

ZÁKLADNÉ MATEMATICKÉ POJMY

STANISLAV FELBER

A. UVOD

V predchádzajúcich úvahách sme dokazovali, že práve najzákladnejšie matematické pojmy nie je možné dokázať *vo vnútri* nejakého relatívne zatvoreného axiomatického systému. Je však možné a pre budovanie matematiky dôležité pokúsiť sa preskúmať, ako tieto pojmy vznikli, čomu odpovedajú v reálnom svete a podať tak ich *gnozeologický* výmer.

Som si pritom vedomý, že to, čo týmto spôsobom získame, nie je definícia v prísnom logickom zmysle. Základné pojmy matematiky sú také vysoké abstrakcie, že ich možno pokladať za kategórie. Číslo je napríklad vyjadrením kvantity, microu kvantita, ktorá sama je nedefinovateľnou kategóriou. Pôjde teda skôr o pokus opísať základné matematické pojmy.

Skúmanie vývinu matematických pojmov je pritom proste nevyhnutné, každá veda je napokon historickou vedou.¹ Je pochopiteľne temer nemožné skúmať vznik najzákladnejších pojmov *vôbec* a teda nielen matematických pojmov podrobne a presne od samých začiatkov primitívneho myslenia. Vývin ľudskej spoločnosti a teda aj ľudského myslenia neprebieha hladko a presne vpred;² mnoho však možno poznať z vývinu jazyka, z jazykov primitívov aj z detského myslenia.

Dnešná matematika, ktorá je mohutne rozvinutý a praxou mnohonásobne overený vedný systém, pravda, takéto gnozeologické výmery nepotrebuje, pokiaľ pri svojich dedukciách, svojich dôkazoch zotráva vo vnútri systému. Len čo sa však v danom systéme prejaví nejaké logické rozpory alebo keď treba matematicky zvládnuť nejakú novú úlohu, prejaví sa jasne potreba aj takýchto úvah. Ukážeme to neskoršie na príklade teórie množín.

B. ČÍSLO

a) *Prirodzené čísla*

Človek od svojho vzniku si vo svojom boji s prírodou musel proste všímať kvantitu a kvalitu javov a mal na to už aj schopnosti. Je pochopiteľné, že si kategóriu kvantity a kvality neuvedomoval tak ako my dnes, poznával ich priamo na konkrét-

¹ Engels F., *Dialektika prírody*, Bratislava 1954, 41.² Lenin V. I., *Brošiúra Juniusa, Sočinenija*, vyd. 4, 22, 296.

nych predmetoch, situáciách a procesoch, a to ešte hmlisto, nejasne, neuvedomelo, slovom tak, ako to vedia aj živočíchy nižšie ako človek. Aj zviera musí nejakým spôsobom rozoznávať kvality a kvantity, ba aj ich stupne, inakšie by nebolo schopné orientovať sa v prírode a zahynulo by.

Človek sa pochopiteľne dostal ďalej za púhe, viac-menej inštinktívne rozlišovanie. Spoločenská práca ho nútila, aby jednotlivé kvality aj kvantity medzi sebou porovnával.

Uvážme, čo mu toto porovnávanie umožnilo a ako tento proces prebiehal.

Podstatou reálneho sveta je hmota, v ktorej prebieha neprestajný proces. Aj hmota aj hmotný proces je vzájomne súvislý. No jednako sa len hmota aj hmotný proces súčasne diferencuje na *relatívne* samostatné, relatívne izolované celky a práve tak sa diferencuje aj hmotný proces. Niektoré z týchto celkov majú určitú stabilitu, teda dlhšie trvanie — pravda, len v pomere k ľudskému pozorovaniu. Takéto celky vzbudzovali v predvedeckom poznaní dojem, že sú celkom stále alebo že sa menia tak pomaly, že možno očakávať, že aj po dlhom čase budú práve také ako teraz (pravda, ak človek sám nezasiahne). Takými stálymi celkami boli hory, rieky, staré stromy a pod. Pomaly sa meniacimi celkami boli ľudia, zvieratá, rastliny, nástroje atď. Boli aj také celky, ktoré síce dočasne mizli, no zasa sa znova ukazovali — slnko, mesiac, hviezdy, poprípade aj blesk, hrom a pod. Prírodné, prvé ľudské myslenie chápalo takéto celky celkom izolované, aj keď sa ukazovala nejaká vzájomná súvislosť medzi nimi; zdalo sa proste, že každý takýto celok môže existovať sám osebe bez celkov druhých. Označíme takéto celky pomenovaním „vec“.³

Dnes, pravda, vieme, že takéto „veci“ nie sú izolované a že nie sú absolútne stále. Ich izolovanosť a stabilnosť je iba relatívna; predpoklad ich izolovanosti a stabilnosti vzhľadom k nejakému pozorovaniu je už vlastne prvým stupňom abstrakcie.

