SLOVENSKÝ FILOZOFICKÝ ČASOPIS

ROČNÍK XIII 1958 ČÍSLO 3

KAUZÁLNA LOGIKA

(Pokračovanie)

VOJTECH FILKORN

V predchádzajúcej časti sme sa pokúsili oboznámiť čitateľa s niektorými snahami poľských logikov vyjadriť kauzálny kalkul. Rovnako bez väčšieho komentára rozoberieme v tejto časti Burksov kalkul, po ktorom bude nasledovať Jaśkowského koncepcia a zhodnotenie všetkých týchto kalkulov. Tieto úvodné časti chápeme aj ako vovedenie čitateľa do reči modernej logiky, aby ľahko rozumel nášmu vlastnému kauzálnemu kalkulu.

5. BURKSOV KALKUL

a) *Obsahové úvahy*

Burks považuje kauzálny kalkul za čisto logický. Podľa neho je kauzálna logika nezredukovateľná na žiadnu predchádzajúcu logiku. V tom prípade musí mať už aj svoj vlastný výpovedný kalkul. Jeho podstata spočíva v *kauzálnej implikácii*, ktorá je centrálnym bodom Burksovho kalkulu. Kauzálnou implikáciou sa vyjadrujú nielen výpovede opisujúce pôsobenie síl (energiu), ako napr. výpoveď, že dráha elektróna sa v magnetickom poli zakrivuje, ale aj výpovede opisujúce vlastnosti, schopnosti, dispozičné vlastnosti, ako napr. vlastnosti „rozpustný, ohnuteľný“ a pod. Výpoveď „stôl je zelený“ vyjadruje vlastne nasledujúcu kauzálnu situáciu: ak osvetlíme stôl bielym svetlom, tak sa od neho odrazí zelené svetlo. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že reálna vlastnosť je spôsob reagovania niečoho na niečo. Výpoveď „cukor je rozpustný vo vode“ vyjadruje, že keby sme dali cukor do vody, tak by sa rozpustil. Prvú spomínanú výpoveď vyjadríme v adekvátnejšej forme nasledovne: „ak elektrón vstúpi do magnetického poľa, tak sa jeho dráha zakriví“ a označujeme ju p c q, pričom p je výpoveď „elektrón vstúpi (je) do magnetického poľa“ a q je výpoveď „dráha elektróna sa zakriví“; c je funktor kauzálnej implikácie. Je to jediný funktor, ktorým sa kauzálny výpovedný kalkul líši od ostatných kalkulov. Burksov kalkul môžeme považovať za teóriu tohto funktora. Povahu kauzálneho funktora určuje Burks čiastočne implicitne tým, že opisuje vety, v ktorých vystupuje „c“ a že „c“ porovnáva s inými druhmi implikácie, a to s protifaktovou implikáciou „*s*“, s bežnou pravdovou (materiálnou) implikáciou „$\rightarrow$“ a so striktnou implikáciou „$\prec$“; c určuje čiastočne explicitne, obsahovo. Podľa obsahového určenia kauzálna implikácia p c q vyjadruje, že podmienka vyjadrená výpoveďou p je *dostatočnou* podmienkou toho, aby aj q bola pravdivá. Preto ak nastane situácia opísaná výpoveďou p, musí nastať situácia opísaná výpoveďou q. Prvá časť Burksových viet vyjadruje vlastne len povahu, vlastnosti dostatočnej podmienky. Sú to vety (3.1) — (3.6).

(3.1) vlastne nie je vetou kauzálneho kalkulu.

$$p \; c \; q \rightarrow q \; c \; p \qquad (3.1)$$

To, že (3.1) neplatí, vyjadruje vlastne nesymetrický charakter, a to že ak p vyjadruje dostatočnú podmienku pre pravdivosť q, q nemusí byť dostatočnou podmienkou pre pravdivosť p.

Ak sa funktorom c vyjadruje kauzálna dostatočnosť, tak antecedent implikácie môže obsahovať aj irelevantné alebo prebytočné podmienky.[1] Preto platí

$$p \; c \; q \rightarrow p \,.\, r \; c \; q \qquad (3.2)$$

Burks pripomína, že vete (3.2) by ako pravidlo odpovedala schéma $\dfrac{p \; c \; q}{p \,.\, r \; c \; q}$, do ktorého ak za r dosadíme $\bar{p}$, dostaneme

$p \; c \; q \rightarrow p \,.\, \bar{p} \; c \; q$ čiže

$\dfrac{p \; c \; q}{p \,.\, p \; c \; q}$, čo je proti bežnému užívaniu pojmu príčiny. Ak by platili uvedené schémy, tak situáciu vyjadrenú výpoveďou q by sme dostali vtedy, keď by sme navodili situáciu vyjadrenú výpoveďou p, ale aj vtedy, keby sme tú situáciu aj navodili aj súčasne odstránili. Spomínané schémy sú aplikáciou „ex falso sequitur quodlibet" na kauzálnu logiku. Burks sa z tejto nepríjemnej situácie dostáva len poukazom, že bežné chápanie termínu príčina nemá ani presnosť, ani logickú jednoduchosť, aká sa požaduje pre základný pojem logického systému.

