare našej Zeme boli ochotní bez rozpakov privilegovať predstavu rotačného elipsoidu, v tak obsiahlom komplexe javov, ako sú javy mechanické (ktoré ani nejde striktne a priori vymedziť), sme na rozpakoch, ktorý z modelov — bez ohľadu na to, ktoré ďalšie javy ešte chceme vyšetrovať — máme považovať za najadekvátnejší. Napríklad pre dennú technickú prax je Newtonov model najadekvátnejší a všetky ostatné zbytočne zložité. Pre prípadné problémy kozmických letov bude — aspoň z dnes známych modelov —

najadekvátnejší model všeobecnej relativity a všetky ostatné nevhodné, dávajúce nesprávne výsledky. Pre potreby napr. atómového fyzika budú okrem kvantového modelu (relativistického alebo nerelativistického) nevhodné všetky ostatné modely pre ich spoločný predpoklad striktne korpuskulárneho modelovania elementárnej častice.

Je tu teda jeden zásadný rozdiel medzi touto situáciou a situáciou v predtým diskutovanom triviálnom príklade. V prípade tvaru našej Zeme existoval model (rotačný elipsoid), ktorý síce pre niektoré účely bol viac alebo menej adekvátny, vždy však neadekvátnosť spočívala v jeho zbytočnej zložitosti pre dané potreby a nikdy nebol neadekvátny preto, lebo by dával nesprávne výsledky. Takýto model bolo prirodzené považovať za „absolútne adekvátny", hoci na druhej strane by sme iste nevystačili ani s modelom rotačného elipsoidu napr. pri výškovom mapovaní zemského povrchu. Má teda i tento absolútne adekvátny model idenfinitnú stránku.

Niečo iné však nastáva v prípade mechanických a vôbec všeobecnejších fyzikálnych modelov. Mechanické javy sú neoddeliteľne späté s inými fyzikálnymi javmi a ak ich uvážime v plnej šírke, žiadny z uvedených modelov nebude adekvátny, a to nielen pre prípadnú prílišnú zložitosť, ale bude dávať nesprávne závery, t. j. nezhodné s experimentom. Teda pre určenie adekvátneho modelu je nevyhnutné vedieť účel, pre ktorý mechanické javy vyšetrujeme, modelujeme, čím atomaticky restringujeme veľmi obsiahly komplex všetkých mechanických javov. Napríklad ak ide o problémy z mikrokozmu, nemôže nastať kolízia medzi závermi vyplývajúcimi z kvantovej teórie a experimentmi, pre vysvetlenie ktorých by bolo treba vziať do úvahy geometrickú zakrivenosť priestoročasu. Takéto experimenty sa nevyskytnú, alebo v reči fyzika, v tomto prípade je zakrivenie priestoročasu zanedbateľné.

Neexistuje však model zahrňujúci zakrivenie priestoročasu i kvantové vlastnosti mikrokozmu, hoci existujú pokusy o kvantovanie gravitačného poľa. Takéto snahy odpovedajú prirodzenej tendencii o jednotné vysvetľovanie všetkých fyzikálnych javov, o vytvorenie logicky jednotného obrazu fyzikálnej reality. Toto však nemožno zamieňať s idealizovanou situáciou, pri ktorej by existovala jediná, univerzálna, fyzikálna teória — v našom užšom slova zmysle — a teda i *univerzálny matematický model*. Takýto univerzálny model nielen že neexistuje, ale podľa všetkého ani nemôže existovať, lebo by to znamenalo viac-menej sformalizovanie celého fyzikálneho poznávacieho procesu, príliš odvážne zmatematizovanie celej fyziky.

Okrem toho by takýto model a s ním spojená fyzikálna teória boli do detailov neprevediteľné pre značnú obšírnosť — dodajme — i malý praktický význam. Jednotnosť vo fyzike je uskutočniteľná iba v spoločnej fyzikálnej interpretácii zákonov z rôznych čiastkových teórií (zákony zachovania), ale nie v konštrukcii jednotného matematického modelu. Známe sú napríklad problémy (formálne), ak sa má matematicky jednotne modelovať dvojaká interpretácia štruktúry (fyzikálnej) hmoty: diskrétna a kontinuálna. Aj keď vo fyzike napr. (klasická) mechanika hmotného bodu i (klasická) mechanika kontinua sú považované za časti tej istej teórie, striktne vzaté, vznikajú ťažkosti pri jednotnom matematickom formulovaní oboch týchto teórií. Z prísne matematického hľadiska ide teda o dve rôzne teórie a je nutné v oboch matematických modeloch rôzne formulovať napr. Newtonove postuláty, hoci z neformálneho hľadiska (z ich fyzikálnej náplne) možno tieto formulácie považovať za ekvivalentné.

