POZORUHODNÁ UČEBNICA LOGIKY

Roku 1963 vyšla v Poľsku zaujímavá publikácia z logiky a teórie množín — *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości* od J. Słupeckého a L. Borkowského. Je to príručka, určená predovšetkým poslucháčom filozofie, s vydarene premyslenou didaktickou osnovou a originálnym spracovaním danej problematiky.

Práca sa skladá z dvoch relatívne nezávislých častí, ktoré čiastočne spája a dopĺňa dosť rozsiahly dodatok. Prvá časť obsahuje výrokovú a kvantifikátorovú logiku, druhá teóriu množín. Logické kalkuly prvej časti autori konštruujú metódami rozpracovanými Jaśnowským a Gentzenom v tzv. sytémoch prirodzenej dedukcie. Systém prirodzenej dedukcie možno zhruba charakterizovať ako systém pravidiel, ktoré vymedzujú metódy dokazovania na základe určitých predpokladov. Pretože systém Słupeckého-Borkowského sa od iných systémov do určitej miery líši, opíšeme tu trocha podrobnejšie jeho štruktúru. Pre jednoduchosť sa pritom obmedzíme na výrokový kalkul (VK).[1]

Základnými funktormi daného systému VK sú negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia (budeme ich označovať symbolmi $\neg$, $\triangle$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$). Z týchto funktorov, výrokových premenných a zátvoriek sa budujú správne zostavené výrazy, ktoré sa nazývajú výrokové výrazy VK (od presnej definície, ktorú si čitateľ ľahko sformuluje sám, upúšťame). Pri dokazovaní výrokových výrazov VK vychádzajú autori z predpokladu, že každý výrokový výraz možno pokladať za implikáciu typu $A_1 \rightarrow \{A_2 \rightarrow [A_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (A_{n-1} \rightarrow A_n)\ldots]\}$ (α).[2] Výraz, ktorý nemá formu implikácie je tiež výrazom typu (α), ale nemá nijaký antecedent $(n=1)$. Napríklad vo výraze $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$, $A_1 = [p \rightarrow (q \wedge r)]$, $A_2 = (p \rightarrow q)$, $A_3 = p$, $A_n = A_4 = r$.

Dôkaz je určitá postupnosť výrokových výrazov, ktoré autori nazývajú riadkami dôkazu. Stavbu dôkazu vymedzujú tzv. pravidlá tvorenia dôkazu (PT). Okrem týchto pravidiel existujú ešte pravidlá, ktoré určujú, za akých podmienok možno k daným riadkom dôkazu pripojiť ďalšie výrokové výrazy, vyplývajúce z predchádzajúcich výrazov. Sú to tzv. pravidlá pridávania nových riadkov k dôkazu (PP). Tieto pravidlá charakterizujú vlastnosti uvedených funktorov VK. PT aj PP sa delia na základné a odvodené. Základnými PP sú pravidlá zavedenia a odstránenia konjukcie (ZK, OK), disjunkcie (ZD, OD), ekvivalencie (ZE, OE) a pravidlo odstránenia implikácie (OI).[3] Napríklad podľa pravidla OI, ak máme v niektorom riadku dôkazu výraz A a v niektorom výraz $A \rightarrow B$, môžeme ako ďalší riadok pripojiť výraz B. Za základné PT autori vybrali pravidlo tvorenia nepriameho dôkazu (PTND), ale z didaktických dôvodov uvádzajú hneď i pravidlo tvorenia priameho dôkazu (PTPD). Ako sme už uviedli, tieto pravidlá vymedzujú štruktúru dôkazu.

Dôkaz výrokového výrazu typu (α) je (podľa PTPD) konečná postupnosť riadkov dôkazu, v ktorých sa vyskytujú:

---

[1] Namiesto niektorých výrazov budeme používať skratky uvedené v zátvorke hneď za príslušným skracovaným výrazom.

[2] Podľa schémy (α) môžeme každý výraz, ktorý má formu implikácie, rozložiť na antecedent a konzekvent, ak konzekvent má formu implikácie, možno v ňom tiež vyčleniť časť, ktorá je jeho antecedentom, a časť, ktorá je jeho konzekventom atď., až k výrazu A_n, ktorý už nemá formu implikácie.