To isté by sme mohli povedať aj o hmotnom procese. Aj tu badáme diferenciáciu na určité čiastočné procesy, ktoré sú relatívne izolované. O stabilnosti je tu už ťažšie hovoriť, skôr je tu nápadné ich opakovanie. Povrchnému pozorovaniu, ktoré nejde do podrobností a už vôbec nie do hĺbky, môže sa zdať, že pri ich opakovaní ide o *ten istý proces*. Takými procesmi sa akiste videli prvým ľudom napríklad dážď, vietor, ročné obdobia atď. Pomenujeme tieto čiastočné, relatívne izolované procesy „udalosťami“.

Z takýchto vecí a udalostí sa skladal pre počiatkové ľudské myslenie celý reálny svet. Dnes je nám, pravda, jasné, že aj to, čo voláme vecami, predmetmi, sú vlastne tiež procesy a že delenie na veci a udalosti je relatívne, hoci pre prax užitočné.

Boj s prírodou a predovšetkým spoločenská práca nútili človeka, aby hľadal vo veciach aj udalostiach z jednej strany podobnosti a z druhej odlišnosti. Pojmy podobnosť a rozlišnosť sú prirodzene neodlučne spojené; podobnosť si môžeme uvedomiť iba vtedy, ak existuje súčasne aj odlišnosť a naopak.

Už dva vybrúsené pazúriky mali čosi spoločného a prirodzene aj čosi odlišného — keď nič iného boli aspoň na rozličných miestach, no boli prípadne aj badateľne rozdielne tvarom a veľkosťou. Boli však pritom obidva kusy z kameňa, slúžili obidva na tie isté účely. Je prirodzené, že si to prví ľudia neuvedomovali tak jasne ako my, no vedeli na tieto podobnosti aj rozdiely reagovať, a čo je dôležité, vedeli si

³ To je konečne význam, aký prikladáme slovu „vec“ aj dnes v bežnom živote.

ich *zapamätať*. Museli si ich zapamätať, lebo to bolo dôležité pre ich boj s prírodou, pre ich život. Práve tak to bolo aj s udalosťami, ktoré boli nejak dôležité pre život a spoločenskú prácu.

Môžeme teda povedať, že ľudia zistili určité *opakovanie* sa vecí a udalostí, ktoré mali určité znaky — prirodzene predovšetkým znaky, ktoré boli dôležité pre život. Pritom však veci a udalosti so spoločnými znakmi nespĺňali, neboli *totožné*; keď nie inakšie, líšili sa aspoň miestom a časom.

Veci, resp. udalosti, ktoré majú určité, pevne zvolené znaky, sú teda *podobné*. Potom *zo stanoviska voľby znakov* môžeme tieto veci, resp. udalosti pokladať za rovnocenné, ekvivalentné. Označíme tento vzťah symbolom „ $\sim$ “. Vzťah ekvivalencie je symetrický, tranzitívny a teda aj reflexívny,⁴ platí teda

$$(1) \quad (a_1 \sim a_2) \rightarrow (a_2 \sim a_1), [(a_1 \sim a_2) \& (a_2 \sim a_3)] \rightarrow (a_1 \sim a_3), \quad a_1 \sim a_1.$$

Po formálnej stránke tieto tri či vlastne prvé dva vzťahy stačia na definíciu ekvivalencie. Treba si však vždy uvedomiť, že ekvivalentnosť dvoch vecí, resp. udalostí závisí aj od voľby znakov, čo už nie je otázka čiste formálna, ale aj obsahová. Znaky volíme z nejakého hľadiska, volíme ich účelne, aby ekvivalencia niečo pre nás znamenala, aby sme tento vzťah mohli aj použiť.

Badáme už aj pri zvieratách, že vedia určité konkrétne situácie rozoznávať podľa určitých spoločných znakov — vedia dokonca zvukom takéto situácie označiť; vedia zvukom vyjadriť radosť, hnev, zármutok, strach atď. Človek prirodzene išiel ďalej, začal rozlišovať nielen celé situácie, no aj jednotlivé podrobnosti, jednotlivé veci a udalosti a prideloval im aj diferencované zvuky čiže začal tvoriť prvé zárodky slov.