Dali by sa nájsť ešte iné príklady svedčiace o nerealizovateľnosti matematicky jednotného modelu fyzikálnej reality. Jednotnosť fyziky je teda *neformálna*, nematematická a tu ju ďalej rozoberať nebudeme.

Okrem toho vývoj fyziky má za následok aj kvalitatívne nové experimenty, t. j. konfrontáciu subjektu s novými dotiaľ nekonfrontovanými fyzikálnymi javmi, a tým do modelovaného komplexu pribudnú javy, ktoré v ňom predtým vystupovali iba fiktívne. Fyzikálny obraz sveta sa teda v istom zmysle *rozširuje*, doplňuje a i prípadná „univerzálna“ fyzikálna teória by sa časom stala iba čiastkovou teóriou. Tento proces „zastarávania“ fyzikálnych teórií nebudeme bližšie analyzovať.[1] Poznamenajme len, že má za následok zúženie použiteľnosti predtým všeobecne platnej fyzikálnej teórie a s ňou spätého matematického modelu na menšiu, praxou osvedčenú oblasť, totiž takú, kde novozistené nezrovnalosti s praxou sú zanedbateľné (porovnaj adekvátnosť Thaletovho modelu Zeme pre lokálne mapovacie potreby; Newtonova mechanika v technickej praxi).

V tejto súvislosti pripomeňme ešte názorné modely, priraďujúce k fyzikálnym javom obrazy bežných javov. Avšak práve jedným z výrazov krízy vo fyzike na prelome našich storočí bolo aj to, že do konca minulého storočia sa vo všetkých fyzikálnych teóriách javy, ktoré boli modelované matematicky, dali súčasne modelovať i viac-menej názorne, alebo stručnejšie, matematické modely boli viac-menej názorné. Toto neplatí už napríklad v kvantovej teórii (korpuskulárnovlnový dualizmus).[2]

IV

Pristúpime teraz k schematickej analýze fyzikálneho poznávacieho procesu so zameraním na matematické modely. Budeme pritom predpokladať *uzavretý* fyzikálny obraz sveta, t. j. „zastavme“ myslenie vývoj fyziky v tom zmysle, že predpokladáme, že nič nového už experiment dať nemôže. Nech týmto fixným fyzikálnym obrazom sveta je napr. všetko to, čo je v dnešnej teoretickej fyzike známe. V rámci tohto obrazu sa vynára, ako sme už videli, problém existencie univerzálnej fyzikálnej teórie „vysvetľujúcej všetko čo dnes z fyziky známe formálne jednotne“. Pokúsime sa však opísať problém adekvátnosti modelu, z vnútornej štruktúry fyzikálneho obrazu sveta bez explicitného predpokladu existencie tejto univerzálnej teórie.

Schematicky môžeme situáciu znázorniť takto: Máme komplex $\mathscr{K}$ všetkých fyzikálnych javov, ktoré boli konfrontované (priamo alebo nepriamo, t. j. pro-

---

[1] Por. Max Planck, *Das Weltbild der neuen Physik*, Leipzig 1955, 1. vyd. 1929.

[2] Spomeňme však v tejto súvislosti filozofické diskusie okolo tohto problému, konkrétne princíp komplementarity. Tieto snahy možno do istej miery charakterizovať ako pokus o kompromis medzi názorným a matematickým modelom.

stredníctvom abstrakcie) do tejto doby. Teda v $\mathscr{K}$ sú všetky fyzikálne javy, o ktorých sa môžeme „presvedčiť", ako dopadne experiment.

Procesom abstrakcie vytvára komplex $\mathscr{K}$ vo vedomí subjektu (súčasný) predobraz $\mathscr{P}$ všetkých fyzikálnych javov, teda komplexu $\mathscr{K}$. Vnútorná štruktúra $\mathscr{P}$ je daná priemetom súhrnu bežných poznatkov. Pritom predobraz sa skladá zo všeobecných pojmov a závislostí, ktoré sú procesom abstrakcie A priradené k javom z komplexu $\mathscr{K}$.