[3] O týchto pravidlách sa čitateľ podrobnejšie dočíta v knihe Vojtecha Filkorna *Úvod do metodológie vied*, Bratislava 1960, 325—329. Naše pravidlá ZK, OK sú tam uvedené v (6.21), (6.22), (6.23), pravidlá ZD, OD v (6.24), (6.25), (6.27). V. Filkorn neuvádza pravidlá ZE a OE, podľa ktorých môžeme k riadkom dôkazu, v ktorých sa nachádzajú výrazy $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, pripojiť výraz $A \equiv B$ *(ZE)* a k riadku s výrazom $A \equiv B$ možno pripojiť výraz $A \rightarrow B$ alebo výraz $B \rightarrow A$ (OE). Výrazy A, B tu reprezentujú, podobne ako výrazy A_1, $A_2 \ldots$, A_n v (α) ľubovoľné výrokové výrazy VK.

1. V prvých $n-1$ riadkoch výrazy $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, ktoré sa nazývajú predpoklady (Pr) dôkazu.

2. V ďalších riadkoch sa vyskytujú už dokázané výrazy (vety) alebo ľubovoľné výrokové výrazy, získané na základe predchádzajúcich riadkov pomocou PP.

3. V poslednom riadku dôkazu je výraz A_n.

Napr. výraz $[p\rightarrow(q\rightarrow r)]\rightarrow[(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)]$ dokážeme takto:

1. $[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$	Pr,
2. $(p\rightarrow q)$	Pr,
3. p	Pr,
4. $(q\rightarrow r)$	OI 1, 3,
5. q	OI 2, 3,
6. r	OI 4, 5.

V 1.—3. riadku sú Pr dôkazu, 4. riadok dostaneme pomocou OI aplikovanom na 1. a 3. riadok a podobne i ďalšie riadky.

Dôkaz výrazu formy implikácie, v ktorom sa nachádzajú predpoklady $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sa nazýva dôkaz pomocou predpokladov alebo predpokladový dôkaz. Ak dokazovaný výraz nemá formu implikácie, v jeho dôkaze sa predpoklady $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ nevyskytujú. Preto sa priame dôkazy takých výrazov nazývajú obyčajnými priamymi dôkazmi. V týchto dôkazoch je v každom riadku nejaká veta (už dokázaný výraz), posledným riadkom dôkazu je dokazovaný výraz, získaný na základe predchádzajúcich výrazov uplatnením PP.[4] Napr. výraz $[(p\wedge q)\rightarrow r]\equiv[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$ môžeme za predpokladu, že výraz $[(p\wedge q)\rightarrow r]\rightarrow\rightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$ a výraz $\{p\rightarrow(q\rightarrow r)\rightarrow[(p\wedge q)\rightarrow r]\}$ je už dokázaný, dokázať takto:

1. $[(p\wedge q)\rightarrow r]\rightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$	veta,
2. $[p\leftarrow(q\rightarrow r)]\rightarrow[(p\wedge q)\rightarrow r]$	veta,
3. $[(p\wedge q)\rightarrow r]\equiv[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$	ZE 1, 2.

Pri nepriamom predpokladovom dôkaze sa po riadkoch s predpokladmi $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ v n-tom riadku vyskytuje výraz $\neg A_n$ (tzv. predpoklad nepriameho dôkazu). V ďalších riadkoch sú výrazy získané na základe predchádzajúcich výrokových výrazov a viet pomocou PP. V poslednom riadku nepriameho predpokladového dôkazu je výraz V (alebo $\neg V$), ktorý je v spore s nejakým predchádzajúcim výrazom $\neg V$ (alebo V).

Napríklad výraz $(p\vee q)\rightarrow(\neg q\rightarrow p)$ dokážeme podľa PTND takto:

1. $(p\vee q)$	Pr,
2. $\neg q$	Pr,
3. $\neg p$	Pr nepriameho dôkazu,
4. q	OD 1, 3; spor medzi 2. a 4. riadkom.

V nepriamom dôkaze výrazu, ktorý nemá formu implikácie, prvým riadkom je negácia dokazovaného výrazu, v ďalších riadkoch sa vyskytujú vety a výrazy, ktoré možno získať na základe predchádzajúcich pomocou PP. V poslednom riadku je výraz, ktorý je v spore s nejakým predchádzajúcim výrokovým výrazom. Tento dôkaz sa nazýva obyčajný nepriamy dôkaz.