Ak c vyjadruje dostatočnú podmienku, tak platí veta vyjadrujúca tranzitívnosť funktora c

$$(p \; c \; q \,.\, q \; c \; r) \rightarrow p \; c \; r \qquad (3.3)$$

Ako v obyčajnom výpovednom kalkule aj v kauzálnom kalkule platí pravidlo kontrapozície

$$p \; c \; q \rightarrow \bar{q} \; c \; \bar{p} \qquad (3.4)$$

ktorým sa vyjadruje okolnosť, že ak p vyjadruje situáciu zapríčiňujúcu situáciu vyjadrenú výpoveďou q, tak neprítomnosť situácie vyjadrenej výpoveďou q implikuje aj neprítomnosť situácie zapríčiňujúcej, slovom, kde chýba účinok, tam chýba aj príčina. Podobne platí aj

$$(p \,.\, q \; c \; r) \rightarrow (p \,.\, \bar{r} \; c \; \bar{q}) \qquad (3.5)$$

to značí, že ak p a q vyjadrujú čiastočné príčiny pre vznik situácie (účinku) vyjadrenej výpoveďou r, tak ak situácia opísaná výpoveďou p jestvuje, ale situácia opísaná výpoveďou r nejestvuje, nejestvuje ani situácia opísaná pomocou výpovede q. Z toho, že pomocou c sa vyjadruje kauzálna dostatočnosť, nasleduje neplatnosť vety $(p \,.\, q \; c \; r) \rightarrow (p \rightarrow (q \; c \; r)$. Jej neplatnosťou sa vyjadrí táto okolnosť. Dve podmienky vyjadrené výpoveďami p a q sú kauzálne dostatočné, aby spôsobili situáciu vyjadrenú výpoveďou r (teda $p \,.\, q \; c \; r$). Napr. ak je predmet ťažší ako vzduch a ak nie je podopretý, padá k zemi. Z toho kauzálne nenasleduje, že ak je jedna podmienka

---

[1] Pojem irelevantnosti budeme definovať neskoršie, keď pomocou neho budeme definovať pojem príčiny.

splnená, tak druhá je kauzálne dostatočná na to, aby vznikol účinok. Preto neplatí ani odpovedné pravidlo

$$\frac{p \,.\, q \mathrm{\ c\ } r,\ p}{q \mathrm{\ c\ } r}$$

Platí však veta

$$(p \,.\, q \mathrm{\ c\ } r) \rightarrow (p \mathrm{\ c\ } (q \rightarrow r) \tag{3.6}$$

z ktorej na kauzálnom základe nasleduje, že ak je splnená prvá podmienka, tak druhá utvorí účinok. Ľahko zistíme, že platia aj vety

$$(p \mathrm{\ c\ } q \,.\, p \mathrm{\ c\ } r) \equiv (p \mathrm{\ c\ } q \,.\, r) \tag{3.7}$$

$$((p \vee q) \mathrm{\ c\ } r) \equiv (p \mathrm{\ c\ } r \vee q \mathrm{\ c\ } r) \tag{3.7a}$$

Aby sme dobre poznali povahu funktora c, musíme ho porovnať s inými implikáciami. Všimnime si najprv *protifaktovú* a či subjunktívnu implikáciu p s q, o ktorej sa stále viac a viac diskutuje.[2] Uvedieme príklad. „Keby červíky boli cicavce, rodili by živé mláďatá." „Keby v dome vybuchla bomba, zničila by ho." Tu sa zdôrazňuje nevyhnutná, reálna súvislosť medzi cicavcami a rodením živých mláďat, a to, že červíky nie sú cicavce (teda, že *nie je faktom*, pravdou, že červíky sú cicavce). Preto sa uvedená implikácia volá protifaktovou. To značí, že ak platí p s q, tak nenastane alebo nenastala situácia opísaná výpoveďou p

$$p \mathrm{\ s\ } q \rightarrow \bar{p} \tag{3.8}$$

Pretože pomocou p s q sa vyjadruje nutný, no nerealizovaný vzťah, platí

$$p \mathrm{\ c\ } q \,.\, \bar{p} \rightarrow \bar{p} \mathrm{\ s\ } q \tag{3.9}$$

Burks majúc na mysli formalizáciu svojho kalkulu a pri všetkej rôznosti určité, podľa nás hlboko siahajúce analógie s obyčajným výpovedným kalkulom, uznáva platnosť implikácie (3.9) aj opačným smerom a dostáva

$$(p \mathrm{\ s\ } q) \equiv (\bar{p} \,.\, p \mathrm{\ c\ } q) \tag{3.10}$$

z čoho mu potom nasleduje

$$p \mathrm{\ s\ } q \,.\, q \mathrm{\ s\ } r \rightarrow p \mathrm{\ s\ } r \tag{3.11}$$

$$p \mathrm{\ s\ } q \,.\, q \mathrm{\ c\ } r \rightarrow p \mathrm{\ s\ } r \tag{3.12}$$