Predobrazu $\mathscr{P}$ a teda i komplexu $\overline{\mathscr{K}}$ je priradená celá trieda $\mathfrak{M}$ matematických modelov, pritom každý model M z $\mathfrak{M}$ ($M \in \mathfrak{M}$) je formálno-kvantitatívnym podkladom nejakej fyzikálnej teórie F. Pritom teória F je tvorená ešte časťou P predobrazu $\mathscr{P}$, teda množinou fyzikálnych pojmov a závislostí. Táto časť $P \subset \mathscr{P}$ je priradená abstrakciou A k čiastkovému komplexu $K \subset \mathscr{K}$. K je teda komplex javov modelovaný v M a k nemu je priradená časť $P = P(K)$ i model $M = M(K)$. Závisí teda i celá teória F v podstate od modelovaného komplexu $K \subset \mathscr{K}$ a modelu M, teda $F = F(K,M)$. Modelovaný komplex K musí byť v tom zmysle dosť všeobecný, aby $P(K)$ tvorila logicky uzavretú (v nedefinovanom slova zmysle) časť predobrazu $\mathscr{P}$. Táto podmienka je však len nevyhnutná, a nie postačujúca (pozri neoddeliteľnosť mechanických javov od gravitačných vo všeobecnej teórii relativity).

Priradenie matematických pojmov z $M(K)$ k fyzikálnym pojmom z $P(K)$ je dané korešpondenciou $h_M : P(K) \rightarrow M(K)$. h_M, je teda „vysvetlenie fyzikálnej náplne" niektorých matematických pojmov z modelu $M(K)$. Na druhej strane model $M(K)$ umožňuje v rámci teórie $F(K,M)$ pomocou korešpondencie inverznej k h_M interpretovať závery dosiahnuté v $M(K)$ matematickou cestou ako fyzikálne zákony doplňujúce štruktúru predobrazu $P(K)$ o všeobecné poznatky. Súbor takto dosiahnutých fyzikálnych zákonov značme $Z(K,M)$. Zákony a závislosti v $Z(K,M)$ operujú s fyzikálnymi pojmami obsiahnutými výlučne v modelovanom predobraze $P(K)$.

V $Z(K,M)$ je vlastné ťažisko adekvátnosti modelu $M(K)$, a teda i pravdivosti fyzikálnej teórie $F(K,M)$. Je otázkou celkom neformálnou, do akej miery sú fyzikálne tvrdenia a zákonitosti v $Z(K,M)$ prijateľné — v tom zmysle, že „odpovedajú skutočnosti". Pritom ide tu o prijateľnosť celého súboru $Z(K,M)$, a nie snáď niektorých vhodne vybraných zákonov. Predpokladajme tedy, že súbor $Z(K,M)$ možno aplikovať — všeobecne nie na všetky javy z K — ale povedzme iba na časť $K_0(M) \subset K$.

Ak $K_0(M)$ nie je prázdny (alebo lepšie povedané triviálny) komplex, budeme hovoriť, že model $M(K)$ má *nenulovú mieru adekvátnosti*. K danému komplexu K existuje, pravda, prípadne viac matematických modelov $M(K)$ s nenulovou mierou adekvátnosti.

Praktický význam matematického modelu spočíva v tom, že javy z $K_0(M)$ možno „predpovedať". Serióznosť tejto predpovede je pritom daná inklúziou $K_0(M) \subset K$, t. j. vlastne v procese tvorenia modelu a teda aj abstrakcie sme museli javy z $K_0(M)$ už a priori uvážiť, nejde tu teda o predpovede „jasnovidecké". Táto apriorná konfrontácia však bola iba rámcová, všetky modelované javy boli zatiahnuté do K vlastne prostredníctvom abstrakcie [napr. z požiadavky dostatočnej všeobecnosti a uzavretosti $P(K)$], zatiaľ čo $Z(K,M)$ dáva možnosť predpovedať každý jav v $K_0(M)$.

Zdôraznime ešte túto dôležitú vlastnosť matematického (a nakoniec vlastne každého formálneho) modelu: Ak fyzik z akýchkoľvek dôvodov nemôže prijať všetky závery v $Z(K,M)$ do svojej teórie, treba chybu hľadať nie v samom modeli $M(K)$, ale v priradení h_M, prípadne v samom preodbraze $P(K)$. Napríklad, keď sa ukázala — v istom zmysle — neadekvátna Newtonova mechanika, chybu hľadal Einstein nie v matematických záveroch tejto teórie, ale v priradení matematických pojmov k fyzikálnym javom spojeným s predstavou, napr. času a priestoru.