Základným PT je PTND, lebo každý priamy dôkaz možno transformovať na nepriamy. Na základe základných pravidiel a dokázaných výrokových výrazov dostaneme odvodené PP i odvodené PT. Odvodené pravidlá sú teoreticky zbytočné, ale ich uplatnením sa mnohé dôkazy dajú skrátiť.

Metodologické problémy uvedeného systému riešia autori len nepriamo: dokazujú, že ich systém je ekvivalentný jednému axiomatickému systému VK Łukasiewicza, ktorý je neprotirečivý a sémanticky úplný. Z ekvivalentnosti týchto systémov vyplýva, že i systém Słupeckého-Borkowského je neprotirečivý a sémanticky úplný. Syntaktickú úplnosť a nezávislosť základných pravidiel daného systému nedokazujú.

Zaujímavým spôsobom zavádzajú tabuľky pre dvojargumentové funktory VK. Vychádzajú pritom z tabuľky negácie, skonštruovanej na základe intuitívne evidentných úvah, a z predpokladu, že základné i odvodené PP majú vlastnosť viesť od pravdivých

[4] Obyčajný priamy dôkaz možno tiež charakterizovať ako predpokladový dôkaz, v ktorom sa vyskytujú len riadky uvedené v 2. a 3. bode PTPD.

výrokov zasa v pravdivým.[5] Napr. známu tabuľku konjunkcie, uvedenú ďalej, možno na základe pravidiel ZK, OK (a spomenutej vlastnosti) zdôvodniť nasledujúcou úvahou. Podľa pravidla ZK, ak je pravdivý výraz A i výraz B, tak je pravdivý i výraz $A \wedge B$ (tak dostaneme prvý riadok tabuľky). Z pravidiel OK (ak je pravdivý výraz $A \wedge B$, je pravdivý i výraz A; ak je pravdivý výraz $A \wedge B$, je pravdivý i výraz B) vyplýva, že ak je nepravdivý jeden z výrazov A, B, nemôže byť pravdivá ani konjunkcia $A \wedge B$ (tak dostaneme ďalšie riadky tabuľky). Podobne postupujú i pri výstavbe tabuliek ostatných dvojargumentových funktorov VK. Tento postup má ur-

A B	$A \wedge B$
1 1	1
0 1	0
1 0	0
0 0	0

čité didaktické prednosti, ktoré sa prejavujú hlavne pri zavádzaní tabuľky implikácie. Zaujímavé úvahy autori rozvíjajú pri interpretácii funktora prirodzeného jazyka „ak ..., tak ..." Pri tejto príležitosti definujú i pojem vyplývania (podľa Ajdukiewicza). Kusou zmienkou o neklasických systémoch VK[6] sa výklad výrokovej logiky končí.

Kvantifikátorový kalkul (KK) I. stupňa je vybudovaný podobne ako VK. Okrem pravidiel (PT i PP) VK, zovšeobecnených na výrokové výrazy KK I. stupňa, zavádzajú v ňom nové základné PP. Sú to pravidlá zavedenia a odstránenia všeobecného a existenčného kvalifikátora. Pomocou týchto pravidiel dokazujú niektoré výrokové výrazy KK I. stupňa (ide napospol o vety, ktoré sú známe z axiomaticky budovaných systémov KK I. stupňa) a konštruujú ďalšie odvodené pravidlá systému. Osobitný dôraz pritom kladú na pravidlá, ktoré sa vyskytujú ako základné v iných systémoch KK I. stupňa.

Jediná axióma vyskytujúca sa v logických systémoch tejto publikácie je „$x = x$", ktorú zavádzajú v KK 1. stupňa s rovnosťou. V tomto kalkule zavádzajú i nové základné pravidlo, tzv. pravidlo extenzionality pre rovnosť. Autori zostali čitateľovi dlžní odpoveď, prečo sa v systéme prirodzenej dedukcie objavila i axióma.[7] Pozornosť si zaslúži aj časť o definíciách. Formulujú v nej podmienky správnosti normálnych, podmienkových a rekurentných definícií ako aj pravidlo zavedenia definície do dôkazu. Pomocou tohto pravidla zdôvodňujú odvodené pravidlo dosadzovania za výrokové funkcie KK I. stupňa. V závere I. časti načrtávajú KK vyšších stupňov a uvádzajú niekoľko sformalizovaných matematických dôkazov.