Videli sme, že s protifaktovou implikáciou veľmi úzko súvisia aj dispozičné vlastnosti. Poznáme niekoľko pokusov vyjadriť tieto vlastnosti pomocou materiálnej implikácie. Tak napr. x je rozpustné = (x sa v čase t ponorí do vody) $\rightarrow$ (x sa v čase t rozpustí). Pretože materiálna implikácia je pravdivá aj vtedy, ak je antecedent nepravdivý, tak ak za x dosadíme nejaký kus dreva alebo cukru, ktorý zapálime a necháme zhorieť, potom podľa uvedenej definície, hoci je to absurdné, spomínaný kus dreva alebo cukru by bol tiež rozpustný.[3] Jestvujú aj iné rovnako neúspešné pokusy vyjadriť dispozičné vlastnosti materiálnou implikáciou. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že snahy, ktoré chcú všetko vyjadriť len materiálnou implikáciou, sú pokusy o nehistorické chápanie logiky a o vtesnanie celého historického logického procesu do vopred určenej formy.[4] S podobným javom sa stretávame aj pri kauzálnej implikácii.

---

[2] Spomenieme len R. M. Chisholm, *The contrary-to-fact conditional*, Mind 1946; D. J. O'Connor, *The analysis of conditional sentences*, Mind 1951; F. Crahay, *L'analyse de la condition irréelle et la logique*, Revue philosophique 1955.

[3] Pap A., *Analytische Erkenntnistheorie*, Wien 1955, 27 n.

[4] Engels, *Dialektika přírody*.

Čo sa týka materiálnej implikácie „$\rightarrow$“ a jej vzťahu ku „c“, panujú tiež dve rôzne mienky. Prvá, ktorá vyplýva z humovskej koncepcie kauzality, musí tvrdiť, že hovorenie o kauzálnom vzťahu je ekvivalentné s hovorením o triedach a že kauzálna implikácia je ekvivalentná so všeobecnou materiálnou implikáciou, teda $(x)\,(f\,x \text{ c } g\,x) \equiv (x)\,(f\,x \rightarrow g\,x)$. Vo výpovednom kalkule by hovoriť o kauzalite podľa toho nemalo zmyslu. Podľa druhej mienky, čerpajúcej z experimentu, môžeme kauzálny vzťah vyjadriť vo forme $p \text{ c } q$, kde za p a q môžeme dosadiť výpovede opisujúce konkrétne situácie. Materiálna implikácia $p \rightarrow q$ je vlastne skratkou pre zložitejšiu výpoveď $\overline{p \cdot \overline{q}}$ (nie je pravdou, neplatí, že by výpoveď p platila a q neplatila). Kauzálna implikácia by zasa bola skratkou pre nasledujúcu výpoveď: je kauzálne nemožné, aby platila p a neplatila q. Z toho, že čo je nemožné, nejestvuje (nie je pravdivé), nasleduje, že z kauzálnej implikácie môžeme vyvodiť materiálnu

$$p \text{ c } q \rightarrow (p \rightarrow q) \tag{3.13}$$

hoci $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \text{ c } q)$ neplatí, t. j. neplatí $p \text{ c } q \equiv p \rightarrow q$. Je pravda, že rozdiel medzi kauzálnou a materiálnou implikáciou sa gramaticky ťažko postihuje. Pozná sa len z obsahu výpovedí a zo súvisu. Vzťahu materiálnej a kauzálnej implikácie sa ešte dotkneme, keď budeme hovoriť o probléme extenzionálnych a intenzionálnych systémov. Teraz prejdeme ku vzťahu medzi „c“ a „$\prec$“.
Striktná implikácia sa definuje takto:[5]

$$p \prec q =df\ \overline{\Diamond}\,(p \cdot \overline{q})$$

pričom $\Diamond$ je označenie základného termínu „možnosť“ a $\overline{\Diamond}$ je jeho negácia, „nemožnosť“, pomocou ktorej sa ľahko definuje nutnosť „$\Box$“

$$\Box\, p =df\ \overline{\Diamond}\ \overline{p}$$

Burks v snahe čo najbližšie spojiť svoj kalkul so známymi už jestvujúcimi kalkulmi postuluje, aby platila veta

$$p \prec q \rightarrow p \text{ c } q \tag{3.14}$$

t. j. ak nie je možné, aby platilo p a $\overline{q}$, tak je to aj kauzálne nemožné, ale nie naopak; preto neplatí $p \prec q \equiv p \text{ c } q$.