Nech teraz K' je iný komplex (fyzikálnych) javov. Potom môžeme nazvať *relatívne adekvátnym modelom komplexu K vzhľadom k účelu K' najjednoduchší* z modelov $M(K)$, pre ktoré je prienik komplexov $K \cap K'$ obsiahnutý v $K_0(M)$, t. j.

$$K \cap K' = K_1 \subset K_0(M)\,.$$

Označme $\mathfrak{M}\ (K,K_1)$ systém modelov $M(K) \in \mathfrak{M}$, pre ktoré je $K_1 \subset K_0(M)$, t. j. systém všetkých modelov komplexu K, ktoré sú aplikovateľné na K_1. Relatívne adekvátnym modelom komplexu K vzhľadom ku K' je teda najjednoduchší z modelov systému $\mathfrak{M}\ (K, K \cap K')$.

Pritom hľadisko jednoduchosti, značne subjektívne, spočíva hlavne vo formálnej (matematickej) jednoduchosti samého modelu $M(K)$, prípadne v jeho názornosti (ktorá, ako sme už poznamenali, nie je vždy dodržateľná).

Zjednodušujúci predpoklad o vysvetliteľnosti každého javu z $\mathcal{K}$ v rámci súčasného fyzikálneho obrazu sveta — vyslovený na začiatku odstavca — potom možno formulovať aj tak, že ku každému komplexu K_1 existuje dosť široký komplex $K \supset K_1$ tak, že $\mathfrak{M}\ (K,K_1)$ je neprázdna, t. j. že existuje teória $F(K)$, ktorá vysvetľuje K_1.

Miera relatívnej adekvátnosti modelu daného komplexu javov je dôležitá z praktického hľadiska, zatiaľ čo z gnozeologického hľadiska je dôležitejšia požiadavka všeobecnosti alebo tiež *absolútnej adekvátnosti* modelu. Zhruba povedané, model $M(K)$ bude mať tým väčšiu mieru všeobecnosti, čím väčšou časťou v modelovanom komplexe K bude overený komplex $K_0(M)$. Ideálne by bolo, keby existoval taký model $M(K)$, že $K_0(M) = K$, t. j. $\mathfrak{M}\ (K,K)$ je neprázdny systém. Tento prípad však nemá zmysel predpokladať už aj preto, lebo je ťažké overiť precízne, že každý jav z K patrí i do $K_0(M)$. Okrem toho by v tomto limitnom prípade prostredníctvom fyzikálnej teórie $F(K,M)$ model $M(K)$ vystihoval všetko o komplexe K, čo môže experiment dať, čo je dosť nepravdepodobné, a znamenalo by to do istej miery strnulý, mechanický pohľad na celý gnozeologický proces. Prikloňme sa preto k názoru, že prípad $K_0(M) = K$ je iluzórny.

Napriek tomu však sú modely $M(K)$, ktoré viac-menej vystihujú celý komplex K tým, že $K_0(M)$ je skoro totožný s K. Táto „skorototožnosť" je opäť značne subjektívna. Napríklad v príklade o tvare Zeme je takým výstižným modelom rotačný elipsoid, ktorý verne opisuje „skutočný tvar Zeme". Keď toto tvrdíme, nenapadne nám totiž aplikovať tento model pri opise napr. vertikálneho členenia zemského povrchu. Model rotačného elipsoidu je teda, až na takéto „nepodstatné javy", úplne výstižný a absolútne adekvátny pre tvar našej Zeme. Podobnú vlastnosť má napr. Einsteinov model gravitačných javov, ak budeme považovať za nepodstatné javy mikrokozmu, kde sa žiada kvantový prístup. Ak by sme to tak nečinili, potom neexistuje absolútne adekvátny, t. j. všeobecný model gravitačných javov, ktorý by vystihoval i kvantované gravitačné pole.

Úhrnom teda možno povedať, že model $M(K)$ je pre komplex K *absolútne adekvátny* (alebo všeobecný), *ak* $K_0(M)$ *je až na „nepodstatné" javy totožné* s K.

Máme teda vlastne dve miery adekvátnosti matematického modelu: relatívnu a absolútnu. V prvej prevažuje hľadisko „jednoduchosti", v druhej hľadisko „všeobecnosti", prvá je výrazom skôr praktickej úlohy matematického modelu, druhá gnozeologickej. Takto možno tiež interpretovať dve paralelné snahy fyziky: jednoducho a jednotne „vysvetľovať" fyzikálne javy.

