

O LOGICKEJ STAVBE JAZYKA

VOJTECH ILLENČÍK

Keď vyslovíme alebo napíšeme „strom je zelený“, „štyri je párne číslo“, „dve je menšie než tri“, čo v matematike označujeme „ $2 < 3$ “, potom takéto písomné záznamy nazývame *výrazmi*. Prvé sú formulované *prírodným jazykom* slovenským, posledný aj *umelým jazykom* matematickým. Výraz „pre každé dve prirodzené čísla a, b platí $a + b = b + a$ “ je výraz formulovaný *zmiešaným jazykom* prirodzeno-umelým. *Jazyky* sú určité sústavy znakov, ktorým sa ľudia dorozumievajú a môžu byť *akustické* (hovorené), *grafické* (písané) i *gestovo-mimické*. (1)

Každý jazyk sa skladá z výrazov jednoduchých i zložených a každý výraz má materiálnu stránku, t. j. grafický alebo akustický záznam a pojmovú stránku, to jest zmysel výrazu. Pojmovú stránku jednoduchých a zložených výrazov, t. j. ten moment, že sú nositeľmi určitého zmyslu, budeme označovať *zmyslupnosťou*, *sensovosťou* výrazov. (2)

Jednoduché výrazy v prírodných jazykoch sú *slová*, v umelých jazykoch znaky, *symbolsy*.

Hoci zložených výrazov v jazykoch je nevyčerpatelné množstvo, spôsoby *skladania* jednoduchých výrazov do zložených nie sú ľubovoľné; sú viazané gramatickými a hlavne syntaktickými, skladbovými pravidlami jazyka. Zložené výrazy, ktoré boli utvorené podľa pravidiel syntaxe, majú zmysel, sens. Napríklad podľa pravidiel syntaxe slovenského jazyka zložený výraz „Jarné slnce príjemne hreje“ je zmysluplný zložený výraz; podobne „ $2 < 3$ “ je podľa pravidiel umelého matematického jazyka utvorený zmysluplný zložený výraz. No zloženina „škola alebo dobre“ je bez sensu, bez zmyslu, nonsens. Aj „ $2 + <$ “ je nezmysel. (3)

Dôraz na pravidelnú syntaktickú stavbu zložených výrazov v ľubovoľnom jazyku a skúmanie podmienok pre zmyslupnosť (sensovosť) zložených výrazov je jedným z najdôležitejších problémov súčasnej logiky. V tejto úvahe sa pokúsime zistiť syntaktické podmienky zmyslupnosti zložených výrazov používaných v živej reči, pri vyučovaní vôbec a v matematike zvlášť. (4)

VÝROKY

Skúmame nasledujúce zmysluplné zložené výrazy: „Pravda je, že Devín leží pri Dunaji“, „Pravda je, že dvakrát dva je štyri“. Tieto výrazy môžeme rozložiť tak, že zložku „Devín leží pri Dunaji“, „ $2 \cdot 2 = 4$ “, teda určitú časť pôvodného výrazu postupne zastúpime iným výrazom. Takto, keď po slovách „pravda je, že...“ položíme „Žilina leží pri mori“, alebo „ $2 + 3 = 5$ “, opäť obdržíme zmysluplné výrazy: v prvom prípade „Pravda je, že Žilina leží pri mori“ *nepravdivý* a v druhom prípade

„Pravda je, že $2 + 3 = 5$ “ *pravdivý*. No výraz „Najvyšší štít Tatier“, „kdežto“, „ $4 + 3$ “... v tom samom spojení, to jest „Pravda je, že najvyšší štít Tatier“, „Pravda je, že kdežto“, „Pravda je, že $4 + 3$ “, sú bez sensu, bez zmyslu. (5)

Každý zložený výrok, ktorý, keď ho položíme po slovách „pravda je, že“, dáva s nimi zmysluplný celok, menujeme výrok. Podľa klasickej logiky výrok je slovné vyjadrenie súdu. Dialekticky: výrok je výrazom poznania objektívneho odrazu skutočaa. (6)

Pravdivosť a nepravdivosť výrokov nazývame *logickými hodnotami*. Pravdivosť označujeme „1“, nepravdivosť, faloš „0“. (7)

Všetky výroky v živej reči i v matematike sú tej povahy, že majú zmysel, sens a jednu z oboch logických hodnôt: pravdivosť „1“ alebo nepravdivosť „0“. (8)

Logika, ktorá je postavená na dvoch logických hodnotách pravdy a nepravdy výrokov, menuje sa *dvojhodnotová logika*. (9)

Všetky systavy logické bežne známe, ako Aristotelova logika, logika stoikov, tradičná logika formálna i symbolická sú dvojhodnotové logiky, sú založené na poznaní, že každý výrok je alebo pravdivý alebo nepravdivý.

S problémom viachodnotových logík sa tu zaoberať nebudeme.

Slovo „výrok“ používame tu v logickom, a nie gramatickom zmysle. *Vety rozkazovacie* („Dávaj pozor!“), *opytovacie* („Kde si bol včera?“) a *želacie* („Bár by si sa bol učil“) sú také, ktoré, keď ich položíme po slovách „pravda je, že...“, nedávajú s nimi zmysluplný celok; preto nie sú výrokmi v práve prijatom logickom zmysle, hoci v gramatike sa nazývajú vetami (200—205).

DRUHY VÝROKOV

Skúmame tieto výroky:

„Slnce svieti“, „Táto lipa je zelená“, „3 je prvočíslo“, (11)

„Štúr žil pred Kraskom“, „Ján je vyšší než Pavol“, „ $2 < 3$ “. (12)

Čo sa deje, keď výroky utvárame a vyslovujeme? Akú spoločnú vlastnosť majú tieto (11, 12) výrazy ako výroky?

Všetky tieto výroky majú tú spoločnú vlastnosť, že sa v každom výroku o niečom vyslovuje niečo. Tak vo výrokoch (11)

o jednočlennom predmete, objekte	vyslovuje sa vlastnosť	
„Slnce“	„svieti“	(13)
„Táto lipa“	„je zelená“	
„3“	„je prvočíslo“.	

Tieto vyabstrahované spoločné skladbové, syntaktické zložky výrokov už od časov Aristotela menujeme

<i>jednočlenné logické subjekty, podmety, označíme ich x.</i>	<i>jednomiestné logické predikáty, prísudky, označíme ich P.</i>	(14)
---	--	------

Celý výrok s predikátom a subjektom sa zaužívalo písať vzorcom:

$P(x)$. (15)

Slovosled v slovenčine sa nezhoduje so sledom členov vo vzorci $P(x)$.

Vo výrokoch (12)

<i>o dvojici osôb,</i> <i>o dvojici predmetov</i> „Štúr, Krasko“ „Ján, Pavol“ „2, 3“.	<i>vyslovuje sa</i> <i>dvojčlenný vzťah</i> „žil pred“ „je vyšší než“ „<“.	(16)
---	--	------

Spoločné skladbové, syntaktické zložky týchto výrokov sú

<i>dvojčlenné</i> <i>logické subjekty,</i> <i>podmety</i> označme ich x, y .	<i>dvojmiestné</i> <i>logické predikáty,</i> <i>prísudky</i> označme ich R .	(17)
--	--	------

Výroky s takouto skladbou zapisujeme vzorcom: $R(x, y)$. (18)

Rozložme ešte tieto výroky:

„Janko dal Paľkovi jabĺčko“,	
„ $2 + 3 = 5$ “	
„ $2 \cdot 2 = 4$ “.	(19)

V týchto výrokoch vystupuje

<i>trojica predmetov:</i> „Janko, Paľko, jabĺčko“ „2, 3, 5“ „2, 2, 4“; Takéto <i>trojčlenné logické</i> <i>subjekty</i> budeme označovať: x, y, z .	<i>o tejto trojici predmetov vyslovuje sa</i> <i>trojčlenný vzťah, relácia s významom</i> <i>výkonu</i> „dal“ „sčítal“ „násobil“. Takéto <i>trojmiestné logické predikáty</i> budeme označovať: U .	(20)
---	---	------

V normalizovanom písmennom tvare výrok s trojčlenným logickým subjektom a trojmiestným predikátom píšeme:

$$U(x, y, z). \quad (21)$$

FUNKCIE

Skladbovú, syntaktickú úlohu subjektu a predikátu vo výrokoch možno ešte ďalej rozkladať. Napríklad vo výroku „Slnce svieti“ pri tom istom, stálom, nemennom predikáte „svieti“ môžeme logický subjekt „slnce“ nahrádzať, zastupovať inými vhodnými názvami, napr. „lampa“, „sviečka“, „oheň“ ... a po dosadení dostávame nové, zmysluplné, pravdivé výroky: „Lampa svieti“, „Sviečka svieti“, „Oheň svieti“. (22)

Teda kým predikát „svieti“ bol *stály*, zatiaľ výraz na mieste subjektu sa *menil*. Také výrazy, ktoré sú zložené zo zložky *stálej* a zo zložky *premennej*, nazývame funkcie. (23)

$$\begin{array}{c} \text{funkcia} \\ \hline \text{stála zložka} \quad \text{premenná zložka} \end{array} \quad (24)$$

Funkcie sú také zmysluplné zložené výrazy, ktoré majú aspoň jednu voľnú premennú (zložku). (25)

Vo funkčných výrazoch stálu zložku nazývame *funktora* a premennú zložku *argument*; stručne naznačíme:

$$\begin{array}{c} \text{funkcia} \\ \hline \text{stála} \quad \text{premenná} \\ \text{funktora} \quad \text{argument} \end{array} \quad (26)$$

Písmenným vzorcom

$$P(x).$$

Výraz, ktorý dostaneme z funkcie tak, že na miesto argumentu *dosadíme* určitú *hodnotu argumentu*, nazýva sa *hodnota funkcie*: (27)

$$\begin{array}{c} \text{hodnota funkcie} \\ \hline \text{funktora} \quad \text{hodnota argumentu} \end{array}$$

KATEGÓRIE VÝRAZOV

Z doterajšieho rozboru výrazov môžeme ustáliť, že výrazy podľa toho, akú úlohu hrajú vo funkčnej stavbe výrazov, sú alebo *výroky*, alebo *názvy*, alebo *funktory*. (28)

Výrokmi boli napr. výrazy „Slnce svieti“, „Lampa svieti“, „Oheň svieti“, „3 je prvočíslo“, „5 je prvočíslo“.

Názvy sa vyskytovali vo výrokoch na mieste argumentov, a to v podobe *všeobecných*, *generálnych mien*, ako „lampa“, „oheň“, alebo *vlastných mien*, ako „Slnce“, „Ján“, „2“, „5“.

Názvy individuálne, t. j. *vlastné mená* budeme označovať písmenom „N“ a *názvy všeobecné* písmenom „n“.