Výpoveď $(x)\,(f\,x \rightarrow g\,x)$ môže byť pravdivá bez toho, že by vyjadrovala hlbší súvis medzi f a g. Napr. „všetky knihy na mojom stole sú slovenské“ vyjadríme $(x)\,(K\,x \rightarrow S\,x)$, t. j. ak x je kniha, tak x je slovenská. Túto výpoveď vyslovujeme bez toho, že by sme chceli určiť nejakú zákonitosť a hlbšiu súvislosť. Práve naopak, ak vieme viac rečí a pre svoju prácu potrebujeme cudzojazyčnú literatúru, je pravdivosť spomínanej výpovede náhoda. Pri kauzalite ide o niečo viac, o hlbší súvis medzi dvoma situáciami — o niečo také, na čo môžeme použiť termín kauzálnej nutnosti $\boxed{c}$ a kauzálnej možnosti $\Diamond\!\!\!\!\cdot_{c}$, ktoré sú späté vzťahom

$$\Diamond_{c}\ p \equiv \overline{\boxed{c}}\ \overline{p} \tag{3.15}$$

Burksova kauzálna logika je teda modálna. Tým sa dosahuje podobnosť medzi teóriou striktnej implikácie a teóriou kauzálnej implikácie. Ako platí $p \prec q = df\ \overline{\Diamond}\,\overline{(p \rightarrow q)}$,[6] t. j. $p \prec q = df\ \Box\,(p \rightarrow q)$, tak aj pri kauzálnej implikácii platí

$$\boxed{c}\ (p \rightarrow q) \equiv p \text{ c } q \tag{3.16}$$

S vetou (3.14) je analogická veta

$$\Box\, p \rightarrow \boxed{c}\ p$$

---

[5] Lewis—Langford, *Symbolic Logic*, New York 1932, 124.
[6] Lewis—Langford, c. d., 165.

alebo veta

$\Box (p \rightarrow q) \rightarrow \boxed{c} (p \rightarrow q)$ (3.17)

S vetou (3.13) je analogická

$\boxed{c}\, p \rightarrow p$ (3.18)

alebo veta$(\boxed{c} (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$, ktorá je totožná s vetou (3.13).

b) *Formalizácia*

Po týchto obsahových úvahách pristupuje Burks k formalizácii, t. j. k vytvoreniu vlastného kalkulu kauzálnych viet. Burks buduje aj predikátový kauzálny kalkul, od ktorého odhliadame. Keď chceme formalizovať nejakú teóriu, systém, musíme uviesť formačné a transformačné pravidlá, t. j. uviesť základné termíny, formuly a pravidlá tvorenia ďalších termínov a formúl, ako aj uviesť pravidlá tvorenia nových formúl z daných formúl. Náš systém sa teda buduje nasledovne:

Formula sa skladá z výpovedných premenných $A, B, \ldots$ pospájaných logickými konštantami „$\rightarrow$", „$-$", „$\Box$" a „$\boxed{c}$" určitým spôsobom určeným tým, že „$\rightarrow$" je dvojargumentová funkcia a ostatné sú jednoargumentové funkcie, pričom negácia sa môže vzťahovať aj na „$\Box$" aj na „$\boxed{c}$". Tento spôsob môžeme definovať aj induktívne.

1. Výpovedná premenná alebo výpovedná konštanta je formula.
2. Ak A je formula, tak $\overline{A}$, $\Box A$, $\boxed{c} A$ je formula.
3. Ak A a B sú formuly, tak $A \rightarrow B$ je formula.
4. Útvary iného druhu (ak berieme do ohľadu aj nasledujúce definície) nie sú formulami.

Aby sa nám ľahšie pracovalo, zavádzame nasledujúce definície, ktoré majú funkciu skratiek.

$A \vee B = df\ \overline{A} \rightarrow B$ $Df(3.1)$

$A \,.\, B = df\ \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ $Df(3.2)$

$A \equiv B = df\ (A \rightarrow B) \,.\, (B \rightarrow A)$ $Df(3.3)$

$A \prec B = df\ \Box (A \rightarrow B)$ $Df(3.4)$

$A \mathrm{\ c\ } B = df\ \boxed{c} (A \rightarrow B)$ $Df(3.5)$

$A \mathrm{\ s\ } B = df\ \overline{A} \,.\, (A \mathrm{\ c\ } B)$ $Df(3.6)$

$\Diamond A = df\ \overline{\Box \overline{A}}$ $Df(3.7)$

$\Diamond_{c} A = df\ \overline{\boxed{c} \overline{A}}$ $Df(3.8)$

Ako všeobecne platné formuly (axiómy) prijímame

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ $A1.$

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$ $A2.$

$(\overline{A} \rightarrow \overline{B}) \rightarrow (B \rightarrow A)$ $A3.$

$\Box A \rightarrow \boxed{c} A$ $A4.$

$\boxed{c} A \rightarrow A$ $A5.$

$(\Box (A \rightarrow B)) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ $A6.$

$\boxed{c} (A \rightarrow B)) \rightarrow (\boxed{c} A \rightarrow \boxed{c} B)$ $A7.$

Ako pravidlá, ktorými z pravdivých formúl odvodzujeme ďalšie pravdivé formuly (transformačné pravidlá), prijímame

modus ponens: z A a $A \rightarrow B$ nasleduje B $P1.$

Ak A je axióma, platí $\Box A$ $P2.$

Z axióm pomocou pravidiel vyvodzujeme teorémy. Teorému definujeme pomocou pojmu dôkaz. Dôkaz formuly B na základe premís $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je konečný rad formúl, z ktorých každá je

1. buď axióma,
2. buď jedna z premís,
3. buď nasleduje na základe $P1$. z predošlých členov radu tak, aby jeho posledný člen bol B.