Vráťme sa ešte k otázke univerzálnej fyzikálnej teórie, a teda i matematického modelu. V tejto schéme išlo by o zostrojenie modelu $M(\mathscr{K}) \subset \mathfrak{M}$ takého, že $K_0(M) = \mathscr{K}$. Už sme naznačili, že existencia takého modelu je dosť iluzórna a takýto stav fyziky môže slúžiť iba ako *limitný vzor* dokonalosti fyzikálneho obrazu sveta. Na druhej strane je však nepopierateľným faktom, že prirodzená ľudská snaha po jednotnom vysvetľovaní reality ženie vývoj fyziky smerom k takejto iluzórnej univerzálnej fyzikálnej teórii.

Doposiaľ sme v tomto odstavci „modelovali" obraz fyzikálneho gnozeologického procesu za predpokladu nemožnosti objavovania nových, zatiaľ nekonfrontovaných javov, t. j. za predpokladu uzavretosti komplexu $\mathscr{K}$. V skutočnosti však komplex všetkých fyzikálnych javov, ktoré už boli konfrontované, sa neustále obohacuje, dopĺňa o dotiaľ fiktívne javy, čo nevyhnutne dáva fyzikálnemu gnozeologickému procesu dynamickejší charakter, než vyplýva z tu načrtnutej schémy. Je teda nevyhnutné situáciu opísanú v tomto odstavci v skutočnosti chápať *dynamicky*, v závislosti od vývoja fyziky.

V

Bez toho, že by sme to explicitne robili, poznamenáme, že formalizmus rozvinutý v predošlom odstavci by sa dal do značnej miery aplikovať i na oblasť *ekonómie*, ale nakoniec i iných vied tam, kde má zmysel používať matematické modely. Avšak s tou dôležitou výhradou, že v prípade nefyzikálnych vied budú modely podstatne menej geometrické i menej výstižné z hľadiska celkového poznávacieho procesu, nakoľko ani pri jednom z takýchto komplexov javov nebudú kvantitatívne aspekty také podstatné ako pri javoch fyzikálnych.

Je to však práve ekonómia, v súvislosti s ktorou sa v literatúre najčastejšie používa termín matematický model a pravdepodobne práve ekonómii vďačíme aj za vznik tohto termínu. Treba však poznamenať, že v technickej a populárnej literatúre sa často názvom matematický model označuje vlastne matematická mteóda, t. j. to, čo má ekonómia k dispozícii až potom, keď už vytvorila matematický model.

Sú však isté charakteristické rozdiely medzi týmito dvoma „zákazníkmi" matematikmi: fyzikou a ekonómiou. Fyzika je predovšetkým „starý zákazník" a mnohé klasické matematické disciplíny sa vyvinuli vlastne z požiadaviek fyziky, zatiaľ čo pre ekonómiu neexistujú tak dôkladne vybudované a prepracované matematické disciplíny. Na druhej strane — aspoň sa to dnes tak javí — ekonómia vyžaduje podstatne menej abstraktné modely než fyzika, alebo presnejšie povedané, matematika použiteľná a používaná v ekonómii sa člení viac do šírky (množstvo variantov, zložité kombinácie), zatiaľ čo matematika pre fyziku viac do hĺbky („silne nenázorné" abstrakcie).

Nakoniec, ešte jeden rozdiel je medzi ekonómiou a fyzikou pri používaní matematických modelov. Zdá sa, že — (aspoň dnes) — prevažuje pri tvorení ekonomických teórií vychádzajúcich z matematických modelov hľadisko *jednoduchosti* nad hľadiskom *jednotnosti* (vo zmysle predošlého odstavca) viac, než je to vo fyzike. Toto je opodstatnené jednak „mladosťou" ekonómie ako exaktnej vedy a jednak jej bezprostrednejším stykom s dennou praxou.