Funktory v uvedených príkladoch sa vyskytovali ako *predikáty*. No *predikáty* sú len jedným druhom *funktorov*, a to takým, ktorý umožňuje utvárať *výroky*, preto ho nazveme *výrokotvorným funktorom* *názvových premenných*. (30)

Výrazy sa vyskytujú hlavne v *textoch*, preto je účelné označiť kategóriu výrazu na samom výraze; k tomu sa dobre hodí *zátvorkovanie*. Dohodneme sa, že (31)

názvy dáme do oblých zátvoriek: (lampa), (Slnce), (strom), (32)

výroky do hranatých zátvoriek: [Ján píše], [Slnce svieti], (33)

výrokotvorné funktory do hranatých zátvoriek s vrchným indexom „F“, to jest []^F, kde hranatosť zátvoriek má označovať *výrokotvornosť* a vrchný index *F* — *funktora*. (34)

Pri *výrokotvorných funktoch* treba ešte označiť aj *premennú*, ktorú označíme *dolným indexom* *n*, alebo *N*, podľa druhu *premennej*, to jest *formulou*: []_n^F, ktorá znamená *výrokotvorný funktor generálno-názvovej premennej*, alebo []_N^F, čo označuje *výrokotvorný funktor individuálno-názvovej premennej*.

Premenné alebo *argumenty* vo funkciách môžu byť *nielen (názvy)*, ale aj *celé [výroky]* a *funktory*. Aby sme *argument* rozlíšili od *funktora*, *argument* označíme

(pokiaľ to bude potrebné), *dolným bodovým indexom*, napr. [(Ján). [píše]_N^F], [(Slnce). [svieti]_N^F], [(traktor). [orie]_n^F]. (36)

Výrok „ $2 < 3$ “ rozložený vyzerá takto: [(2). [$<$]_{2N}^F(3)]. Vzťah „byť menším“ („ $<$ “) vyjadruje výrokotvorný funktor dvoch premenných individuálno-názvových. Vo výroku

[(Janko). [dostal]_{3N}^F (od Paľka jabĺčko).]

predikát „dostal“ znamená výrokotvorný funktor troch premenných názvových: $U(x, y, z)$. (37)

VÝROKOVÉ FUNKCIE

Výrazy „ x píše“, „ x je prvočíslo“, „niekto dostal od niekoho niečo“, „ x dosta od y z“ sú výrokové funkcie.

Výrokové funkcie názvových premenných sú také funkcie, ktoré obsahujú premenné názvové a stanú sa výrokmi, keď za premenné dosadíme názvy.

Výrokové funkcie označíme písmenami takto:

$P(x)$ $R(x, y)$ $U(x, y, z)$

a zátvorkovaním

(38)

[]_N^F(). []_{2N}^F(,). []_{3N}^F(, ,).

Slovosled hovorovej reči sa často nezhoduje so slovosledom v normalizovanom logickom funkčnom zápise. Napr.

(x). [píše]_N^F (x). [je menšie ako]_{2N}^F(y). (x). [dal]_{3N}^F(y, z). (39)

Katégoriu výrokovej funkcie v texte označíme [] *vrchným bodovým indexom* a podľa potreby spodným indexom označíme premennú:

[x píše]_x [x je prvočíslo]_x. (40)

Hodnota výrokovej funkcie (27) je *výrok*, ktorý dostaneme, keď na miesto názvovej premennej *dosadíme* vhodné *hodnoty* názvovej *premennej*. Napr. hodnota výrokovej funkcie

(41)

[x je prvočíslo]_x je výrok [5 je prvočíslo].

NÁZVOVÉ FUNKCIE

Subjektovo-predikátový výrazový aparát odráža len časť tých vzťahov, ktoré sa dajú vyjadriť funkčnými formami. Menovite v matematike s ním nevystačíme. Už celkom všedný výraz „ $x + 2$ “ nedá sa subjektovo-predikátovo interpretovať; lebo „ $x + 2$ “ nie je výrok, nie je ani subjekt ani predikát. Čím je teda? Predovšetkým „ $x + 2$ “ je výraz *funkčný*, lebo má premennú (25). Po dosadení prípustných hodnôt argumentu x (27), tu názvov čísel, vo výsledku sa tvorí vždy *názov* určitého individuálneho čísla; napr. pre $x = 3$ z $x + 2$ bude $3 + 2$, čo po prevedení funktorom „ $+$ “ označeného výkonu znamená názov individuálneho čísla 5. Funktor „ $+$ “ tvorí z výrazu „ $x + 2$ “ vo výsledku názov, preto „ $+$ “ je „názvotvorný funktor“ dvoch

premenných názvových, ktorý zátvorkovaním označíme takto: $(()_{2N}^F(,))$. Výraz „ $x + 2$ “ je teda *názvová funkcia* premenných individuálno-názvových:

$$((x) \cdot (+)_{2N}^F(2))_x$$

Názvové funkcie premenných názvových sú také funkcie, ktoré obsahujú premenné názvové a stanú sa názvami, keď za premenné dosadíme vhodné názvy. (42)

Vlastné mená sú názvy osôb, miest, riek, (Štúr), (Devín), (Váh); označujú skutočné jedinečné individuálne osoby a veci. (43)

Podstatné mená ako „knihá“, (rieka), (strom), (bod)... znamenajú už *názvotvorné funkctory* individuálnych názvových premenných: $(()_N^F$. Napr. „rieka“ po syntaktickej analýze bude $((rieka)_N^F())$, čo je funkcia názvotvorná s individuálno-názvovou premennou, v ktorej „rieka“ hrá úlohu názvotvorného funkctora. Ak na miesto argumentu dosadíme vhodný názov, napr. „Váh“, dostaneme *hodnotu názvovej funkcie*, to jest *názov*: „rieka Váh“, $((rieka)_N^F(Váh))$. V gramatike slovo „Váh“ sa nazýva „určovačím prístavkom“, ktorý bližšie pomenúva základné podstatné meno. V matematike neustále používame túto názvovú funkčnú formu:

$$((\text{číslo})_N^F(5)), \quad ((\text{priamka})_N^F(a)), \quad (\text{úsečka})_{2N}^F(A, B), \\ ((\text{trojuholník})_{3N}^F(A, B, C)), \quad \text{alebo} \quad ((\Delta)_{3N}^F(A, B, C)).$$

Všeobecne môžeme písať:

$$((\text{podstatné meno})_N^F(\text{vlastné meno})) \quad (44)$$

Prídavné mená vzhľadom na podstatné mená sú názvotvorné funkctory. Pretože podstatné mená, substantíva, sú už funkctormi, prídavné mená ako prívlastky, atribúty, znamenajú už „funkctory funkctorov“; presne: názvo-funktorotvorné funkctory premenných názvo-funktorových. Syntaktickou formulou:

$$((\text{prívlastok})_n^{FF}(\text{podstatné meno})_n^F)^F, \quad ((\text{atribút})_n^{FF}(\text{substantívum})_n^F)^F \quad (45)$$

$$\text{Např. } ((\text{zelený})_n^{FF}(\text{strom})_n^F)^F, \quad ((\text{párne})_n^{FF}(\text{číslo})_n^F)^F;$$

výslednica všade je $(()^F$, to jest *názov všeobecný*.

Okrem vlastných, podstatných a prídavných mien názvového, nominálneho významu sú ešte *zámená*: *osobné zámená* (ja), (ty), (on). (46)

Prisvojovacie zámená sú funkctory individuálno-názvotvorné $((\text{môj})_n^F(\text{otec}))$, $((\text{tvoja})_n^F(\text{knihá}))$; *ukazovacie zámená* sú tiež individuálno-názvotvorné funkctory $((\text{ten})_n^F(\text{obraz}))$. (47)

Predložky sú názvotvorné funkctory: $((\text{za})_n^F(\text{domom}))$, $((\text{s})_n^F(\text{radosťou}))$, $((\text{od})_n^F(\text{srдца}))$, $((\text{z})_n^F(\text{hnevu}))$. (48)

Príslovky sú (názvy), alebo (funkctory)^F

miesta,	času,	spôsobu,	príčiny	
$\left(\begin{array}{c} \text{tu,} \\ \text{tam,} \\ \text{dolu,} \\ \text{naľavo} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} \text{teraz,} \\ \text{vtedy,} \\ \text{nikdy,} \\ \text{zajtra} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} \text{tak,} \\ \text{nejako,} \\ \text{treba,} \\ \text{vyše} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c} \text{preto,} \\ \text{nato,} \\ \text{zato} \end{array} \right)$	(49)

Spojky môžu byť medzinázvové, alebo medzivýrokové. *Spojky podradovacie*, subordináčné sú názvotvorné funktoři, ale *premenných výrokových* ($(\)_V^F$ [.]), napr.

$$\begin{aligned} & ((\text{kde})_V^F[\text{si bol}]), ((\text{kým})_V^F[\text{sa zápas skončí}]), ((\text{že})_V^F[\text{sa zle cíti}]), \\ & ((\text{keby})_V^F[\text{sa žiak neučil}]), ((\text{aby})_V^F[\text{získali vedomosti}]). \end{aligned} \quad (50)$$

Spojky priradovacie, koordináčné, medzinázvové, ako „a“, „i“, „aj“ sú názvotvorné funktoři dvoch premenných názvových, napr. ((Janko). (a) $_{2N}^F$ (Paľko).), ((dve). (a) $_{2N}^F$ (tri).), ((ráno). (alebo) $_{2n}^F$ (večer).). (51)

Zo slovesných výrazov názvového významu sú *slovesné podstatné mená*: (nesenie), (učenie), *infinitívy*: (nosiť), (chodiť). (52)

Úvodzovky [„“] sú názvotvorné funktoři argumentov výrokových, názvových, funktořových, podľa toho, čo sa uvádza. Napr. „Ján píše“, (([Ján píše]) $_V^F$). Pri uvádzaní argument sa píše do funktořa ([.] $_V^F$). (53)

Analyzujme syntakticky rozvitejší výrok:

$$\left[((\text{Usilovný})_n^F (\text{žiak})_n^F) . [\text{píše}]_n^F \right].$$

Všetky výroky, ktoré znamenajú výrazy zložené zo slovesa ako výrokovtorného funktořa a z príslušných, obyčajne mnohočlenných, argumentov, dajú sa uviesť na tento normalizovaný tvar:

$$[\text{sloveso}]_{6n}^F (\text{kto, čo, kde, kedy, ako, prečo}). \quad (54)$$

$$\left[\left[\begin{array}{l} \text{predikát} \\ \text{[v indikatíve]} \end{array} \right]^{FF} \left(\begin{array}{l} \text{subjekt, objekt, príslovkové určenia} \\ \text{podmet, predmet, miesta, času, spôsobu, príčiny} \end{array} \right) \right] \\ \left[\text{korelátor} \right]_{kn}^F (\text{koreláta}).$$

$$\text{Čistá funkčná forma pre (54) bude: } P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad (55)$$

Tu si môžeme všimnúť, že všetky opytovacie slová ako *opytovacie zámená*: kto?, čo? — otázky na podmet; koho?, čo?, koho?, čoho?, komu?, kým?,... — otázky na predmet; *Opytovacie príslovky* na určenie *miesta*: kde?, odkiaľ? kam?, kadiaľ?, kopiaľ? — na určenie *času*: kedy?, v ktorom čase? ako dávno?, dokiaľ?, ako dlho?, — na určenie *spôsobu*: ako?, akým spôsobom?, v akom zmysle?, vzhľadom na čo?, koľko?, aký stupeň? — na určenie *príčinnosti*, pôvodcu, pôvodu, prostriedku a nástroja: kým?, čím?, z čoho?, prečo? — ďalej otázky na *prívlastok*: aký?, ktorý?, či? — otázky na *doplňok* zostrojené z opytovacieho slova aký? v najširšom zmysle slova toho, kto?, čo?, či? — sú výrazy, ktorý označujú *premennú*, argument. Teda aj živá reč má výrazy na označenie premenných, argumentov vo funkciách či už výrokových, názvových, alebo funktořových. (56)