Odzrazom tohto procesu je logický pojem triedy. Trieda je množina prvkov, ktoré majú určité, pevne zvolené spoločné znaky. Veci a udalosti teda pomenujeme spoločne prvkami; môžeme potom pojem triedy formulovať takto:⁵

$$(2) \quad [(a_k \in T) \& (a_1 \sim a_k)] \rightarrow (a_1 \in T)$$

Keby sme chceli zdôrazniť, že aj trieda je odvislá od voľby znakov, mohli by sme symbolom $f_k(a)$ označiť, že a má znak f a potom písať:

$$(3) \quad S^a(a \in T_{1,2,\dots,s}) \rightarrow [f_1(a) \& f_2(a) \& \dots \& f_s(a)],$$

kde f_1 až f_s značí zvolené znaky.⁶

Zdôrazňujeme stále voľbu znakov, lebo ona je v podstate otázkou gnozeologickou a nie teda otázkou čiste formálnej logiky, na čo sa veľmi často zabúda.

Tento proces je v podstate *dávanie mien* veciam a udalostiam; prebiehal pri-

⁴ Porovn. napr. Filkorn V., *Metóda vedy*, Bratislava 1956, 91.

⁵ Prvky budeme označovať malými písmenami, triedy veľkými.

⁶ Aby som sa vyhol prílišnému počtu zátvoriek, ktoré používam tak, ako ich používa matematika, označujem obidva kvalifikátory symbolmi $\underline{S}$ a $\underline{E}$ s indexmi písanými ako exponent. $\underline{S}^{a,b,c}$ teda značí: „Pre všetky a,b,c , platí...“ a $\underline{E}^{a,b,c}$ značí: „Existuje a,b a c , také, že...“. Indexy pri T značia znaky, podľa ktorých sme triedu tvorili.

rodzene celkom súbežne a vo vzájomnom podmienení s tvorením všeobecných pojmov. Je jasné, že vznikali aj pojmy a mená *jedinečné* — mená a pojmy jednotlivých členov príslušného kolektívu, pojmy a mená pre javy, ako bolo slnko, mesiac, jednotlivé hory, rieky atď. No vznikali aj pojmy a pomenovania pre triedy, ktoré obsahovali viac prvkov — teda vecí a udalostí.

V tomto prípade išlo však už o vyšší stupeň chápania diferenciácie reálneho sveta. Keď si ľudské myslenie vytvorilo triedy — ako by sme to dnes povedali — s počtom prvkov väčším ako jedna, vyjadriť aj opakovateľnosť určitých javov.

Aj diferenciovanosť sveta má totiž svoje dve stránky, kvalitatívnu a kvantitatívnu. Pri tvorení tried, pri dávaní mien prevláda uvedomenie kvalitatívnej diferenciovanosti — do triedy zahŕňame prvky, ktoré majú určité znaky, t. j. vlastnosti, a vylučujeme z nej prvky, ktoré tieto vlastnosti nemajú. Pretože však vytvárame triedy, ktoré majú viac ako jeden prvok, vystihujeme týmto procesom aj diferenciovanosť kvantitatívnu.

Už proste sám fakt, že *viac* vecí alebo udalostí pomenovali ľudia tým istým menom, dokazuje, že si hoc aj veľmi nejasne uvedomovali diferenciovanosť tak kvalitatívnu, ako aj kvantitatívnu.⁷ Boj s prírodou proste nútil primitívov, aby si uvedomili, že v niektorej triede je viac prvkov a v niektorej menej, aj keď tento fakt ešte nevedeli nijako vyjadriť. No zhadanie a postupné uvedomovanie tejto opakovateľnosti vecí a udalostí s rovnakými (alebo veľmi podobnými) znakmi bolo prvým krokom k vytvoreniu pojmu čísla. Je temer nemožné zistiť, kedy a za akých okolností sa ľudia pokúsili nájsť vyjadrenie aj pre túto opakovateľnosť, kedy si začali hľadať označenie kvantity diferenciovanosti sveta; akési zárodky číselníckych nachádzame aj v najprimitívnejších jazykoch. Keďže aj najprimitívnejšie kmene na zemi boli objavené už na prechode od prvobytnej spoločnosti k spoločnosti otrokárskej, možno súdiť, že prvé pokusy tohto druhu robili už ľudia v prvobytnej spoločnej spoločnosti. Prírodné, nejde tu ešte o pojem čísla, ba ani nie o skutočné číselníky; ide tu iba o to, aby nejakým zvukom vyjadrili opakovanie sa vecí a udalostí v nejakom konkrétnom prípade a v danej konkrétnej situácii. Dokazuje to fakt, ktorý sme už spomínali, že v niektorých primitívnych jazykoch existujú rozličné „číselníky“ pre rozličné predmety.