VI

Na záver by som chcel pripomenúť, že v tejto poznámke išlo o formalizmus gnozeologického, predovšetkým fyzikálneho procesu videný očami matematika. Ťažisko tohto formalizmu je v IV. odstavci, kde je podaný aj pokus o charakterizáciu atribútu adekvátnosť matematického modelu. Snažil som sa ukázať, že matematický model dáva pravdivé fyzikálne, ale i napr. ekonomické, zákony a závislosti iba do tej miery, do akej bolo správne volené priradenie (h_M) matematických pojmov a vzťahov objektívnej realite. Keďže však „správnosť" tohto priradenia je ťažké overiť a priori, ostáva (technickým) kritériom (absolútnej) adekvátnosti modelu — a teda i pravdivosti poznatku o realite — nakoniec prax, t. j. *experiment*. Alebo ináč, ak experiment ukáže neprijateľnosť deduktívne z matematických modelov odvodených zákonov a vzťahov, treba chybu hľadať nie v samom modeli, ale vo východiskových fyzikálnych, často intuitívnych alebo oprených o názor, úvahách, ktoré viedli k voľbe daného modelu. Z tejto, zdalo by sa prirodzenej, pripomienky však vyplýva dôležitosť dôsledného *explicitného* oddeľovania vo fyzikálnej teórii matematických dedukcií od záverov stavaných na fyzikálnej predstave. Že je táto nepriama výčitka niektorým fyzikálnym monografiám — o populárnej literatúre ani nehovoriac — opodstatnená, o tom svedčí dokonca ešte i dnes celý rad pochybných názorov, napr. o paradoxálnosti Einsteinovej teórie, vychádzajúcich „z pozície zdravého rozumu". Ešte viac môže byť táto pripomienka odôvodnená pre oblasti ekonómie, hlavne v technickej praxi, kde príslušní pracovníci sú príliš často handicapovaní naivným, neformálnym prístupom k matematike.

Celá problematika je tu iba schematicky načrtnutá, a to ani nie v uzavretej forme. Išlo mi však skôr o skicu než o vyčerpávajúcu zprávu, ktorá by zabrala podstatne viac miesta a vyžadovala by iste i hlbší pohľad na vec. Myslím však, že by nebolo na škodu našej súčasnej filozofii prírodných vied, keby v nej matematika zaberala nielen tradičné *čestné* miesto, ale i — viac než doposiaľ — *aktívne* miesto.

Nakoniec by som sa na tomto mieste ešte rád poďakoval T. Münzovi, pracovníkovi Filozofického ústavu SAV v Bratislave, za pripomienky týkajúce sa filozofickej terminológie, ako i za bezprostredný podnet k uverejneniu tejto práce.

О ГНОСЕОЛОГИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Юрай Вирсик

В статье ведется дискуссия о том, какую роль играют математические модели в познавательном процессе с основной установкой на физику. В качестве рациональной характеристики математической модели автор пользуется термином „мера адэкватности" математической модели. Эта мера адэкватности соразмерна с истинностью картины физической действительности в сознании субъекта, т. е. чем адэкватнее модель, тем более правдиво познание действительности, опосредствованное этой моделью.

Автор различает относительную от абсолютной адэкватности математической модели; причем мера относительной адэкватности характеризует стремление к простому познанию частичной действительности, мера же абсолютной адэкватности стремление к единому познанию частичных действительностей. Первая имеет скорее практическое значение, вторая же в большей степени гносеологическое значение.

Оказываетćя, однако, что даже абсолютно адэкватная модель данного комплекса явлений не выражает полностью все количественные стороны этого комплекса и что, следовательно, даже абсолютно адэкватная модель зависит от субъективных факторов. Дальше автор подчеркивает динамику всего познавательного процесса, вытекающую из развития человечества и указывает на невозможность существования универсальной математической модели, с формальной точки зрения одинаково описывающей все физические явления.

В статье описывается формальный механизм создания математических моделей и приводятся примеры из области современной физики. Намечено также сравнение с подобным положением вещей в области экономики.

ON THE GNOSEOLOGIC SIGNIFICANCE OF MATHEMATICAL MODELS

Juraj Virsik

The study deals with the role played by mathematical models in the perceptual process, with special reference to physics. As a rational characteristic of the mathematical model, the term „measure of adequacy" of the mathematical model is introduced here. This measure of adequacy is proportional to the truthfulness of the picture of physical reality in the subject's consciousness, i e., the more adequate the model, the truer will be the perception of reality mediated by this model.

A difference is established between the relative and the absolute adequacy of the mathematical model, the measure of relative adequacy characterizing the efforts at simple perception of

partial reality, while that of absolute adequacy denotes efforts at uniform perception of partial realities. The former has a rather practical, the latter a gnoseological significance. It is apparent, nevertheless, that not even the absolutely adequate model of the given complex of phenomena will fully characterize all the quantitative aspects of this complex, and therefore this absolutely adequate model too, is dependent on subjective factors. Furthermore, the dynamicity of the whole perceptual process, brought about by the developmental progress of mankind, is underlined, and the impossibility of the existence of a universal mathematical model which would formally describe in a uniform way all the physical phenomena, is pointed out.

Formalism in mathematical modelling is dealt with and is illustrated in part by examples from modern physics. Point is also made of a comparison with a similar situation in economics.