Syntaktická analýza zložitejšej vetvy:

$$\begin{aligned} & \left(((\text{veľmi})_n^F (\text{starostlivý})_n^F (\text{otec})_n^F) . [\text{ide}]_{5n}^F ((\text{do})_n^F (\text{mesta})_n^F) . \\ & ((\text{včas})_n^F (\text{ráno})_n^F) . ((\text{veľmi})_n^F (\text{rýchle})_n^F) . ((\text{pre})_n^F (\text{lieky})_n^F) . \end{aligned} \quad (57)$$

V tomto príklade sloveso „ide“ je výrokovtvočný funktoer piatich názvových premených: $[ide]_{5n}^F$ (kto, kam, kedy, ako, načo); formulkou: $P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. (58)

V matematike výkony, operácie, sú názvovtvočné funktoery: napr. $2x + 3$ po rozčelení bude $\left(\left((2) (\cdot) \right)_{2N}^F (x) \right) \left(+ \right)_{2N}^F (3) \right)_x^F$, alebo „ $a + b = b + a$ “, $\left[\left((a) (+) \right)_{2N}^F (b) \right] [=]_{2N}^F$
 $\left((b) (+) \right)_{2N}^F (a) \right)_{a,b}^F$ je (59)

výroková funkcia dvoch premenných individuálno-názvových. V matematickom zázname funkcie $f(x)$ „ f “ znamená názvovtvočný funktoer individuálno-názvovej premennej:

$$\left((f)_{N}^F (x) \right)_x^F \quad (60)$$

FUNKTOROVÉ FUNKCIE

Výraz „strom je zelený“ syntaktický rozčleníme takto:

$$\left[(\text{strom})^F [\text{je zelený}]_n^F \right], \quad (61)$$

kde výraz „je zelený“ znamená predikát; presne výrokovtvočný funktoer všeobecno-názvového argumentu. Predikát „je zelený“ je zložený z výrazov „je“ a „zelený“. „Zelený“ je prídavné meno, adjektívum, so syntaktickou úlohou *doplňku*, čiže znamená názvovo-funktoerotvočný funktoer: $(\text{zelený})^{F^F}$. Sloveso „je“ zasa je taký výraz, ktorý so svojím doplnkom utvára výrokovtvočný funktoer všeobecno-názvového argumentu. Čiže „je“ treba pokladať za *výrokovtvočno-funktoerotvočný funktoer*. Inými slovami „je“ znamená funktoer funktoeru, funktoer druhého stupňa, preto označíme: $[\text{je}]^{F^F}$. Úplné syntaktické členenie daného (61) výroku bude

$$\left[(\text{strom})^F \left[[\text{je}]_{n^F}^{F^F} (\text{zelený})_{n^F}^{F^F} \right] \right] \quad (62)$$

Výrokovtvočno-funktoerotvá funkcia v danom príklade s premenným argumentom $(X)^{F^F}$ bude:

$$\left[[\text{je}]_{n^F}^{F^F} (X)^{F^F} \right]^F.$$

Funktoerotvá funkcia argumentu daného druhu (názvového, výrokového, funktoerotvého) je taká funkcia, ktorá obsahuje premenné (daného druhu) a stane sa novým funktoerom, keď za premenné dosadíme hodnoty argumentu (daného druhu). (63)

V klasickej logike *spona, copula* „jest“, „je“ vo výrokovoch hrá úlohu funktoerotvorneho funktoera: $[\]^{F^F}$ a má bohatú históriu. Je dôležité všimnúť si, že funktoer „je“ spája do výrokov nielen všeobecné názvy n , $(\)^F$ s prídavnými menami n^F , $(\)^{F^F}$ ako v (61, 62), ale aj individuálne názvy N so všeobecnými názvami n . Napríklad:

$$\left[(\text{Ján}) \left[[\text{je}]_n^{F^F} (\text{žiak})_{N^F}^F \right] \right], \left[(\text{Váh}) \left[[\text{je}]_n^{F^F} (\text{rieka})_{N^F}^F \right] \right]. \quad (64)$$

Pozorujeme, že sloveso „je“ spája dva členy

(64) individuálny názov $N(\text{Ján})$, (Váh) s generálnym názvom n , $(\text{žiak})^F$, $(\text{rieka})^F$ —
 (62) generálny názov n , $(\text{strom})^F$ s generálno-názvovtvočným funktoerom, n^F , $(\text{zelený})^{F^F}$;

v oboch prípadoch medzi členmi slovesom „je“ spájanými pozorovať *jednostupňový abstrakčný rozdiel*.

Jednostupňový abstrakčný rozdiel sa vyskytuje medzi objektom a vlastnosťou, medzi vlastnosťou a vlastnosťou vlastnosti a v množinovej teórii medzi prvkom a množinou, medzi množinou a množinou množín. Sloveso „je“ s týmto (65) významom označuje sa symbolom „ \in “ a nazýva sa *vzťahom prínaľezania*. Napr. „ $a \in A$ “, číta sa „ a je A “, alebo „ a je prvkom množiny A “, alebo „ a má vlastnosť A “. Symbol „ \in “ znamená potom výrokotvorný funktor *dvoch* premenných názvových s jednostupňovým abstrakčným rozdielom:

$$„a \in A“ \text{ rozkladom } [(a). [\in]_{N,n}^F(A)^F],$$

ak množina A je prvkom množiny množín \mathbf{A} píše sa to „ $A \in \mathbf{A}$ “,

$$„A \in \mathbf{A}“ \text{ rozkladom } [(A)^F [\in]_{n,n}^F(\mathbf{A})^F]^F. \quad (66)$$

Sloveso „je“ používa sa aj v inom zmysle. Napr. vo výrazoch „pes je zviera“, „štvorec je pravouholník“ po syntaktickom rozklade

$$[(\text{pes})^F [\text{je}]_{n,n}^F (\text{zviera})^F], \quad [(\text{štvorec})^F [\text{je}]_{n,n}^F (\text{pravouholník})^F]. \quad (67)$$

vidíme, že sloveso „je“ hrá úlohu *výrokotvorného funkтора dvoch premenných generálno-názvových*: n, n (rovnakého stupňa!). (68)

Tieto príklady (67) by sa tradične obsahovo interpretovali takto: vo vlastnosti pes (P) je zahrnutá vlastnosť zviera (Q); alebo druhý príklad: v obsahu štvorca (P) je zahrnutý obsah pravouholník (Q). Aby sme mohli syntaktickú formu, schému vyabstrahovať v daných interpretáciách, označme „vlastnosť, alebo obsah nejakého funkтора P “ znakom $\overset{\circ}{P}$, podobne pre nejaký iný funktor Q , znakom $\overset{\circ}{Q}$. Vzťah „vo vlastnosti $\overset{\circ}{P}$ je zahrnutá vlastnosť $\overset{\circ}{Q}$ “ označme: $\overset{\circ}{P} \supset \overset{\circ}{Q}$. Teda symbol „ \supset “ znamená vzťah „obsahovej zahrnutosti“, ktorý sa v logike volá *vzťahom subsumpcie* (do obsahu obsah). (69)

Klasická logika vzťah „ P je Q “, ktorý vystupuje v príkladoch (67), interpretuje *rozsahovo* takto: „rozsah pojmu psa je časťou rozsahu pojmu zviera“, „rozsah štvorca je časťou rozsahu pravouholníka“. Aby sme schému tejto rozsahovej interpretácie mohli vyabstrahovať, označme „rozsah pojmu P a Q “ znakom $\overset{\circ}{P}, \overset{\circ}{Q}$. Vzťah „byť časťou“ označíme „ \subset “ a nazveme *inklúziou*. Daný príklad „ P je Q “ v rozsahovej interpretácii napíšeme „ $\overset{\circ}{P} \subset \overset{\circ}{Q}$ “ a čítame „rozsah $\overset{\circ}{P}$ je časťou rozsahu $\overset{\circ}{Q}$ “. (70)

V matematike sloveso „je“ so skladbou $[(P)^F [\text{je}]_{n,n}^F (Q)^F]$ sa interpretuje rozsahovo ako inklúzia a značí sa bez označenia rozsahovosti jednoducho $P \subset Q$. (71)

Pre sloveso „je“ našli sme už dve interpretácie, a to interpretáciu vzťahu prínaľezania „ \in “ a vzťahu inklúzie „ \subset “. No sloveso „je“ má ešte ďalšie významy. Uvedieme ešte význam, ktorý je veľmi dôležitý pre logiku elementárnej matematiky. Vyskytuje sa napríklad v tomto výraze: „štvorec je rovnostranný pravouholník“. Tento výrok sa dá rozložiť:

$$[(\text{štvorec})^F [\text{je}]_{n,n}^F ((\text{rovnostranný})_n^F (\text{pravouholník})^F)]. \quad (72)$$

Aj v tomto prípade (72) sloveso „je“ znamená výrokotvorný funktor dvoch argumentov generálno-názvových (rovnakého stupňa n, n), ale má iný význam než

inklúzia. Celý výrok (72) s príslušným významom pre „je“ čítame takto: „štvorec znamená to isté, čo rovnostranný pravouholník“; alebo *obsahovo*: obsah pojmu štvorec rovná sa obsahu pojmu rovnostranného pravouholníka; alebo *rozsahovo*: rozsah pojmu štvorec rovná sa rozsahu pojmu rovnostranného pravouholníka. Označme vzťah „obsahovej rovnosti“ „ $\underset{o}{=}$ “ a „vzťah rozsahovej rovnosti“ „ $\underset{r}{=}$ “, potom schematicky daný príklad „P je Q“ „P znamená to isté, čo Q“ píšeme „ $\underset{o}{P} = \underset{o}{Q}$ “ „ $\underset{r}{P} = \underset{r}{Q}$ “.