Je jasné, že si nevytvárali označenie počtu ďalej, než si to vyžadovali ich potreby a než teda boli vôbec schopní pochopiť. Tento proces možno sledovať zasa na vývine jazykov. Keď si už ľudia vytvorili číselníky v pravom slova zmysle a ich potreby si vyžadovali rátať väčšieho počtu predmetov, pomáhali si tým, že k určitým základným číselníkom pridávali po jednej, poprípade skladali. Niekedy je hračka najvyššej číselníky veľmi nízka — päť, niekedy aj tri.⁸ Najjednoduchší je systém pridávania u obyvateľov Malakky alebo v krajine pri úžine Torreovej. Tam sú totiž základom číselníky „jedna“ a „dve“ a z nich sa skladaním vytvárajú čísel-

⁷ Znaky, ktoré určovali príslušnosť k triede, vyberali prírodné ľudia z iného stanoviska, ako dnes my. Boli to znaky, ktoré nevystihovali podstatu vecí, znaky povrchové a viac-menej náhodné, no pre boj človeka s prírodou významné. V jazyku austrálskych Arantov značí to isté slovo „Kanta“ okrúhly list rastliny, druh pokrývky hlavy, podotlanú trávu, jazero, ktoré niekedy zamrzne, a chlad. (Kacnelson S. D., *Jazyk básnický a prvobytná obrazná reč*, Sborník Sovetská jazykověda, Praha 1949, 89.)

⁸ Oberpfalcer F., *Jazykověda*, Praha 1932, 262.

⁹ Wetter Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Praha 1926, 16.

¹⁰ Takýmto skladaním tvoria konečne vyššie číselníky aj jazyky vyvinuté; to však súvisí s desatinnou sústavou, ktorú spomenieme neskoršie.

ky vyššie.⁹ To už je, pravda, vyšší duševný výkon a predpokladá už jasnejšie chápanie čísla, no jednak len tieto sústavy dokazujú, že pôvodná hranica rátaných predmetov bola veľmi nízka.¹⁰

Zaujímavým pokusom označovať počet bolo tvorenie plurálu — poprípade duálu, triálu, ba aj kvartálu.¹¹ Ako ukazuje sám vznik jazyka, označoval zo začiatku určitý zvuk tak jednotlivý predmet alebo udalosť, ako aj kolektívne väčší počet vecí. Až na neskoršom stupni sa rozlišovanie jedného predmetu od viacerých označovalo najrozličnejšími spôsobmi. Niekde zostalo pôvodné slovo vo význame kolektívu a neskoršie plurálu, kým singulár sa označil nejakou časticou alebo koncovkou. Inde sa označil plurál — či už koncovkou, hláskovou zmenou alebo proste opakovaním slova.¹² Je ťažké robiť z týchto úkazov nejaké presné závery. Jasné je len to, že vývin chápania počtu išiel rozličnými cestami, odvislými od podmienok, v ktorých príslušná ľudská spoločnosť žila.

Lepešie možno už sledovať ďalší vývin pojmu čísla a tento ďalší vývin je aj významnejší pre pochopenie ako pojmu čísla, tak aj pre niektoré problémy modernej matematiky.

Pod vplyvom rozrastajúcej sa výroby ľudia totiž zistili, že aj v samom opakovaní sa vecí a udalostí možno nájsť určité podobnosti, akési opakovanie sa vyššieho stupňa. Na výrobu troch zložitejších nástrojov bolo treba vyrobiť každú súčiastku tiež trojmo, inakšie celá vec nesúhlasila a zbytočne sa marila námaha. Je prirodzene zasa ťažké zistiť, kedy sa toto poznanie začalo vynárať v myslení ľudí. Možno, že to nastalo už skôr, no nemožno pochybovať, že sa toto poznanie muselo vynoriť po prechode prvobytnej pospolnej spoločnosti na spoločnosť otrokársku.

Spoločnosť sa rozrastala a diferencovala, bolo treba rozoznávať skupiny ľudí aj v samom kolektíve. Vyrastal počet nástrojov a zbraní, ktoré sa stávali vždy zložitejšími; výroba prerastala spotrebu a umožňovali sa tým aj začiatky výmenného obchodu. Vznikalo súkromné vlastníctvo výrobných prostriedkov a vznikali tak skupiny vecí označovaných tým istým slovom a jednako len k sebe nepatriacich. Bolo treba porovnávať aj rozličné skupiny s odlišnými znakmi — piatim otrokom bolo treba pridať práve päť nástrojov atď.

Vyrástla slovom potreba ozajstného rátania tak vecí, ako aj udalostí. A tak si ľudia začali uvedomovať, že v skupinách troch otrokov, troch nástrojov, troch kusoch statku je niečo spoločného, že teda — presne povedané — kvantita diferencovanosti je v týchto inak rozličných skupinách spoločná. A ukázalo sa tak nielen možným, ale veľmi užitočným označiť túto podobnosť jednotlivých skupín tiež nejakým slovom, ktoré už možno pokladať za číslovku v pravom slova zmysle. Označenie kvantity diferencovanosti sa tak priblížilo k pojmu čísla, hoci od skutočného abstraktného pojmu čísla tak, ako ho chápeme dnes, bolo ľudstvo ešte veľmi ďaleko. Číslovka „tri“ označovala v tomto prípade stále ešte určitú konkrétnu vlastnosť určitých konkrétnych predmetov, ktorú však mali skupiny konkrétnych predmetov spoločnú s inými skupinami. Mohli by sme povedať, že ľudia už chápali počet predmetov, nie však všeobecný pojem čísla.¹³

Hoci však toto všeobecnejšie konštatovanie početnosti neznačilo ešte vznik

¹¹ Oberpfalcer F., *Jazykověda*, Praha 1932, 263.