Dôkaz značíme $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$ alebo $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$

Teorém je formula dokázaná bez premís, teda len na základe axióm, ktoré, ako sme v predchádzajúcej časti uviedli, majú transformačnú funkciu.[7] Ak teda platí $\Rightarrow B$, tak B je teorémou.

Burks tvrdí, že všetky vety (3.2) — (3.18) sú teorémy. Dôkazy neuvádza. Aby bola Burksova stavba jasnejšia a najmä aby sa naše záverečné tvrdenia, že Burksov kalkul je modelom iných kalkulov, zdali jasnejšie, dôkazy urobíme sami. Pre uľahčenie pripomíname, že všetky teorémy obyčajného výpovedného kalkulu sú aj naše teorémy a že keď v teorémach obyčajného výpovedného kalkulu za premenné dosadíme kauzálne formuly, dostaneme teorému Burksovho kalkulu. To značí, že platí aj teoréma dedukcie

ak $(A, B \Rightarrow C)$ tak $(A \Rightarrow (B \rightarrow C))$

A teraz pristúpime k dôkazom viet (3.1) — (3.18).

Nepravdivosť výpovede (3.1) dokážeme tak, že ju vyvodíme z výpovede $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$. Nech je táto výpoveď vetou. Za A dosadíme p, za B dosadíme q, teda A/p, B/q. *Dostaneme*[8]

$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ (1)

z (1) podľa pravidla $P2$ (čo budeme označovať (1), $P2$) dostaneme

$\Box((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ (2)

$A4.$: $A \,/\, (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$, t. j. v axióme $A4$. za A dosadíme $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ a dostaneme

$(\Box((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow \boxed{c}\,((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$ (3)

(3), (2), $P1$., t. j. vetu (3) a (2) spojíme pomocou modus ponens a dostaneme

$\boxed{c}\,((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ (4)

$A7.$: $A \,/\, p \rightarrow q$, $B \,/\, q \rightarrow p$

$\boxed{c}\,((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (\boxed{c}\,(p \rightarrow q)) \rightarrow (\boxed{c}\,(q \rightarrow p))$ (5)

(4), (5) . $P1$.

$\boxed{c}\,(p \rightarrow q) \rightarrow \boxed{c}\,(q \rightarrow p)$ (6)

(6), $Df(3.5)$

$p \mathrel{c} q \rightarrow q \mathrel{c} p$ (7)

no $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ nie je vetou výpovedného kalkulu, a preto vetou nie je ani $p \mathrel{c} q \rightarrow q \mathrel{c} p$.

Dôkaz vety (3.2).

Z $A1$. — $A3$. a z príslušných definícií sa dokáže, že

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \,.\, r \rightarrow q)$ (1)

---

[7] Mnohí dôkazom nazývajú len vyvodenie bez premís, t. j. dôkaz dávajú do súvisu len s logickou, všeobecne platnou výpoveďou, ktorá nasleduje z každých okolností.

[8] A,B sú vlastne len menami výpovedí p,q.

je teorémou.
(1),$P2$.

$\Box\ ((p \to q) \to (p \,.\, r \to q))$ (2)

$A4$.: $A \,/\, (p \to q) \to (p \,.\, r \to q)$

$\Box\ ((p \to q) \to (p \,.\, r \to q)) \to \boxed{c}\ ((p \to q) \to (p \,.\, r \to q))$ (3)

(2), (3), $P1$.

$\boxed{c}\ ((p \to q) \to (p \,.\, r \to q))$ (4)

Dôkaz vety (4) budeme skrátene písať takto: (2),$A4$.,$P1$. a podobne to budeme robiť aj v prípade ďalších dôkazov.

(4), $A7$.

$\boxed{c}\ (p \to q) \to \boxed{c}\ (p \,.\, r \to q)$ (5)

(5), Df(3.5)

$p \mathrel{c} q \to p \,.\, r \mathrel{c} q$ (3.2)

Dôkaz vety (3.3).

Platí veta

$((A \to B) \,.\, (B \to C)) \to (A \to C)$ (1)

(1): $A \,/\, p, B \,/\, q, C \,/\, r$[9]

$((p \to q) \,.\, (q \to r)) \to (p \to r)$ (2)

(2),$P2$.

$\Box\ (((p \to q) \,.\, (q \to r)) \to (p \to r))$ (3)

(3),$A4$.,$P1$.

$\boxed{c}\ (((p \to q) \,.\, (q \to r)) \to (p \to r))$ (4)

(4),$A7$.

$\boxed{c}\ ((p \to q) \,.\, (q \to r)) \to \boxed{c}\ (p \to r)$ (5)

(5),A7.

$(\boxed{c}\ (p \to q) \,.\, \boxed{c}\ (q \to r)) \to \boxed{c}\ (p \to r)$ (6)

(6),Df(3.5)

$(p \mathrel{c} q \,.\, q \mathrel{c} r) \to (p \mathrel{c} r)$ (3.3)

Dôkaz vety (3.4).

$A3$.: $A \,/\, p, B \,/\, q$

$(\overline{p} \to \overline{q}) \to (q \to p)$ (1)

(1): $p \,/\, \overline{p}, q \,/\, \overline{q}$ za predpokladu, že $\overline{\overline{p}} \equiv p$

$(p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p})$ (2)

(2),$P2$.