Funktory $[\underset{o}{=}]_{2n}^F$, $[\underset{r}{=}]_{2n}^F$ „obsahovej a rozsahovej rovnosti“ spomínajú sa obyčajne len ako „funktory rovnosti“ a v logike sa často nazývajú „definičná rovnosť“ s označením „ $\underset{Df}{=}$ “. V aplikácii na náš príklad:

$$\left[(\text{štvorec}) \underset{Df}{=} ((\text{rovnostranný})_n^F (\text{pravouholník})_F^F) \right]. \quad (74)$$

Výraz na ľavej strane znaku „ $\underset{Df}{=}$ “ je obsahom i rozsahom rovnaký s výrazom na pravej strane tejto rovnosti; preto výrok s definičnou rovnosťou hodí sa dobre na definovanie (odtiaľ aj názov funktoru) ľavej strany pravou. Ľavá strana nazýva sa „definiendum“ a pravá „definiens“, celý výrok definícia. V našom prípade

$$\left[(\text{štvorec}) \underset{Df}{=} ((\text{rovnostranný})_n^F (\text{pravouholník})_F^F) \right] \\ \left[\underbrace{(\text{definiendum}) \underset{Df}{=} (\text{definiens})}_{\text{definičia}} \right] \quad (75)$$

Pre sloveso „je“ ako výrokotvorný funktor máme už tri interpretácie: „vzťah prínaľezenia \in “, „vzťah inklúzie \subset “ a „definičnú rovnosť, $\underset{Df}{=}$ “. Sloveso „je“ znamená teda výraz mnohoznačný a táto mnohoznačnosť zapríčinila, že v matematike zaviedli sa miesto „je“ výrazy presne vyhraneného zmyslu \in , \subset , $\underset{Df}{=}$. Funktorová štruktúra slovesa „je“ dobre odráža jeho významovú rôznosť:

$$\begin{array}{ccc} [\in]_{N,n}^F & [\subset]_{n,n}^F & [\underset{Df}{=}]_{n,n}^F \\ [je]_{N,n}^F & [je]_{n,n}^F & [je]_{n,n}^F \cdot \end{array} \quad (76)$$

Zdanlivá dvojznačnosť funktoru $[\]_{n,n}^F$ (lebo môže byť „ \subset “, alebo „ $\underset{Df}{=}$ “) odstráni sa medzivýrokovými funktormi, ktoré preberieme pozdejšie. Opisom by zneli:

$$\text{Ak } \underset{o}{P} \supset \underset{o}{Q} \text{ a súčasne } \underset{o}{P} \subset \underset{o}{Q}, \text{ potom vždy } \underset{o}{P} = \underset{o}{Q} \quad (77)$$

$$\text{Ak } \underset{r}{P} \subset \underset{r}{Q} \text{ a súčasne } \underset{r}{P} \supset \underset{r}{Q}, \text{ potom vždy } \underset{r}{P} = \underset{r}{Q} \quad (78)$$

$$\text{Ak } \underset{o}{P} = \underset{o}{Q} \text{ a súčasne } \underset{r}{P} = \underset{r}{Q}, \text{ potom vždy } \underset{Df}{P} = \underset{Df}{Q} \quad (79)$$

Z výrokotvorných funktorov sme preskúmali najprv sloveso „je“, a ukázalo sa, že môže byť uvažované ako $[[je]_n^F (\)]_n^F$ alebo ako $[je]_{n,n}^F$. Je hodno poznamenať, že boli filozofi, ktorí pripúšťali len jediné sloveso „je“ a všetky ostatné slovesá pokúšali

sa odvodit' z neho. Čo meritórneho na tej domnienke je, ukáže sa, keď uvážime, že všetky slovesá sú tiež výrokotvorné funktoary a ich funkčná štruktúra je takáto:

$$\left[\left[\left(\text{kmeň} \right) \cdot \left[\begin{array}{l} \text{prípony} \\ \text{indikatívum} \end{array} \right]_n \right]_{kn}^F \left(\begin{array}{l} \text{podmet, predmet, miesto, čas, ...} \\ \text{kto, čo, kde, kedy, ...} \end{array} \right) \right] \quad (80)$$

$$[[\text{sloveso}]_{kn}^F(\text{argumenty}).]$$

$$[[\text{korelátor}]_{kn}^F(\text{koreláta}).]$$

Počet argumentov je u sloviac rozličný a menlivý. Skoro v každom výroku treba osobitne pre sloveso zistiť príslušné argumenty.

Analizujeme ešte výrazy „je pravda, že“ a „nie je pravda, že“:

$$[[\text{je}]_n^{FF}(\text{pravda}).]_n^{FF}((\text{že})_V^F[\]), \quad [[\text{nie}]_V^{FF}[[\text{je}]_n^{FF}(\text{pravda}).]_n^{FF}((\text{že})_V^F[\])]. \quad (81)$$

Zápor „nie“ znamená teda výrokovo-funktorotvorný funktoar výrokovo-funktorového argumentu: $[[\text{nie}]_V^{FF}]$.

Posiaľ sme uvažovali výrokové funkcie a funktoary. Názvový typ funkcie a funktoarvé funkcie treba ešte spomenúť. Takými sú najmä adverbialne väzby. Napr. „veľmi dobre“, rozkladom

$$((\text{veľmi})_n^{FF}(\text{dobre})_V^F)^F, \quad ((\text{tmavo})_n^{FF}(\text{zelený})_V^F)^F. \quad (82)$$

Príklady pod (45) patria tiež sem.

DOBRÉ ČLENENIE ZLOŽENÝCH VÝRAZOV

Z doterajšieho rozboru zložených výrazov môžeme zhrnúť túto zákonitosť:

zložené zmysluplné výrazy majú vždy funkčnú štruktúru a sú zložené z funktoara a argumentov. (83)

Výrazy s narušenou funkčnou skladbou strácajú zmysel.

Podstatnú dôležitosť má rozklad zložených výrazov na funkčné zložky. Ustálime pravidlo, že zložený funkčný výraz je *dobre členený*, keď sa dá rozložiť na funktoar a príslušné argumenty. Po takomto prvostupnovom rozklade získaný funktoar a argumenty môžu byť ďalej, teraz už na druhom stupni, zložené a funkčne dobre členené na funktoar a argumenty. Keď po k tom kroku dobrého členenia dôjdeme k jednoduchým výrazom: názvom, výrokom, funktoarom, hovoríme, že výraz je na k tom stupni vonkoncom dobre členený. (84)

Živá reč používa aj eliptické, kusé zvraty, v ktorých nejaká funkčná zložka chýba, ale sa vždy domyslí, ináč by sa výrazu nerozumelo. V matematike sa majú používať len funkčne dobre členené výrazy, kusým výrazom sa treba vyhýbať, chybajúce zložky doplniť. (85)

SYNTAKTICKÁ KONEXITA

Dobré členenie výrazov je určitá analytická, rozkladacia operácia, ktorou sa zložené výrazy rozčlenia na funktoar a argumenty. (86)

K tejto analytickej operácii obrátená, syntetická operácia bude taká skladbová operácia, ktorou sa k dobre členenému funkčnému výrazu určí výsledná funkčná hodnota. (87)

Zložené výrazy, na ktorých sa táto skladbová operácia urobiť dá, poľský logik Ajdukiewicz nazval syntakticky konexnými. Obe operácie členenia a skladby (86, 87) úplne určujú zmysluplnosť zložených výrazov. Preto ustálime:

Len také zložené výrazy sú zmysluplné, ktoré sú vonkoncom podľa funkčnej štruktúry dobre členené a aj obrátene, podľa funkčnej štruktúry bez pretrhnutia, spojne, konexne dajú sa zložiť v jednoduché hodnoty funkčné: v názvy, výroky, funktoxy. (88)

Napr. preskúmame, či zložený výraz „Slnce zohrieva Zem, ktorú my obývame“ je syntakticky konexný. Daný výraz hneď chápeme ako výrok []:

[Slnce zohrieva Zem, ktorú my obývame]. (89)

Je výraz (89) skutočne výrokom? Ak je, má sa dať funkčne dobre členiť na funktoxy a na príslušné argumenty. Skutočne

$$1. \text{ stupeň } \left[(\text{Slnce}). [\text{zohrieva}]_{2N}^F \left(\underbrace{\text{Zem, ktorú my obývame}}_{\substack{\text{tento argument je zložený,} \\ \text{ale dobre členený} \\ \text{na}}} \right). \right] \quad (90)$$

$$2. \text{ stupeň } \left[(\text{Slnce}). [\text{zohrieva}]_{2N}^F \left((\text{Zem}). \left(\overbrace{\text{ktorú my obývame}}^F \right)_N \right). \right] \quad (91)$$

$$3. \text{ stupeň } \left[(\text{Slnce}). [\text{zohrieva}]_{2N}^F \left((\text{Zem}). \left(\overbrace{(\text{ktorú})_F}^F \left[\overbrace{\text{my obývame}}^F \right]_N \right). \right). \right] \quad (92)$$

funktory argument
jedno- zložený, dobre
duchý členený na

$$4. \text{ stupeň } \left[(\text{Slnce}). [\text{zohrieva}]_{2N}^F \left((\text{Zem}). \left(\overbrace{(\text{ktorú})_F}^F \left[(\text{my}). \left[\overbrace{\text{obývame}}^F \right]_N \right] \right)_N \right). \right] \quad (93)$$

argument funk-
tor
jedno- jedno-
duchý duchý

Daný zložený výraz (89) je teda vonkoncom, na štvrtom stupni, dobre členený a súčasne aj syntakticky konexný.

Príklady syntakticky nekonexných výrazov sme uviedli už pod (3). Tak výraz „2 + <“ po členení bude

$$(2). (+)_{2N}^F [<]_{2N}^F$$

a ukazuje, že je zložený z dvoch funktorov: názvotvorného a výrokotvorného; oba reklamujú dva argumenty individuálno-názvové — no vo výraze ani jeden funktor nie je príslušnými argumentmi plne vystrojený, čiže nie sú funkčne dobre členené; nemožno preto ani z „názvotvorného“ ani z „výrokotvorného“ funktoru zložiť, výsledkovať jednoduchú funkčnú hodnotu. Výraz „2 + <“ je preto syntakticky nekonexný, čiže nonsens, nezmysel. (94)

Výraz z množinovej teórie „ $M \in M$ “, ktorý čítame „množina M je prvkom seba samej“, po rozklade $(M)^F[\in]_{N,n}^F(M)^F$ sa ukazuje nekonexným, lebo funktor „ \in “ je výrokotvorný funktor dvoch argumentov, a to individuálno-názvového a generálno-názvového argumentu; teda argumentov s jedноступňovým rozdielom, kdežto v danom príklade oba argumenty sú generálne názvy rovnakého stupňa. Výraz „ $M \in M$ “ podľa funktoru „ \in “ nie je dobre členený ani konexný. Preto nemá zmyslu, nielenže nie je pravdivý, ako sa to u nás aj v odbornej literatúre uvádza. (95)

Dalo by sa ukázať, že antinómie, ktoré sa vyskytli v rozličných odboroch, sú syntakticky nekonexné a nedobre členené výrazy.

SKLADBA PODRADENÝCH VIET

Ukázali sme, že výroky majú funkčnú stavbu a ich celkový zmysel je viazaný na neporušenú funkčnú štruktúru. Niekoľkými príkladmi ukážeme, že aj zložené výroky majú funkčnú stavbu. Najprv preberieme zložené podradené vety, ktoré tvoria v gramatike celý systém. Tu uvedieme len najčastejšie sa vyskytujúce podradňovacie spojky: že, aby, ktorý. Tieto *podradňovacie spojky sú názvotvorné funkctory výrokových argumentov*:

$$\left[(\text{Matka}). [\text{sa raduje}]_{2n}^F \left((\text{že})_V^F \left[[\text{má}]_n^F \left((\text{dobrého})_n^F (\text{syna})_n^F \right) \right] \right) \right] \quad (96)$$

$$\left[(\text{Ženy}). [\text{šli}]_{3n}^F \left((\text{do})^F (\text{hory}) \right) \right] \left((\text{aby})_V^F \left[[\text{nazbierali}]_n^F (\text{huby}) \right] \right) \right] \quad (97)$$

$$\left[[\text{Videl som}]_n^F \left((\text{priateľa}). \left((\text{ktorý})_V^F \left[[\text{prišiel}]_n^F \left((\text{z})_n^F (\text{vojenčiny}) \right) \right] \right) \right) \right] \quad (98)$$

Aj jediná subordináčna spojka v rozmanitých kombináciach zachováva svoju funkčnú úlohu. Napríklad spojka „že“:

$$\left[[\text{Zdá sa}]_n^F \left((\text{že})_V^F \left[[\text{prehráme}]_n^F \left((\text{ten})_n^F (\text{zápas}) \right) \right] \right) \right] \quad (99)$$

$$\left[[\text{Vidí-}]_{2n}^F (-m). ((\text{že})_V^F [\text{si chorý}]) \right] \quad (100)$$

$$\left[[\text{Vyskoči-}]_{2n}^F (-l). ((\text{že})_V^F [\text{si odtrhne jabĺčko}]) \right] \quad (101)$$

$$\left[(\text{Učiteľ}). [\text{vyhrešil}]_{3n}^F (\text{žiaka}). ((\text{že})_V^F [\text{je lenivý}]) \right] \quad (102)$$

$$\left[[\text{Spado-}]_{2n}^F (-l). \left((\text{tak})_n^F \left((\text{že})_V^F [\text{nevedel sa pohnúť}] \right) \right) \right] \quad (103)$$

Všetky uvedené príklady sú zložené, podradené gramatické vety a sú dobre členené a zložené podľa funkčných foriem: $[[]_n^F()]$, $[[]_{2n}^F(,)]$, $[[]_{3n}^F(, ,)]$. Sú teda zložené z výrokotvorného funktora $[]_{kn}^F$ a z názvových argumentov jedno- dvoj- a trojmiestnych: n , $2n$, $3n$. Z týchto argumentov jeden je podradená veta, a to podmetná (99), predmetná (100) a príslovková: cieľu (101), príčiny (102) a spôsobu (103). Tieto podradené vety samy tvoria argumenty, ktoré patria k názvotvornému funktoru výrokového argumentu, ku spojke (že) $_V^F$.