¹² Porovn. napríklad Wundt W., *Völkerpsychologie I. Die Sprache II*, Leipzig 1904, 231n.

¹³ Ako ďaleko majú ešte aj dnes primitívne kmene, ktoré už vedia narábať číslovkami, od abstraktného pojmu čísla, spomínali sme v prvej kapitole. A badáme to ešte aj u našich detí.

pojmu čísla, jednako len malo veľký význam. Značilo totiž, že človek začal presnejšie porovnávať rozličné skupiny vecí nielen kvalitatívne, ale aj podľa ich početnosti; ujasňovali sa tým pojmy „viac“ a „menej“.

Porovnávanie podľa kritéria „viac“ alebo „menej“ sa pravdepodobne robilo prostým spájaním do párov, ako sa to ešte dnes robí u primitívnych kmeňov Austrálie aj inde.¹⁴ Vyrastalo to celkom prirodzene z pridelovania nástrojov aj z ich výroby. Bolo to však porovnávanie niekedy dosť nepohodlné a ťažko uskutočniteľné, osobitne tam, kde išlo už o väčšie množstvá. Keď si však človek už raz uvedomil, že v skupinách s rovnakým počtom predmetov je akýsi spoločný moment, akási podobnosť a že tento moment možno pomenovať spoločným menom (aj keď to možno ľudia nerobili dôsledne), uvedomil si aj, že takéto dve skupiny sú po určitej stránke (totiž kvantitatívnej) rovnocenné a že ich možno porovnávať aj s podobnou skupinou treťou. Mohli by sme povedať, že človek začal tušiť kvantitatívnu ekvivalenciu takýchto skupín a súčasne tranzitívnosť tejto ekvivalencie.

Kým teda človek prvé pomenovania tvoril vytváraním tried *predovšetkým*¹⁵ na základe kvalitatívnej ekvivalencie, začal si teraz vytvárať vyššie triedy na základe kvantitatívnej ekvivalencie.

Ten istý proces vykonáva však v abstraktnej forme dnešná teória množín. Namiesto zostavenia do párov použijú abstraktný pojem prosté zobrazenie množiny A na množinu B . Nech je $f(a)$ nejaké pravidlo, ktoré každému prvku množiny A priraďuje nejaký prvok množiny B .

Ak platí:

$$\begin{aligned} S^a & (f(a) \in B), \\ S^b & \{ E^a [(b = f(a)) \& (a \in A)] \}, \\ (a_1 = a_2) & \rightarrow [f(a_1) = f(a_2)], \\ (a_1 \neq a_2) & \rightarrow [f(a_1) \neq f(a_2)], \end{aligned}$$

potom je f prosté zobrazenie A na B a A a B sú ekvivalentné, čo zasa píšeme

$$A \sim B.$$

Dve ekvivalentné množiny majú rovnaký počet členov a to platí aj pre množiny nekonečné. „Počtom prvkov“ čiže kardinálnym číslom množiny pritom rozumieme ľubovoľného reprezentanta všetkých ekvivalentných množín, t. j. ľubovoľnú z týchto množín. Kardinálne číslo je teda pojmom reálneho čísla v najvyššej abstrakcii.

Aj ľudské myslenie si veľmi skoro našlo takéhoto reprezentanta kvalitatívne ekvivalentných tried — totiž svoju ruku s piatimi prstami, prípadne obidve ruky s desiatimi prstami. Bola to množina, ktorú mal človek vždy v pravom slova zmysle

¹⁴ Wetter Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Praha 1926, 15—16.

¹⁵ Pri vzniku jazykov išlo prirodzene o proces živelný a teda nie dôsledný; tam, kde boli kvantitatívne rozdiely dosť značné, vznikali triedy — teda mená — aj na základe kvantitatívnych znakov. Aj my dnes ešte používame slová „potok“ a „rieka“, „kameň“ a „balvan“ atď., hoci sa príslušné predmety reálneho sveta líšia iba kvantitatívne. Ba takéto pomenovania podľa kvantít aj dnes vedome zavádzame; meteorológia si napríklad viac-menej umelo vytvorila celý rad názvov pre vietor podľa jeho rýchlosti. Tu však ide o vedomú skratku za dlhšie kvantitatívne určenie.

naporúdzi a bolo pohodlne možné priradiť jej prvky prvkom hocijakej inej množiny a bolo možné dokonca toto priradenie urobiť púhym zrakom bez skutočného spájania do párov.