$\Box\ ((p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p}))$ (3)

$A6$.: $A \,/\, p \to q, B \,/\, \overline{q} \to \overline{p}, P1$.

$\Box\ (p \to q) \to \Box\ (\overline{q} \to \overline{p})$ (4)

$A4$.: $A \,/\, (3), P1$.

$\boxed{c}\ ((p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p}))$ (5)

$A7$.: $A \,/\, p \to q, B \,/\, \overline{q} \to \overline{p}$

$\boxed{c}\ ((p \to q) \to (\overline{q} \to \overline{p})) \to (\boxed{c}\ (p \to q) \to \boxed{c}\ (\overline{q} \to \overline{p}))$ (6)

(5),(6),P1.

$\boxed{c}\ (p \to q) \to \boxed{c}\ (\overline{q} \to \overline{p})$ (7)

(7),Df(3.5)

$p \mathrel{c} q \to \overline{q} \mathrel{c} \overline{p}$ (3.4)

[9] Túto substitúciu nebudeme robiť a hneď budeme písať vety v tvare (2).

Dôkaz vety (3.5).
Z $A1.$ — $A3.$ dokážeme

$(p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (p \,.\, \bar{r} \rightarrow \bar{q})$ (1)

(1),$P2.$

$\Box\, ((p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (p \,.\, \bar{r} \rightarrow q))$ (2)

(2),$A4.$, $P1.$

$\boxed{c}\, ((p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (p \,.\, \bar{r} \rightarrow \bar{q}))$ (3)

(3),$A6.$

$\boxed{c}\, (p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow \boxed{c}\, (p \,.\, \bar{r} \rightarrow \bar{q})$ (4)

(4),$Df(3.5)$

$p \,.\, q \;c\; r \rightarrow p \,.\, \bar{r} \;c\; \bar{q}$ (3.5)

Dôkaz vety (3.6).
Z $A1.$ — $A3$ odvodíme

$(p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ (1)

(1),$P2.$

$\Box\, ((p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$ (2)

(2),$A4.$, $P1.$

$\boxed{c}\, ((p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$ (3)

(3),$A7.$

$\boxed{c}\, (p \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow \boxed{c}\, (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ (4)

(4),$Df(3.5)$

$(p \,.\, q \;c\; q) \rightarrow (p \;c\; (q \rightarrow r))$ (3.6)

Dôkaz vety (3.7).
Z A1. — A3. a z príslušných definícií odvodíme

$((p \rightarrow q) \,.\, (p \rightarrow r)) \equiv (p \rightarrow q \,.\, r)$ (1)

(1),$P2.$

$\Box\, (((p \rightarrow q) \,.\, (p \rightarrow r)) \equiv (p \rightarrow q \,.\, r))$ (2)

(2), $A4.$, $P1.$

$\boxed{c}\, (((p \rightarrow q) \,.\, (p \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q \,.\, r))$ (3)

(3),$A7.$

$\boxed{c}\, ((p \rightarrow q) \,.\, (p \rightarrow r)) \equiv \boxed{c}\, (p \rightarrow q \,.\, r)$ (4)

(4),$Df(3.5)$

$p \;c\; q \,.\, p \;c\; r \equiv p \;c\; q \,.\, r$ (3.7)

Vetu (3.7a) dokážeme podobne ako vetu (3.7), pričom vyjdeme z
$(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

Dôkaz vety (3.8).
Definíciu $Df(3.6)$ môžeme písať vo forme ekvivalencie. Preto

$p \;s\; q \equiv \bar{p} \,.\, p \;c\; q$ (1)

(1),$Df(3.3)$

$(p \;s\; q \rightarrow \bar{p} \,.\, p \;c\; q) \,.\, (\bar{p} \,.\, p \;c\; q \rightarrow p \;s\; q)$ (2)

Z $A1.$ — $A3.$ sa dá dokázať veta

$p \,.\, q \rightarrow p$ (3)

(3) : $p \,/\, p \;s\; q \rightarrow \bar{p} \,.\, p \;c\; q,\; q \,/\, \bar{p} \,.\, p \;c\; q \rightarrow p \;s\; q$

$((p \;s\; q \rightarrow \bar{p} \,.\, p \;c\; q) \,.\, (\bar{p} \,.\, p \;c\; q \rightarrow p \;s\; q)) \rightarrow (p \;s\; q \rightarrow \bar{p} \,.\, p \;c\; q)$ (4)

(2),(4),$P1.$

$p \;s\; q \rightarrow \bar{p} \,.\, p \;c\; q$ (5)

Z $A1.$ — $A3.$ sa dá dokázať veta

$(p \rightarrow q \,.\, r) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (6)

(6): $p \,/\, p \,\mathrm{s}\, q,\ q \,/\, \overline{p},\ r \,/\, p \,\mathrm{c}\, q$

$((p \,\mathrm{s}\, q) \rightarrow (\overline{p} \,.\, p \,\mathrm{c}\, q)) \rightarrow (p \,\mathrm{s}\, q \rightarrow \overline{p})$ (7)

(5),(7),$P1$.