OPERÁTORY

Videli sme, že výrokové funkcie (38), názvové funkcie (42), funktorové funkcie stanú sa (61)

výrokmi, $[]$, názvami, $()$, funktormi, $[]^F$, $()^F$,

keď na miesto premennej — výrokovej, názvovej, funktorovej *dosadíme* konkrétne hodnoty argumentu: výroky, názvy, funktory.

Výsledky dosadenia nazvali sme

hodnoty výrokovej funkcie: výroky	hodnoty názvovej funkcie: názvy	hodnoty funktorevej funkcie: funktory.
---	---------------------------------------	--

Tento spôsob tvorenia funkčných hodnôt nazýva sa *špecializácia*. (104)

No funkčné hodnoty — $[]$, $()$, $[]^F$, $()^F$ — môžeme získať z funkcií aj použitím zvláštného druhu výrazov, ako „pre každé x “ alebo „existuje také x “, „množina všetkých tých prvkov x , ktoré“, „to jediné x “, ktoré nazývame operátory. (105)

Operátory živá reč málo, alebo vôbec nepoužíva; pre vedeckú reč však sú nevyhnutné. Operátory tvoria nový druh, novú kategóriu výrazov, ktoré pri logickej výstavbe umelého jazyka najmä matematického hrajú dôležitú úlohu.

Charakteristická vlastnosť operátorov, ktorá ich odlišuje od funktorov, je v tom, že *operátory viažu aspoň jednu premennú*, kým *funktory premennú nikdy neviažu*. Funktor sa môže stať argumentom iného funktora, operátor nikdy nemôže byť argumentom funktora.

Hoveríme, že daný výraz je operátorom, keď

1. daný výraz obsahuje aspoň jednu premennú viazanú a nemá nijakú voľnú premennú,
2. existuje aspoň jedna taká funkcia, že pre každú viazanú premennú, vystupujúcu v danom výraze, existuje aspoň jedna premenná zahrnutá v tej funkcii a je rovnaká s premennou zviazanou, vystupujúcou v danom výraze, (106)
3. po zložení daného výrazu s funkciou vzniká hodnota funkčná.

Operátory skladáme teda *vždy s funkčnými výrazmi* (106, 2), ktoré v tejto úlohe nazývame operandy (aj argumenty). Schematicky: operátor funkcia, operátor operand.

Napríklad výrok s operátorom:

$$\underbrace{\text{Pre každé prirodzené číslo } x, y \text{ platí}}_{\text{operátor}} \quad [x + y = y + x] \quad (107)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{operand}}$$

Operand môže byť [výroková funkcia], (názvová funkcia), alebo (funktorová funkcia)^F, []^F. Podľa toho, aký výsledok vzniká zo skladby operátora s operandom, rozlišujeme

Operátory	Operátory	Operátory	
výrokotvorné	názvotvorné	funktorotvorné	(108)
(viazané premenné)	(viazané premenné)	(viazané premenné)	

Tieto výrazy označíme zátvorkovaním takto:

$$\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right]^0 \quad \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)^0 \quad \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right]^F \quad \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right)^F \quad (109)$$

Operátorom *viazanú premennú píšeme pod operátor*; môže byť výroková, názvová alebo funktorová.

Uvedený príklad (107) napíšeme takto:

$$\left[\left[\text{Pre každé} \right]^0 [x + y = y + x] \right]_{x, y \in P} \quad (110)$$

kde P značí množinu prirodzených čísel.

Z rozmanitých operátorov a rozličných operandov môžeme zostaviť mnoho zmysluplných výrazov. Z nich spomenieme len tie, ktoré používame pri opisoch elementárnej matematiky.

KVANTIFIKÁTORY

alebo kratšie *kvantory sú výrokotvorné operátory, ktoré viažu premenné individuálne-názvové a skladajú sa s výrokovými funkciami premenných názvových do výrokov*:

$$\left[\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right]^0 \left[\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right]^F \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \right] \right] \quad (111)$$

Napríklad

$$\left[\left[\text{pre každé } x \right]^0 [x + 1 > x] \right]$$

Operátor „pre každé x “ sa nazýva *generalizátor* alebo veľký kvantor a značí sa „ \bigwedge “. Príklad s touto symbolikou bude

$$\left[\bigwedge_x [x + 1 > x] \right]$$

Operátor [pre niektoré x]⁰, [existuje také x]⁰, [nájde sa také x]⁰ je *malý kvantor* alebo *partikularizátor*, tiež *existencializátor*. Značí sa „ \bigvee “; napr. $\bigvee_x [x^2 = x]$, čo znamená, že existuje, dá sa nájsť také číslo x , pre ktoré platí $x^2 = x$; takým je $x = 1$. (112)

V učebniciach sa kvantory (operátory) obyčajne vynechávajú, ani slovným výrazom sa nezachycujú, čo je po logickej stránke značný nedostatok. Všeobecne platné vety, zákony, udávajú sa len výrokovou funkciou napr. „ $a + b = b + a$ “ a výrokotvorný operátor, ktorý z indiferentnej funkcie [] k pravdivosti tvorí pravdivý výrok [], sa neoznačuje. Malo by byť:

„Pre každé prirodzené číslo a, b $a + b = b + a$ “, alebo

$$\bigwedge_{a, b \in P} [a + b = b + a]$$

Výroky $\bigwedge_x P(x)$, $\bigwedge_{x,y} Q(x, y)$, ... tvrdia, že výrokové funkcie $P(x)$, $Q(x, y)$, ... s jednou dvoma, ... premennými stávajú sa [výrokmi] pravdivými pre každý objekt x , resp. pre každú dvojicu objektov (x, y) . (113)

Premenná viazaná kvantifikátorom prebieha určitú množinu predmetov (čísel, bodov, funkcií), rozsah pojmu, definičný obor premennej. Výroky napísané kvantifikátorom vyjadrujú určité skutočnosti, tykajúce sa celého súboru predmetov; vyjadrujú, že každý predmet, každá dvojica predmetov ... takejto množiny má určitú vlastnosť P , alebo že v tej množine existujú predmety s tou vlastnosťou. (114)

Všetky zákony vo vedách i v matematike sú generalizované, všeobecne platné výroky. Napríklad komutatívny zákon

$$\begin{array}{cc} \text{sčítania} & \text{násobenia} \\ \bigwedge_{a,b} [a + b = b + a] & \bigwedge_{a,b} [a \cdot b = b \cdot a]. \end{array} \quad (115)$$

Všetky identické transformácie sú generalizované výroky:

$$\bigwedge_{a,b} [(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \quad \bigwedge_{a,b} [a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)].$$

Výrazy $\bigvee_x P(x)$ sú také výroky, ktoré tvrdia, že jestvuje, existuje, dá sa nájsť aspoň jeden predmet x , pre ktorý hodnota výrokovej funkcie $P(x)$ je pravdivým výrokom. Napr.

$$\bigvee_x [x + 2 = 5] \text{ je pravdivý pre } x = 3. \quad (116)$$

Kvantory \bigwedge_x , \bigvee_x viažu premennú x , ktorá bola vo výrokovej funkcii $P(x)$ voľná. (117)

Pre výrokovú funkciu $P(x, y)$ s dvoma názvovými argumentmi sú výrazy $\bigwedge P(x, y)$, $\bigvee P(x, y)$ zas funkcie výrokové, ale už len o jednej premennej y ; no výrazy $\bigwedge_x P(x, y)$, $\bigvee_x P(x, y)$ sú už výroky, pravdivé alebo nepravdivé, bez premennej, lebo obe premenné sú viazané. (118)

Kvantory sme ilustrovali príkladmi len z matematiky. Pokusme sa teraz syntakticky analyzovať výraz, vzatý zo živej reči; napr. „Každý človek je smrteľný“. (119)

Časť výrazu (119) „človek je smrteľný“ dá sa dobre členiť na (človek) $_n^F$ ($[\text{je}]_n^F, n^F$) (smrteľný) $_n^F$ a zložiť podľa výrokotvorného funktora $[\text{je}]_n^F, n^F$ vo výrok. Čo však s výrazom „každý“? Výraz „každý“ nie je funktor; ak ho pokladáme za výrokotvorný operátor, potom nie je úplný, nie je dobre členený. Chýba mu podstatná zložka operátora: premenná (106). K syntaktickému dobrému členeniu výrazu „Každý človek je smrteľný“ treba doplniť príslušnú premennú. Potreba toho doplnku pociťovala sa už v klasickej logike a výraz typu „Každý človek je smrteľný“, schematicky „Každé P je Q “ evidovali pod názvom kategorických výrokov [daný príklad je všeobecný kladný kategorický výrok]. (120)

Kategorické výroky sú stavané v aristotelovskej logike na zvláštnej noetickej axióme, ktorú môžeme formulovať takto: „pre každý predikát, vlastnosť P existuje

také individuuum x , že (toto individuuum] x je P [má tu vlastnosť P]“. Logickým vzorcom: $\bigwedge_P \bigvee_x P(x)$. (121)

Táto axióma interpretovaná v našej logike znamená tolko, že každý predikát, vlastnosť, to jest funktor P reklamuje svoju premennú, svoj argument, tu individuálno-názvový x . Spontánne, inštinktívne sa teda myslí funkčnou formou $P(x)$. Ďalšie tézy klasickej logiky to ešte zdôrazňujú. Tak: termínmi kategorického súdu mohli byť len praedicabilia (genus, rod; species, druh; diferenciacia, rozdiel; proprium, vlastnosť; accidens, prípadnosť), čo sú samé funktoary. A klasická logika nemeška hneď prízvukovať, že praedicabiliami vyjadrené vlastnosti existujú len v individuálnych predmetoch, čiže praedicabilia sú funktoary individuálno-názvových premenných. K tomu sa pripája ešte téza, že prázdny a univerzálny predikát, funktor, sa vylučuje z akéhokoľvek výroku. Toto logické „bezpečnostné opatrenie“ má ďalekosiahly noetický význam, ktorý tu rozoberať nemôžeme. (122)