Všeobecnosť tohto postupu dokazuje rátanie na prstoch, rozšírené medzi všetkými primitívmi¹⁶ a obľúbené aj u našich detí,¹⁷ veľký počet jazykov (osobitne na nižšom stupni), v ktorých sú číselky priamo odvodené z názvov ruky¹⁸ a konečne všeobecná rozšírenosť decimálnej sústavy.

Pravda, desať prstov ruky skoro nestačilo zvyšujúcim sa potrebám. Sú známe prípady, keď ľudia použili aj prsty na nohe — dokazujú to dvadsiatkové sústavy, používané dôsledne u Aztékov v Amerike. Zvyšky takejto sústavy nachádzame v početných jazykoch.¹⁹ Inú pomoc si našli primitívi v južnej Afrike — jeden ráta na obidvoch rukách jednotky, druhý desiatky, tretí stovky atď.²⁰ V Austrálii rátajú nielen prsty, ale aj určité miesta na ľudskom tele — zápästie, lakeť, rameno atď.²¹

To všetko však nepostačilo, a to nielen preto, že bolo treba narábať vždy s väčšími číslami, no aj preto, že získané čísla si bolo treba zapamätať. A to sa stávalo vždy ťažším, keďže rátané počty predmetov boli vždy vyššie a keďže sa rátalo vždy viac a viac druhov predmetov. Veľký vplyv tu mal rozvoj súkromného vlastníctva výrobných prostriedkov a vzrastajúci výmenný obchod. Tu práve bolo treba porovnávať po stránke početnosti. Jednotlivé porovnávané skupiny sa pritom neraz od seba už tak líšili, že sa podobali práve a len v početnosti a že stanovenie počtu sa už do značnej miery odpúťovalo od konkrétnych rátaných predmetov. A ďalej sa stávalo vždy dôležitejším zapamätať si výsledky rátania predmetov.

A to priviedlo ľudstvo k poslednému kroku pred pochopením abstraktného pojmu čísla *vôbec*.

Nepostačujúce prsty začal napred človek nahrádzať kamienkami, mušličkami, konáríkmi, uzlami na šnúrach a vrubmi do drevených doštičiek alebo palíc.²²

Súbežne sa začalo vyvíjať prvé najjednoduchšie obrázkové písmo. Počet predmetov sa v samých začiatkoch naznačil priamo — predmet sa namaľoval toľkokrát, koľkokrát sa v zapisovanej skupine vyskytoval, ako to vidíme napríklad v indiánskom obrázkovom písme aj v najstarších hieroglyfických zápisoch egyptských²³ atď. Pri väčšom počte predmetov to prirodzene bolo nepohodlné a keďže sa už ľudia naučili rátať aj na vruboch do dreva, bolo celkom prirodzené, že si zápis zjednodušili, namaľovali jediný predmet a k nemu príslušný počet vrubov.²⁴ Na označenie väčšieho počtu bol prirodzene zasa tento spôsob nepohodlný.

¹⁶ Porovn. napr. Wundt W., *Völkerpsychologie I, Die Sprache II*, Leipzig 1904², 24n alebo Lévy L. — Bruhl, *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, Paris 1910, 204n.

¹⁷ Porovn. napr. Bühler K., *Nástin duševného vývoje dieťa*, Praha 1939, 77n.

¹⁸ Wundt W., c. d.; Pott A. F., *Die quinäre und vigesimale Zahlenmethode bei Völker aller Weltheile*, Halle 1847; Tropicke J., *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*, Leipzig 1902 a i.

¹⁹ Porovn. Pott A. F., c. d. Francúzi dodnes volajú 80 quatre-ving, Dáni 50 halvtresinstve, t. j. štyrikrát dvadsať, resp. polovička tretej dvadsiatky.

²⁰ Wetter Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Praha 1926, 12. Tu však pravdepodobne ide už o vplyv vyšších kultúr, kde je dôsledne desiatková sústava.

²¹ Tamže.

²² Wetter Q., c. d., 21.

²³ Jensen H., *Geschichte der Schrift*, Hannover 1925, III. kap.

²⁴ Myslí, že má pravdu Q. Wetter (c. d., 23), keď čiariky označujúce počet pokladá za obraz vrubov a nie prstov — v indiánskom obrázkovom písme nachádzame napríklad aj viac ako tridsať čiarok, označujúcich počet, čo by ťažko súhlasilo s vyobrazením prstov! No význam päťprstevej ruky sa nestratil ani tu, ako ešte uvedieme.