$p \,\mathrm{s}\, q \rightarrow \overline{p}$ (3.8)

Vetu (3.9) dostaneme bezprostredne z Df (3.6) pomocou vety $p \,.\, q \rightarrow p$ a Df(3.3.)

Veta (3.10) je ekvivalentná s Df(3.6).

Dôkaz vety (3.11).

Z $A1$. — $A3$. a z príslušných definícií sa dá dokázať veta

$((\overline{p} \,.\, p \rightarrow q) \,.\, (\overline{q} \,.\, q \rightarrow r)) \rightarrow (\overline{p} \,.\, p \rightarrow r)$ (1)

(1),$P2$.

$\square\, ((\overline{p} \,.\, p \rightarrow q) \,.\, (\overline{q} \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (p \,.\, p \rightarrow r))$ (2)

(2),$A4$.,$P1$.

$\boxed{c}\, ((\overline{p} \,.\, p \rightarrow q) \,.\, (\overline{q} \,.\, q \rightarrow r) \rightarrow (\overline{p} \,.\, p \rightarrow r))$ (3)

(3),$A7$.

$\boxed{c}\, ((\overline{p} \,.\, p \rightarrow q) \,.\, (\overline{q} \,.\, q \rightarrow r)) \rightarrow \boxed{c}\, (\overline{p} \,.\, p \rightarrow r))$ (4)

(4),$A7$.

$(\boxed{c}\, (\overline{p} \,.\, p \rightarrow q) \,.\, \boxed{c}\, (\overline{q} \,.\, q \rightarrow r)) \rightarrow \boxed{c}\, (\overline{p} \,.\, p \rightarrow r)$ (5)

(5),Df(3.5)

$((\overline{p} \,.\, p \,\mathrm{c}\, q) \,.\, (\overline{q} \,.\, q \,\mathrm{c}\, r)) \rightarrow (\overline{p} \,.\, p \,\mathrm{c}\, r)$ (6)

(6),Df(3.6)

$p \,\mathrm{s}\, q \,.\, q \,\mathrm{s}\, r \rightarrow p \,\mathrm{s}\, r$ (3.11)

Dôkaz vety (3.12).

Z $A1$. — $A3$. sa dokáže veta

$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \,.\, p \rightarrow r \,.\, q)$ (1)

(1): $p \,/\, p \,\mathrm{c}\, q \,.\, q \,\mathrm{c}\, r,\ q \,/\, p \,\mathrm{c}\, r,\ r \,/\, \overline{p}$

$(p \,\mathrm{c}\, q \,.\, q \,\mathrm{c}\, r \rightarrow p \,\mathrm{c}\, r) \rightarrow ((\overline{p} \,.\, p \,\mathrm{c}\, q \,.\, q \,\mathrm{c}\, r) \rightarrow (\overline{p} \,.\, p \,\mathrm{c}\, r))$ (2)

(2) , (3.3) , $P1$.

$\overline{p} \,.\, p \,\mathrm{c}\, q \,.\, q \,\mathrm{c}\, r \rightarrow \overline{p} \,.\, p \,\mathrm{c}\, r$ (3)

(3) , Df(3.6)

$p \,\mathrm{s}\, q \,.\, q \,\mathrm{c}\, r \rightarrow p \,\mathrm{s}\, r$ (3.12)

Dôkazy vety (3.13).

$A5$.: $A \,/\, p \rightarrow q$

$\boxed{c}\, (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (1)

(1) , Df(3.5)

$(p \,\mathrm{c}\, q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (3.13)

Dôkaz vety (3.14).

$A4$.: $A \,/\, p \rightarrow q$

$\square (p \rightarrow q) \rightarrow \boxed{c}\, (p \rightarrow q)$ (1)

(1) , Df(3.4) , Df(3.5)

$p \prec q \rightarrow p \,\mathrm{c}\, q$ (3.14)

Veta (3.15) je ekvivalentná s Df(3.8)

Veta (3.16) je ekvivalentná s Df(3.5)

Veta (3.17) je ekvivalentná s axiómou $A4$.

Veta (3.18) je ekvivalentná s axiómou $A5$.

Odvodíme ešte vetu, že kauzálne nutný konzekvens je kauzálne implikovaný každým antecedentom. Teda

$\boxed{c}\ q \rightarrow (p \rightarrow q)$ (3.19)

Vyjdeme z vety

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (1)

(1), $P2.$

$\Box\ (p \rightarrow (q \rightarrow p))$ (2)

(2), $A4.$, $P1.$

$\boxed{c}\ (p \rightarrow (q \rightarrow p))$ (3)

(3), $A7.$

$\boxed{c}\ p \rightarrow (\ \boxed{c}\ (q \rightarrow p))$ (4)

(4), $Df(3.5)$

$\boxed{c}\ p \rightarrow q\ c\ p$ (5)

(5) $: p\ /\ q, q\ /\ p$

$\boxed{c}\ q \rightarrow p\ c\ q$ (3.19)