Vo všeobecnom kladnom kategorickom výroku „Každé P je Q “ operátor „každé“ si teda živelne vymáhal svoju premennú individuálno-názvovú x . To však nie je dosť. Operátor, generalizátor „každé“, reklamuje nielen svoju premennú, ale sa má zložiť so svojim operandom, ktorý má byť výroková funkcia obsahujúca aspoň jednu premennú, a to rovnakú s premennou zviazanou operátorom. Kategorický výrok „Každé P je Q “ sa skutočne rozkladal tým smerom. Hovorilo sa, že spojenie medzi P a Q je také, že, ak nejaké x je P , potom súčasne ono x je Q . Všeobecný kladný kategorický výrok definoval sa potom implikáciou (154) výrokových funkcií „ x je P “, „ x je Q “ pre všetky hodnoty x . Logickým vzorcom:

$$\text{„Každé } P \text{ je } Q\text{“} = \bigwedge_{Df \ x} [P(x) \rightarrow Q(x)] \text{ alebo} \quad (123)$$

$$\text{„Každé } P \text{ je } Q\text{“} = \bigwedge_{Df \ x} [x \in P \rightarrow x \in Q]. \quad (124)$$

To jest „Každé P je Q “ znamená to isté ako „pre každé x : ak x je P , potom x je Q “. Náš príklad (119) doplnený tak, aby mal operátor dobre členený, by v hovorovej reči znel (v trochu nezvyklej štylizácii) asi takto:

$$\text{„[Každý]}^0\text{[kto je človek, potom ten je smrteľný].} \quad (125)$$

(ten)

kde výrazy „ten“, „kto“, „ten“ hrajú úlohu individuálnej premennej x . Položme za tieto ukazovacie zámenná x , bude: (126)

Každé x , ak x je človek, potom x je smrteľný; konečne, ak funktoary „človek“ označíme P a „smrteľný“ Q a medzivýrokový spoj „ak, potom“ implikáciou „ \rightarrow “, celý výraz sa objaví v podobe:

$$\left[\bigwedge_{(x)} [x \in P \rightarrow x \in Q] \right]. \quad (127)$$

Výrazy (125, 126, 127) sú už výrazy syntakticky dobre členené: operátor má svoju premennú a svoj operand s tou istou premennou. Tieto výrazy sú aj syntakticky konexné, lebo výrokovtvorný operátor s individuálno-názvovou zviazanou premennou s operandom, ktorý je výrokovou funkciou tej istej premennej, skláda sa vo výrok!

je názvovo-funktorotvorný operátor, ktorý viaže názvové premenné a spája sa s výrokovými funkciami názvových premenných:

$$\left(()^{FO} []_x \right)^F. \quad (128)$$

Napríklad:

$\left((\text{Množina všetkých čísel } x, \text{ ktoré spĺňajú } [2x + 3 = 11]_x)^F \right)$ pozostáva z jediného čísla „4“, lebo $x = 4$ vyhovuje výrokovej funkcii $[2x + 3 = 11]$. Skutočne po dosadení dostaneme $[2 \cdot 4 + 3 = 11]$ pravdivý výrok.

Množinový operátor označujeme písmenom E , ktoré je iniciálkou francúzskeho slova ensemble = množina.

Výraz $EP(x)$ čítame „množina všetkých tých x , ktoré spĺňajú výrokovú funkciu $P(x)$ “.

Keď množinu zadávame jej prvkami, prvky dáme do zvierok; napr. $\{2, 3, 5\}$ značí množinu z troch prvkov 2, 3, 5; $\{a, b, c, d\}$ značí množinu pozostávajúcu z písmen a, b, c, d .

Príklad s rovnicou môžeme písať $E[2x + 3 = 11]_x = \{4\}$, kde symbol „ $\{ \}$ “ znamená rozsahovú rovnosť (73) množín. Výraz $E[x^2 - 5x + 6 = 0]_x$ znamená množinu pozostávajúcu z dvoch čísel $x_1 = 2, x_2 = 3$, lebo $[2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0]$ a $[3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0]$ sú pravdivé výroky, čiže $E[x^2 - 5x + 6 = 0]_x = \{2, 3\}$.

K tomu, aby nejaký objekt, prvok, element „ a “ patril, náležal do množiny $EP(x)$, treba a stačí, aby výrok $P(a)$ bol pravdivý. Čo označujeme: „ $a \in EP(x)$, vtedy a len vtedy, keď $P(a)$ je pravdivý výrok“. Preto „5 je prvkom množiny prvočísel“, lebo „5 je prvočíslo“ je pravdivý výrok.

Množinu všetkých tých prvkov, ktoré sú prípustné ako hodnoty argumentu výrokovej funkcie spájanej s množinovým operátorom, menujeme *rozsah premennosti argumentu*, tiež jeho aplikačnou oblasťou. Po dosadení názvov takýchto prvkov do výrokovej funkcie dostaneme hodnotu výrokovej funkcie: výrok pravdivý.

Všetky tie hodnoty argumentu x , ktoré patria do rozsahu premennosti argumentu [napr. do A], pri ktorých výroková funkcia $P(x)$ stáva sa výrokom pravdivým, označujeme množinovým operátorom takto: $E P(x)$.

Každý pojem má svoj rozsah a každé naše uvažovanie týka sa určitého súboru predmetov, ktorý sa počas úvahy už nemení; menujeme ho *úplnou množinou*. Značí sa „1“. Úplnú množinu tvorí napr. množina všetkých prirodzených čísel, alebo množina všetkých bodov priamky — všetkých bodov roviny — množina všetkých trojuholníkov.

Množina, ktorá nemá nijaký prvok, je *množinou prázdnuou*; značí sa „0“.

Kvantory a množinové operátory navzájom súvisia podľa týchto formúl:

$$\left[\begin{array}{l} \text{pre všetky } x \\ \text{platí } P(x) \end{array} \right] \text{ vtedy a len } \left[\begin{array}{l} \text{množina} \\ \text{všetkých} \\ \text{prvkov, ktoré} \\ \text{spĺňajú } P(x) \end{array} \right]^F \text{ rozsahovo rovná sa } \left[\begin{array}{l} \text{úplnej} \\ \text{množine} \end{array} \right]^F$$

Operátormi môžeme formulovať tento výrok takto:

$$\bigwedge_x P(x) \Leftrightarrow [EP(x) = 1] \quad (137)$$

Malý kvantor s množinovým operátorom súvisí takto:

$$[\bigvee_x P(x) \Leftrightarrow [EP(x) \neq 0]]. \quad (138)$$

Vo vzorcoch (137, 138) uvedené znaky „ \Leftrightarrow “, ktoré čítame „vtedy a len vtedy, keď“, alebo „práve vtedy, keď“, alebo „je nevyhnutné a stačí“ znamenajú medzivýrokové spoje, ktorými skládame dva výroky do nového zloženého výroku. O skladaní výrokov treba podrobnejšie uvažovať.

ZLOŽENÉ VÝROKY

Uvažujme tieto výroky: „Ak je dnes štvrtok, potom zajtra bude piatok“, alebo „Ak je $2 < 3$ a $3 < 5$, potom $2 < 5$ “. Uvedené výroky majú také časti, ktoré samy sú výroky. V prvom príklade [dnes je štvrtok], [zajtra bude piatok] sú dva rozličné výroky; v druhom príklade [$2 < 3$], [$3 < 5$], [$2 < 5$] sú tri rozličné výroky, ktoré sú časťami pôvodného zloženého výroku. (139)

Naproti tomu vo výrokoch [dnes je štvrtok], alebo [$2 < 3$] nijaká časť nie je výrokom.

Taký výrok, v ktorom nijaká časť nie je výrokom, menujeme *výrok jednoduchý*; výrok, ktorý má také časti, ktoré samy sú výrokmi, je *zložený výrok*. Výroky, ktoré sú zložené, môžeme rozložiť na časti, ktoré sú výrokmi, a na časť, ktorá nie je výrokom a neobsahuje výrok ako časť. (140)

Časť zloženého výroku, ktorá nie je výrokom a neobsahuje výrok ako časť, je *výrokotvorný funktor výrokových argumentov*: $[]_{kV}^F$. (141)

Tak vo výroku [Ak je dnes štvrtok, potom zajtra bude piatok] časť „ak..., potom“ je výrokotvorný funktor dvoch premenných (argumentov) výrokových $[]_{2V}^F$, [dnes je štvrtok] a [zajtra bude piatok]: $[[] \cdot []_{2V}^F []]$.

Výrokotvorné funktoory výrokových argumentov spájajú, skladajú jednoduché výroky, ktoré vystupujú ako argumenty do výrokov zložených. (142)

Zložené výroky sú hodnoty výrokových funkcií premenných výrokových. (143)

Výrokové premenné označujeme písmenami p, q, r, \dots (144)

Ak výrok [dnes je štvrtok] označíme „ p “ a výrok [zajtra bude piatok] označíme písmenom „ q “, potom zložený výrok Ak [je dnes štvrtok]. [potom] $_{2V}^F$ [zajtra bude piatok]. označíme „ak p , potom q “, alebo ešte kratšie, keď funktor „ak..., potom“ označíme osobitným symbolom „ \rightarrow “, celý zložený výrok bude „ $p \rightarrow q$ “ a zátvorkovaním: $[[výrokový argument]. [výrokotvorný funktor dvoch premenných výrokových] $_{2V}^F$ [výrokový argument].]$, krátko $[[] \cdot []_{2V}^F []]$. (145)

VÝROKOVÁ TEÓRIA

Sústava medzivýrokových spojov, funktoov výrokotvorných argumentov výrokových nazýva sa *výroková teória*, tiež *dedukčná teória*, lebo dedukcie sú medzi-

výrokové spoje s výrokovým výsledkom; menuje sa aj *výrokový počet* alebo *výroková algebra*, pretože medzivýrokové spoje majú svoje pravidlá, ktoré sa dajú používať na spôsob kalkulu. (146)

Tu si všimneme len výrokovú teóriu funkcií výrokových dvoch premenných výrokových p, q . Celkom je možných 16 medzivýrokových spojov medzi p a q . Zo 16 medzivýrokových spojov opíšeme len tie, ktoré z hľadiska historického vývoja logiky a pre prax majú význam; sú to negácia, ekvivalencia, implikácia, alternatíva, konjunkcia a disjunkcia. Negácia je výrokovtorný funktor jednej premennej výrokovvej, zvyšujúce sú funktoři dvoch premenných výrokových. (147)

Negácia, poprenie, je výrokovtorný funktor s jednou výrokovou premennou: $\left[\left[\right]_V^F \left[\right] \right]$. Vyslovuje sa [nie] $_V^F$ a značí sa „—“ nadčiarknutím. Napr. „nie p “ označíme \bar{p} . V matematike prípad negácie $3 = 5$ sa označuje $3 \neq 5$, „tri nerovná sa piatim“. (148)

Poprenie, negácia, pravdivého výroku je výrok falošný a naopak: — Pravdivosť výrokov značíme „1“, faloš „0“. (149)

$$\bar{1} \Leftrightarrow 0, \quad \bar{0} \Leftrightarrow 1. \quad (150)$$

Ekvivalencia je výrokovtorný funktor dvoch premenných výrokových p, q . Vyslovuje sa [vtedy a len vtedy] $_{2V}^F$, [je nutné a stačí] $_{2V}^F$, [v tom a len v tom prípade] $_{2V}^F$, [práve vtedy] $_{2V}^F$ a podobnými slovnými zvratmi; značí sa „ \Leftrightarrow “. (151)

Dva výroky p, q , sú ekvivalentné, $p \Leftrightarrow q$, keď sú zároveň pravdivé alebo falošné. (152)

Výraz $p \Leftrightarrow 1$ značí, že výrok p je pravdivý, napr. „ $2, 2 = 4 \Leftrightarrow 1$ “, $q \Leftrightarrow 0$ značí, že výrok q je nepravdivý, „ $2 \cdot 5 = 7 \Leftrightarrow 0$ “.