Keď sa však človek naučil zapisovať svoje myšlienky obrázkovým písmom, naučil sa skoro naznačovať aj pojmy, ktoré nebolo možné priamo nakresliť. V hieroglyfoch napríklad pojem „začiatok“ označil prednou polovicou sediaceho leva, „koniec“ zadnou časťou.²⁵ A tak prišli aj na myšlienku označovať väčší počet predmetov nejakou *jedinou* značkou, ktorá tento počet nejako pripomínala. Egypťania napríklad, ktorí používali desiatkovú sústavu, označovali „desať“ znakom , ktorý je pravdepodobne obrazom obidvoch rúk, „sto“ znakom , azda nejakou dĺžkovou mierou atď.²⁶ Stopy ruky, resp. obidvoch rúk badáme aj na označeniach v iných písmach, napríklad v rímskej päťorke a desiatke.

Nech si však už ľudské myslenie vytváralo pre čísla značky hocijako, v každom prípade toto značenie predstavovalo mohutný krok k abstraktnému chápaniu čísla. Z jednej strany to značilo, že sa v ľudskom myslení počet predmetov začínal odpútať priamo od konkrétnych rátaných predmetov, takže ho ľudia začínali písať ako *samostatnú* značku, spojenú síce ešte s predmetom, no jednak napísanú alebo pri znaku alebo pod znakom predmetu. A z druhej strany práve toto zapisovanie pomáhalo ešte viac vzdďaľovať pojem počtu od rátaného predmetu — takúto značku bolo možné napísať aj bez príslušného predmetu. Vidíme tiež, že tam, kde sa tento spôsob vypisovania počtu vyvinul, veľmi skoro nachádzame už aj rätanie s *nepomenovanými* číslami — napríklad v matematike egyptskej a babylonskej.²⁷

K plnému pochopeniu prirodzeného čísla ako celkom abstraktného pojmu došli však — aspoň v našej kultúrnej oblasti²⁸ — až Gréci. Aj starí Babylončania aj už Egypťania vedeli narábať s nepomenovanými číslami, no vždy im išlo o riešenie nejakej praktickej úlohy. Aj slávna „učebnica“ egyptského pisára Ahmósa z 19. stor. pred n. l. vychádza z konkrétnych príkladov, hoci dosť zložitých,²⁹ práve tak ako početné tabuľky zachované zo starej Babylónie, ktoré slúžili na praktické a možno aj kultické účely.³⁰ Len Gréci sa začali zaujímať o číslo *ako také*, bez ohľadu na praktické použitie.³¹

Zaujímal sa o deliteľnosť čísel, ako ukazuje známe sito Eratosthenovo na vyhľadávanie prvočísel alebo dokonca Euklidov dôkaz, že prvočísel je nekonečné množstvo. Aristoteles sa zaoberá existenciou čísel (a vôbec matematických pojmov) a dochádza k dôsledku, že „matematické náuky nemajú za predmet nič vnímateľného, ale tiež nič, čo by existovalo pre seba mimo sveta zmyslového“.³²

Ako abstraktne Gréci chápali pojem čísla, vidieť jasne z dvoch faktov. Predovšetkým je to okolnosť, že síce dospeli v štúdiu matematiky úžasne vysoko, no že sa jednak len uspokojili zapisovaním čísel pomocou písmen abecedy a nevytvorili

²⁵ Erman A., *Die Hieroglyphen*, Berlin-Leipzig 1923, 22. Niekedy išla „metaforickosť“ takého zápisu veľmi ďaleko, osobitne v prvých počiatkoch písma — pri rieke Kongu značí symbol  celé príslovie: „Hrniec, ktorý stojí na troch kameňoch, nespadne do ohňa.“ Loukotka Č., *Vývoj písma*, Praha 1946, 16.

²⁶ Wetter Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Praha 1926, 70n.

²⁷ Wetter Q., c. d. Pozoruhodní boli Babylončania svojou šesťdesiatkovou sústavou, ktorej pôvod nie je ešte vyjasnený, no ktorá je asi umelým útvarom. Pri zapisovaní sa však používalo akejsi kombinácie sústavy šesťdesiatkovej a desatinnej. Porovn. c. d. alebo Mikan M., *Jak se vyvinula matematika a geometrie*, Praha 1954, 12n.

²⁸ Je ťažké zistiť, ako sa vyvíjalo rätanie v Indii alebo v Číne.

²⁹ Wetter Q., c. d., 78n.

³⁰ Tamže 31n.

³¹ Poznali, pravda, aj všeobecnejší pojem čísla ako číslo prirodzené, no nás teraz zaujíma práve len tento druh čísel.