Sme si vedomí toho, že naše dôkazy by sa dali zjednodušiť. Nemuseli by sme sa vždy opierať o axiómy *A*1. — *A*3., ale z teorémov by sme mali a mohli odvádzať ďalšie teorémy. Náš postup, aj keď nie je elegantný, sme volili preto, aby sa jasne videlo, že Burksov kauzálny kalkul *KK* môžeme chápať ako model obyčajného výpovedného kalkulu *VK*. Môžeme to urobiť tak, že *VK* budeme považovať za teóriu alebo za abstraktný systém a *KK* za jeho realizáciu, špecifikáciu, ktorá vyhovuje všetkým axiómam *VK*. Možná realizácia totiž, v ktorej platia všetky vety teórie *T*, je modelom teórie *T*.[10]

Model skonštruujeme, keď určíme objekty a vzťahy, ktoré spĺňajú všetky vety teórie *T*. Aby teda *KK* mohol byť modelom *VK*, musí byť medzi nimi jednoznačné priradenie. A práve axiómy *A*3. — *A*7. a *P*2. môžeme chápať ako pravidlá, ktoré vyjadrujú formy priradenia. (Axiómy *A*1. — *A*3. a *P*1. sú axiómy *VK* a neprichádzajú teda do úvahy.) Pozrime si ešte raz Burksove formačné pravidlá a aplikujme ich na vnútornú štruktúru axióm. Ak axióma alebo teoréma vo *VK* má formu *A*, tak na základe *P*2. jej priradíme axiómu alebo teorému $\Box\ A$; z $\Box\ A$ na základe *A*4. a *P*1. dostaneme teorému $\boxed{c}\ A$,[11] ktorá patrí do *KK*. Podobná úvaha sa vzťahuje aj na prípad, keď axióma alebo teoréma má tvar $\overline{A}$. Ak axióma alebo teoréma *VK* má tvar $A \rightarrow B$, tak jej podľa *P*2., *A*4., *P*1., *A*7 *priradíme* $\boxed{c}\ A \rightarrow \boxed{c}\ B$. Podľa formačných pravidiel *A* alebo *B* v $A \rightarrow B$ môže mať tvar $p \rightarrow q$ a vtedy dostaneme $\boxed{c}\ (p \rightarrow q)$, čo považujeme za skratku, definíciu výpovede $p\ c\ q$.

Na základe týchto pravidiel môžeme každú teorému a axiómu *VK* premeniť v axiómu alebo teorému *KK*. Z toho, že *KK* je modelom *VK* a že *VK* je neprotirečiaci si (koherentný), nasleduje, že aj *KK* bude neprotirečiaci si. To je veľká výhoda Burksovho kalkulu, ktorá však ťažko môže vyvážiť nedostatky vzniknuté zo snahy prispôsobovať svoj kalkul a najmä pojem príčiny, aby sa mohol stať modelom *VK*.[12] Nehľadiac na tento nedostatok, musíme ďalej poukázať na to, že v Burksovom kalkule nejestvuje žiadna vnútorná, syntaktická rôznosť medzi $\Box$ a $\boxed{c}$. Tieto dva modálne funktory sú v *KK* celkom rovnaké. Funktor $\Box$ je zbytočné ohnivo medzi

[10] Tarski—Mostowski—Robinson, *Undecidable Theories*, Amsterdam 1953, 11.

[11] Máme axiómu *A* vo *VK*. Podľa P2. dostaneme z nej $\Box\ A$ a podľa *A*4. máme $\Box\ A \rightarrow \rightarrow \boxed{c}\ A$, z čoho podľa *P*1. dostaneme $\boxed{c}\ A$.

[12] Veľkou nevýhodou je aj to, že z *A*1.—*A*7. odvodíme $p\ c\ p$, čím sa vyjadrí, že situácia vyjadrená výpoveďou *p* je príčinou sebe samej.

vetami *VK* a medzi $\boxed{c}$. Nič by sa nestalo, keby sme vynechali *A*4. a *A*6. a miesto *P*2. sme dali pravidlo

Ak *A* je axióma, platí $\boxed{c}\ A$ P'2.

Ak však medzi $\Box$ a $\boxed{c}$ nie je vnútorný rozdiel, ich rozlišovanie nemá syntaktický význam a kauzálnu implikáciu môžeme stotožňovať so striktnou implikáciou, ako sa už dávnejšie nazdával Lukasiewicz. V tom prípade však kauzálna logika stráca svoj charakter kauzálnosti.

Ak *KK* je modelom *VK*, tak sa vynoruje ďalší problém. Vieme totiž, že jestvuje viac druhov výpovedného kalkulu. Klasický *VK* uznávajúci princíp vylúčenia tretieho, intuitivistický *VK* (a Kolmogorovov *VK)*, ktorý tento princíp neuznáva, a konečne minimálny *VK*, v ktorom okrem princípu vylúčenia tretieho neplatí ani pravidlo ex falso sequitur quodlibet, t. j. neplatí veta $\overline{p} \rightarrow (p \rightarrow q)$. Každému tomuto kalkulu by odpovedali rôzne varianty *KK*. Ktorá z nich bude pravdivá?

(Pokračovanie.)