O ekvivalencii výrokov platí

$$[1 \Leftrightarrow 1] \Leftrightarrow 1, \quad [1 \Leftrightarrow 0] \Leftrightarrow 0, \quad [0 \Leftrightarrow 1] \Leftrightarrow 0, \quad [0 \Leftrightarrow 0] \Leftrightarrow 1. \quad (153)$$

Implikácia je výrokovtorný funktor dvoch premenných výrokových p, q . Vyslovuje sa [ak..., potom] $_{2V}^F$ a značí sa „ \rightarrow “. Napr. „Ak p , potom q “, alebo „ $p \rightarrow q$ “. Implikácia znamená toľko, že „nemožno, aby výrok p bol pravdivý a výrok q bol nepravdivý“. Interpretuje sa aj takto: „alebo je výrok p nepravdivý, alebo je výrok q pravdivý“. Vo výraze „ $p \rightarrow q$ “ p je implikans a q je implikát. (154)

O implikácii platia vzťahy:

$$[1 \rightarrow 1] \Leftrightarrow 1, \quad [1 \rightarrow 0] \Leftrightarrow 0, \quad [0 \rightarrow 1] \Leftrightarrow 1, \quad [0 \rightarrow 0] \Leftrightarrow 1. \quad (155)$$

Napr. $[2 < 3] \rightarrow [3 < 5] \rightarrow [2 < 5]$.

Na implikácii je založený jeden z najelementárnejších úsudkov v matematike, tzv. separovanie implikáta: ak výrok p je pravdivý a zložený výrok $p \rightarrow q$ je pravdivý tiež, potom aj výrok q je pravdivý a môžeme ho oddeliť, separovať. (156)

Poučky a vety bývajú v matematike formulované implikáciou. Implikans alebo predpoklad udáva podmienky, ktorým objekt matematicky vyhovuje, a implikát alebo tvrdenie udáva určité vlastnosti, ktoré poučka o tom objekte tvrdí.

Konjunkcia alebo logický súčin, produkt, je výrokovtorný funktor dvoch výrokových premenných. Vyslovuje sa „a“ a označuje sa „ \wedge “, niekedy „ \cdot “, tiež „ \wedge “, alebo vôbec bez znaku. Napr. p a q zapíšeme p, q alebo $p \cdot q$ alebo $p \wedge q$ alebo pq . (158)

Výrok zložený p, q je pravdivý, ak oba výroky sú pravdivé. (159)

O konjunkcii platia vzťahy:

$$[1,1] \Leftrightarrow 1, \quad [1,0] \Leftrightarrow 0, \quad [0,1] \Leftrightarrow 0, \quad [0,0] \Leftrightarrow 0. \quad (160)$$

Napr. $[2 < 3], [3 < 5] \rightarrow [2 < 5]$.

Alternatíva alebo logický súčet, suma, je výrokotvorný funktor dvoch premenných výrokových. Vyslovuje sa „alebo“ so zmyslom nevylučujúcim. Značí sa „ \vee “, „vel“, napr. „ $p \vee q$ “. Alternatíva výrokov je pravdivá, keď aspoň jeden výrok je pravdivý. O alternatíve platia vzťahy:

$$[1 \vee 1] \Leftrightarrow 1, \quad [1 \vee 0] \Leftrightarrow 1, \quad [0 \vee 1] \Leftrightarrow 1, \quad [0 \vee 0] \Leftrightarrow 0. \quad (161)$$

Disjunkcia je výrokotvorný funktor dvoch premenných výrokových. Značí sa „ \vee “ a vyslovuje sa „alebo“ s vylučujúcim zmyslom, tiež „buďto — alebo“. Napr. $p \vee q$. [Večer pôjdem na prechádzku] [alebo] $_{\vee}^p$ [pôjdem do kina]. „Alebo“ v tomto výraze značí disjunkciu, lebo súčasne ísť na prechádzku a do kina nemožno, vylučujú sa. (162)

LOGICKÉ ZÁKONY

tiež *logické tautológie* sú také výrokové funkcie výrokových premenných, ktorých výsledná výroková hodnota je vždy pravdivá, nech dosadíme za výrokové premenné ktorékoľvek výrokové hodnoty. (163)

Napr. výraz $\bigwedge_{p,q} [p \vee q \Leftrightarrow q \vee p]$ je logický zákon, tautológia, lebo keď dosadíme na miesto výrokov p a q výrokové hodnoty pravdu „1“ a nepravdu „0“ všetkými možnými spôsobmi — je ich 2^2 — dostaneme vždy výsledný výrok pravdivý: 1. (164)

Overovací postup robí sa metódou „zéro-jednotkovou“, ktorá záleží práve v dosadzovaní nepravdy, 0, zéra, a pravdy, jednotky, každým možným spôsobom do skúmanej funkcie. V danom výraze (164) metódu zéro-jednotkovú aplikujeme takto:

dosadíme za		do overovanej formulky	výsledok prvý	výsledok konečný
p	q	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$		
1	1	$1 \vee 1 \Leftrightarrow 1 \vee 1$	$1 \Leftrightarrow 1$	1
1	0	$1 \vee 0 \Leftrightarrow 0 \vee 1$	$1 \Leftrightarrow 1$	1
0	1	$0 \vee 1 \Leftrightarrow 1 \vee 0$	$1 \Leftrightarrow 1$	1
0	0	$0 \vee 0 \Leftrightarrow 0 \vee 0$	$0 \Leftrightarrow 0$	1

(165)

Nech sú teda p a q akékoľvek výroky pravdivé alebo nepravdivé, zložený výrok $\bigwedge_{p,q} [p \vee q \Leftrightarrow q \vee p]$ je pravdivý, preto je logickým zákonom, tautológiou.

p, q

Uviedeme najdôležitejšie logické zákony aspoň názvom a vzorcom:

1. hypotetický sylogizmus, tiež priamy dôkaz $\bigwedge_{p,q,r} [p \rightarrow q] \rightarrow [q \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow r]$ (166)

2. (obrátенý) zákon redukcie ad absurdum $\bigwedge_p [\bar{p} \rightarrow p] \rightarrow p$ (167)

3. zákon Dunsca Scota $\bigwedge_{p,q} [p, \bar{p} \rightarrow q]$ (168)

4. zákon kontradikcie, logického sporu $\bigwedge_p [p, \bar{p} \Leftrightarrow 0]$ (169)
5. zákon vylúčenia tretieho,
princíp exclusi tertii $\bigwedge_p [p \vee \bar{p} \Leftrightarrow 1]$ (170)
6. zákon dvojnásobného záporu $\bigwedge_p [\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p]$ (171)
7. komutatívnosť alternatívy (161) $\bigwedge_{p,q} [p \vee q \Leftrightarrow q \vee p]$ (172)
8. asociatívnosť alternatívy $\bigwedge_{p,q,r} [[p \vee q] \vee r] \Leftrightarrow [p \vee [q \vee r]]$ (173)
9. komutatívnosť konjunkcie (158) $\bigwedge_{p,q} [p, q \Leftrightarrow q, p]$ (174)
10. asociatívnosť konjunkcie $\bigwedge_{p,q,r} [[p, [q, r]] \Leftrightarrow [p, q], r]$ (175)
11. distributívnosť „,“ „oproti „,“ „V“ $\bigwedge_{p,q,r} [[p, [q \vee r]] \Leftrightarrow [p, q] \vee [p, r]]$ (176)
12. distributívnosť „,“ „V“ „oproti „,“ „V“ $\bigwedge_{p,q,r} [p \vee [q, r]] \Leftrightarrow [p \vee q], [p \vee r]$ (177)
13. idempotentnosť „,“ „V“ $\bigwedge_p [p \vee p \vee p \vee \dots] \Leftrightarrow p$ (178)
14. idempotentnosť „,“ „V“ $\bigwedge_p [p, p, p, \dots] \Leftrightarrow p$ (179)
15. $\bigwedge_p [p \vee 0 \Leftrightarrow p]$, $\bigwedge_p [p \cdot 1 \Leftrightarrow p]$, $\bigwedge_p [p, 0 \Leftrightarrow 0]$, $\bigwedge_p [p \vee 1 \Leftrightarrow 1]$ (180)
16. zákony de Morgana $\bigwedge_{p,q} [p \vee q \Leftrightarrow \bar{\bar{p} \vee \bar{q}}]$, $\bigwedge_{p,q} [p, q \Leftrightarrow \bar{\bar{p} \cdot \bar{q}}]$ (181)
17. zákon kontrapozície, nepriamy dôkaz $\bigwedge_{p,q} [p \rightarrow q] \Leftrightarrow [\bar{q} \rightarrow \bar{p}]$ (182)
18. implikácia $[p \rightarrow q] \Leftrightarrow \bar{p} \vee q \Leftrightarrow \bar{p} \vee q \Leftrightarrow p \vee \bar{q}$ (183)
19. alternatíva $[p \vee q] \Leftrightarrow \bar{\bar{p} \cdot \bar{q}} \Leftrightarrow [\bar{p} \rightarrow q] \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$ (184)
20. konjunkcia $p, q \Leftrightarrow \bar{\bar{p} \vee \bar{q}} \Leftrightarrow [p \rightarrow \bar{q}] \Leftrightarrow \bar{p} \cdot q$ (185)
21. ekvivalencia $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [p \rightarrow q, q \rightarrow p] \Leftrightarrow [\bar{p} \vee q, \bar{q} \vee p] \Leftrightarrow [\bar{p}, q, \bar{q}, \bar{p}]$ (186)

Logické zákony sú zložené z operátora, generalizátora, ktorý viaže výrokové premenné, a z operanda výrokovvej funkcie výrokových premenných. Dobré členenie a syntaktická konexita logických zákonov je zrejme vzorová.

POJMOVÁ STRÁNKA ZLOŽENÝCH VÝRAZOV

Syntaktickým dobrým členením a syntaktickou konexitou zložených výrazov dostali sme sa na dno vonkajšej slovnej výrazovej stránky ľudského myslenia. Na vonkajšom slovnom prejave odráža sa vnútorná pojmová, myšlienková činnosť: chápanie zmyslu výrazu, pojmu výrazom označeného. Tradičná logika chápanie zmyslu výrazu nazýva pojmom. „Pojmy sú všeobecné predstavy slovom označené,

schopné byť predikátom, t. j. funktorom“; z toho je jasné, že pojem má funkčnú štruktúru. (187)

Je potrebné priradiť k vonkajšiemu slovnému výrazu príslušnú pojmovú stránku.