Logické prostriedky, rozvinuté v I. časti, v značnej miere sa používajú pri výklade teórie množín. Prejavuje sa to hlavne na technike dokazovania a symbolickej formulácii viet. Temer všetky dôkazy sú sformalizované. I táto časť má elementárny ráz. Čitateľ sa v nej oboznámi so základnými pojmami a vetami algebry tried, teórie mohutnosti a s problematikou usporiadaných množín (dosť obšírne sa zaoberajú aritmetikou a nerovnosťami kardinálnych čísiel, nekonečnými množinami, mohutnosťami množiny prirodzených a reálnych čísiel, axiómou výberu, ordinálnymi typmi usporiadaných množín a rezmi usporiadaných množín). Didaktická ohľaduplnosť viedla autorov k tomu, že teóriu množín

[5] Formuláciu PP, ktorú všeobecne charakterizuje zvrat „ak sa v dôkaze vyskytujú riadky s výrazmi $V_1, V_2, \ldots, V_k$, tak k dôkazu môžeme pripojiť ako ďalší riadok výraz V_{k+1} (kde $k \geq 1$), možno nahradiť formuláciou „ak sú všetky výrokové výrazy $V_1, V_2, \ldots, V_k$ pravdivé, tak je pravdivý i výraz V_{k+1} ".

[6] Vzhľadom na to, že príručka je určená poslucháčom filozofie, autori mohli omnoho viac miesta venovať neklasickým systémom VK. Nebol by tým utrpel ani rozsah knihy, ani jej elementárnosť.

[7] Túto odpoveď možno nájsť v článku autorov *A Logical System Based on Rules and its Application in Teaching Mathematical Logic*, Studia logica zv. VII, Poznaň 1958, 71–105.

nepodávajú ani v prísnej axiomatickej podobe ani na základe teórie typov. O tých sa zvedavejší čitateľ dozvie v dodatku. Výklad sa opiera o niekoľko základných tvrdení (zvolených v rámci určitých relatívne samostatných tematických oblastí) a veľké množstvo definícií, na základe ktorých dokazujú ďalšie vety. Len málo viet uvádzajú autori bez dôkazu. Sú to zväčša vety, ktorých dôkaz prenechávajú čitateľovi. Iba v niekoľkých prípadoch upustili od dôkazu pre jeho náročnosť a komplikovanosť. Žiaľ, medzi poslednými sa vyskytujú také dôležité vety, ako je Cantorova-Bernsteinova veta a Zermelova veta o dobrom usporiadaní množín.

Autorom sa veľmi úspešne podarilo nenáročným spôsobom a v pomerne širokom rozsahu uviesť čitateľa do teórie množín.

Dodatok prehlbuje predovšetkým problematiku II. časti. Prebratá látka autorom umožňuje stručne formulovať antinómie teórie množín a poukázať na dve najznámejšie možnosti výstavby teórie množín bez antinómií — teóriu typov a Zermelovu axiomatickú teóriu množín. Možno sa tam dočítať aj o hlavných princípoch teórie sémantických kategórií. Na problematiku I. časti čiastočne nadväzujú úvahy o definíciách niektorých pojmov teórie množín v logike (pojem mohutnosti množiny, ordinálneho typu usporiadanej množiny a usporiadanej dvojice). Po krátkej zmienke o tom, ako možno základné pojmy Peanovej aritmetiky prirodzených čísiel definovať pomocou pojmov teórie množín, nasleduje analýza pojmu množiny z filozofického hľadiska.

Na konci knihy je pripojený úplný zoznam definícií, lem a viet (aj index používaných znakov), ktorý čitateľovi uľahčí čítanie dôkazov a vypracúvanie cvičení.

Recenzovanú príručku možno odporúčať nielen záujemcom, ktorí sa chcú oboznámiť s elementárnymi poznatkami matematickej logiky a teórie množín, ale i tým, ktorí majú o logiku hlbší záujem. Poslúži im ako výborný úvod do štúdia náročnejšej literatúry. Je to kniha napísaná presne a prístupne. Iba v druhej časti sú autori miestami príliš struční, ale pozorný čitateľ nebude mať pri jej štúdiu veľké ťažkosti. Hoci filozofom bude v tejto príručke všeličo chýbať(hlavne metodologická problematika), trebu ju odporúčať predovšetkým im.

P. Cmorej