Vlastnými menami si uvedomujeme a evidujeme *individuálne*, konkrétne skutočnosti. (188)

Pojmy *vlastností*, *vzťahov* a vôbec *skutkových stavov* vyjadrujeme funktoormi, to jest funkčne stavanými výrazmi. Klasický typ „pojmu“ je zmysel funkcie názvovej; nazýva sa *atributívnym pojmom*. Napríklad pojem vyjadrený

$$\left(\left(\begin{array}{c} \text{podstatným} \\ \text{menom} \end{array} \right)^F \left(\begin{array}{c} \text{vlastné} \\ \text{meno} \end{array} \right)_N \right) \cdot \left(\left(\begin{array}{c} \text{prídavným} \\ \text{menom} \end{array} \right)^{FF} \left(\begin{array}{c} \text{podstatné} \\ \text{meno} \end{array} \right)_n^F \right)^F \quad (189)$$

$$\left(\left(\begin{array}{c} \text{substantiva} \\ \text{propria} \end{array} \right)^F \left(\begin{array}{c} \text{nomina} \\ \text{propria} \end{array} \right)_N \right) \cdot \left(\left(\begin{array}{c} \text{atributy} \\ \text{substantíva} \end{array} \right)^{FF} \left(\begin{array}{c} \text{substantíva} \\ \text{propria} \end{array} \right)_n^F \right)^F \quad (190)$$

Funkčný aparát tvorenia atributívnych pojmov je veľmi pružný. Názvotvorné funktoory možno takmer neobmedzene kombinovať aj viacmiestnými argumentmi.

Funkčnú štruktúru atributívnych, názvových, nominálnych pojmov môžeme schematizovať takto:

$$\left(\left(\begin{array}{c} \text{funktor znamená} \\ \text{obsah} \\ \text{intenzíu} \\ \text{pojmu atributívneho,} \\ \text{t. j. tie vlastnosti, ktoré} \\ \text{sú spoločné pre všetky} \\ \text{veci tým funktoorm} \\ \text{označené} \end{array} \right)^{FF} \left(\begin{array}{c} \text{premenná} \\ \text{argument} \\ \text{prebieha} \\ \text{**názvy, ktoré dosadené} \\ \text{na miesto} \\ \text{argumentu} \end{array} \right)^F \right)^F \begin{array}{l} \text{rozsah} \\ \text{extenzia} \\ \text{pojmu atributívneho} \\ \text{znamená súbor, množinu} \\ \text{všetkých tých vecí,} \\ \text{ktorých*} \end{array} \quad (191)$$

spolu s názvotvorným funktoorm utvárajú hodnotu názvovej funkcie: názov, ktorý má v evidencii skutočnosť vzťahu $((\text{vlastnosť})_n^{FF}(\text{vec}))^F$. a v tom práve je zmysel a obsah pojmu atribúcie.

Ak dosadíme na miesto premennej názov veci, ktorá nepatrí do rozsahu pojmu, potom takáto hodnota názvovej funkcie bude mať síce zmysel, ako dobre členený a konexný výraz, ale ostatne neskutočný, neobjektívny. (192)

Napríklad: $((\text{štvorhanný})_n^{FF}(\text{kruh})^F)^F$, „drevené železo“ a všetky výplody voľnej fantázie, rozprávok a všetky tie zprávy, ktorých objektívnosť nebola doložená, patria sem. Daný výraz „štvorhanný kruh“ je dobre členený, ale „kruh“ nepatrí do rozsahu pojmu „štvorhannosti“, preto daný výraz má síce zmysel vzťahu akejsi „vlastnosti a veci“, ale je neskutočný, bezpredmetový, neobjektívny. (193)

Môžeme zhrnúť: vonkajšiu, výrazovú, slovnú stránku *názvových funkcií* sprevádza vnútorná, rozumová, pojmová stránka atributívnych pojmov.

* Čítajte ďalej pod **.

Sledujme teraz pojmovú, rozumovú, stránku slovných výrazov výrokových funkcií. Už pod (54) sme vyabstrahovali funkčnú formu výrokov:

$$\left[\left[\begin{array}{l} \text{sloveso,} \\ \text{verbum,} \\ \text{relátor} \end{array} \right]_{kn}^F \left(\begin{array}{l} \text{podmet, predmet, príslovkové určenia} \\ \text{subjekt, objekt, adverbiá} \\ \text{koreláta} \end{array} \right) \right] \quad (194)$$

$$\left[\left[\begin{array}{l} \text{obsah} \\ \text{dejový} \\ \text{[indikatív]}^{FF} \\ \text{vyjadruje akt} \\ \text{súdenia, tvrdenia} \end{array} \right]_{kn}^F \left(\begin{array}{l} \text{premenné} \\ \text{viacmiestne} \\ \text{**názvy ktorých} \\ \text{dosadené na miesto} \\ \text{argumentov} \end{array} \right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{rozsah} \\ \text{predikatívneho pojmu,} \\ \text{tiež aplikačná oblasť,} \\ \text{definičný obor výroko-} \\ \text{vej funkcie sú} \\ \text{dáta skutočnosti*} \end{array}$$

spolu s výrokovým funktorom tvoria hodnotu výrokovvej funkcie

[výrok]

a tento výrok [indikatívom]^{FF} slovesa vyslovuje zhodu

skutkového stavu

s obsahom pojmu [[relátor]_{kn}^F(koreláta)].

a v tej zhode je pravdivosť výroku.

Ak sa dosadia na miesto premenných názvy vecí, ktoré nepatria do rozsahu pojmu [definičného oboru funkcie, tu slovesa], čiže ak sa nezohoduje skutkový stav s obsahom výroku, potom výrok bude mať síce zmysel, ako dobre členený a konexný, ale bude nepravdivý. (196)

Keď porovnáme

výrazy	výrokové	a	názvové
a pojmy	predikatívne	a	atributívne,

$$\text{napr. } \left[(\text{strom})^F [\text{[je]}_n^{FF} (\text{zelený})^F]_n^F \right], \quad ((\text{zelený})_n^{FF} (\text{strom})^F)^F \quad (197)$$

vidíme, že oba dané príklady sú výrazy dobre členené a konexné a preto zmysluplné: súčasne znamenajú pravdivý, alebo nepravdivý výrok nejakej skutočnosti alebo neskutočnosti názov.

O pojmovej, zmyslovej stránke oboch výrazov poznamenávame toto: je odveký spor v logike o tom, či ľudské myslenie pramení v dvojčlenných súdoch, výrokoch, subjektovo-predikátovej štruktúry, v tzv. predikácii, alebo v „jednočlenných“ nominálnych, názvových pojmoch, v atribucii. Po odhalení funkčného ustrojenia myslenia môžeme teraz ustáliť: nie to je problém, či sa ľudské myslenie dá redukovať na „jedno-“ alebo dvojčlenné prototypy atributívne alebo predikatívne, ale to, že skúsenosťami tisícročí zistené dva druhy výrazové, slovesné a názvové, a nimi označené pojmy

* Čítajte ďalej pod **.

predikatívne a atributívne majú spoločnú funkčnú štruktúru: „funktor-argument“. Pre proces myslenia rozhodujúce je to, ako tento rovnaký funkčný aparát v oboch týchto prípadoch funguje, prebieha. (198)

Atributívny, nominálny, alebo názvový funkčný aparát myslenia prebieha tak, že dáta, obsahy, vzťahy, skutkové stavy skutočna, reálna sa názvovým funkčným aparátom jednoducho evidujú, registrujú. Napr. výraz „zelený strom“ registruje a eviduje vzťah objektu a jeho vlastnosti, konkrétne ten vzťah, že objekt strom je nositeľom vlastnosti zelenej farby. A tento pojmový moment sa exaktne zachycuje vo funkčnej štruktúre daného výrazu: $((\text{zelený})_n^{F^F}(\text{strom})^F)^F$. (199)

Predikatívny, verbálny, slovesný alebo vetný funkčný aparát myslenia funguje zasa tak, že komplexné vzťahové a dejové obsahy funktorov so skutkovým stavom svojich argumentov

1. alebo sa zhodujú, alebo sa nezahodujú a súd o tom sa vysloví oznamovacou vetou, výrokom, ktorý sa syntakticky člení a skladá formou:

$$\left[\left[(\text{kmeň}) \cdot \left[\begin{array}{c} \text{prípony} \\ \text{indikatívu} \end{array} \right]_n^{F^F} \right]^{F^F} (\text{argumenty}) \right]_{kn} \quad (200)$$

2. alebo sa želá, v akom vzťahu by mal byť obsah slovesa k svojmu argumentu, a to sa vysloví vetou želacou. Znaky želania, optatívu na slovese tvoria funktor „želaco-funktorotvorný“, ktorý ďalej skúmať, ani osobitným spôsobom označovať nebudeme, (201)

3. alebo sa rozkazuje, v akom vzťahu má byť obsah slovesa so svojím argumentom, čo sa vyslovuje vetou rozkazovacou. Znaky rozkazu, imperatívu na slovese je funktor „rozkazovo-funktorotvorný“, ani ten ďalej neskúmame. (202)

Len vety oznamovacie, čiže výroky sú nositeľmi objektívneho odrazu skutočna. Preto hovoríme, že vety oznamovacie, výroky, sprevádzajú kognitívne myslenie, kým vety želacie, optatívne — rozkazovacie, imperatívne a vôbec všetky také vety, ktoré tlmočia určité hnutie mysle, emócie, sú vyjadrením emocionálneho myslenia. (203)

Je pozoruhodné, že i vety kognitívne i emocionálne majú funkčnú štruktúru. Gramatické sloveso hrá úlohu funkтора a gramaticky podmet aspoň časť argumentu.

Znaky slovesných spôsobov, modi, sú zasa funktory alebo výrokotvorné alebo optatívno-funktorotvorné, alebo imperativo-funktorotvorné. Pre jazyky vedecké a umelé, ako je matematika, prichádzajú do úvahy len výrokovo-funktorotvorné funktory, krátko indikatívy, t. j. prostriedky tlmočenia logických súdov. (204)

V gramatike sa vyskytuje ešte ďalší druh viet, vety opytovacie, ktoré sú vlastne funkcie výrokové, funkcie želacie, alebo funkcie rozkazovacie podľa toho, na aký spôsob vetný sa pýtame. (205)

Gramatici hovoria, že nemožno vysloviť nijakú myšlienku bez toho, aby sme nevtvorili vety. Dodajme, že všetky vety či kognitívne, či emocionálne majú funkčnú štruktúru. Treba predpokladať, že vo funkčnej štruktúre viet gramatických sa odráža funkčná štruktúra samého myslenia a chápania a táto rovnaká štruktúra pre každého mysliaceho je podmienkou možnosti vzájomného dorozumenia sa ľudí, možnosti preloženia jednej reči do druhej. Funkčné procesy prebiehajú rovnako, stereotypne a tieto procesy neustálym opakovaním vypestúvajú sústavy podmienených reflexov druhej signálnej sústavy a tým kladú fyziologické a psychologické

predpoklady zautomatizovania funkčných procesov myslenia i samého aparátu asociácie predstáv.

Operátorové skladby, ktoré do živého, hovoreného jazyka prenikajú len veľmi pomaly, kým vo vedeckých jazykoch sú časté, znamenajú len prehĺbenie a spresnenie rozsahu argumentov funkčných výrazov, vyrastajú teda z funkčnej stavby.

Syntaktickým dobrým členením a syntaktickou konexitou funktorových i operátorových výrazov našiel sa postup, ako zistiť zmyslupnosť zloženého funktorového alebo operátorového výrazu či už v živom alebo umelom jazyku.