³² Aristoteles, *Metafyzika XIII*, 3.

si pozičný systém, ku ktorému poznali určité nábehy už starí Babylončania.³³ Zaujímali ich práve vzťahy čísel, ich vlastnosti atď., nie však *praktické* rábanie s číslami. Boli si však vedomí, že je možné pozičný systém vytvoriť, ako to dokazuje Archimedov spis *Psammites*.³⁴

A ďalej je to okolnosť, že pri svojich úvahách o číslach (a vôbec matematike) došli až k tomu, čo volá V. I. Lenin „odletom fantázie“ pri abstrakcii.³⁵ Napríklad Pytagoras alebo Platón pokladali čísla za reálne objektívne existujúce entity, ktoré sú dokonalým predobrazom nedokonalého a nepresného sveta, ako ho poznávame.

Taká asi bola cesta, ktorou sa vyvinul abstraktný pojem prirodzeného čísla. Tým, pravda, nechceme povedať, že sa tento pojem už ďalej nevyvíjal; jeho obsah sa prirodzene menil a sám pojem dostával nové a nové aspekty s ďalším vývinom pojmu čísla a vôbec s vývinom celej matematiky. Je však nesporné, že vtedy sa po prvý raz jasne vynoril v ľudskom myslení.

Rozobrali sme tento proces podrobnejšie z niekoľkých dôvodov. Predovšetkým je pojem prirodzeného čísla jedným z najzákladnejších pojmov matematiky — osobitne keď si ho matematické myslenie doplnilo pojmom nuly ako čísla, čím vznikol pojem čísla celého kladného.

Ďalej sme chceli znova ukázať, že matematika je aj v svojich najzákladnejších pojmoch odrazom reálneho sveta — pojem prirodzeného čísla vznikol na základe poznania reálneho sveta, na základe praxe, vyvíjal sa súbežne s potrebami ľudskej práce. Z nejasného chápania kvantitatívnej diferencovanosti badanej na konkrétnych veciach a udalostiach v konkrétnych situáciách došlo ľudstvo až k vysoko abstraktnému pojmu čísla.

Tým je možné aj vysvetliť, prečo sa nám pojem prirodzeného čísla vidí takým evidentným, samozrejým, apriórnym, že zvädza idealistických filozofov a matematikov k „odletu fantázie“ počínajúc antickými Grékmi a končiac zástupcami dnešných idealistických matematických škôl. Vysvetľuje to omyl intuicionistickej školy, ktorej sa vidí, že pojem prirodzeného (alebo celého kladného) čísla je nám „daný“ bez ohľadu na skúsenosť.

V skutočnosti je pojem čísla prirodzeného ozaj „daný“, no len vo vzťahu k matematickému systému; matematika ho preberá z *predvedeckej* skúsenosti do svojho systému, kde ho však spresňuje a vymedzuje v najvyššej abstraktnosti. Každý pokus definovať prirodzené čísla vo vnútri matematického systému nevyhnutne predpokladá pojem prirodzeného čísla a je teda logickým kruhom. Dnešná matematika si, pravda, pomáha tak, že nedefinuje priamo prirodzené číslo, no že proste vysloví určitý počet axióm, ktoré určujú základné vzťahy platiace pre prirodzené čísla. Mohlo by sa zdať, že v takom prípade ide jednako len o definíciu výpočtom charakteristických vlastností. Uvážme napríklad slávny axiomatický systém Peanov pre celé kladné čísla. Nech značí $N(x) : „x$ je číslo“ a zavedme dva nedefinované pojmy „nula“ (označíme 0) a „nasledovník x “ (označíme x'). Axiómy potom znejú:³⁶

³³ Mikan M., *Jak se vyvinula matematika a geometrie*. Praha 1954, 12n. Spolu-pôsobila tu, pravda, aj okolnosť, že starí grécki matematici vychádzali predovšetkým z geometrie. Robili to teda práve naopak ako dnešní matematici, ktorí pre axiomatický systém geometrie hľadajú „model“ v číselnej teórii.

³⁴ Tamže, 14.

³⁵ Lenin V. I., *Filosofické sešity*, Praha 1954, 300.

³⁶ Hilbert D., Bernays P., *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934, 220. Autori tu mimochodom dokazujú, že prvé dve axiómy nie sú nevyhnutné, to však na našich úvahách nič nemení.

- I. $N(0)$,
- II. $N(x) \rightarrow N(x')$,
- III. $N(x) \rightarrow N(x') = 0$,
- IV. $x' = y' \rightarrow (x = y)$,
- V. $\{ P(0) \ \& \ [P(x)] \rightarrow P(x') \} \rightarrow S^* P(x)$.³⁷

Vidíme predovšetkým, že sme tu „definovali“ celé kladné číslo pomocou dvoch v matematike *nedefinovaných* pojmov. Nedefinovateľnosť prirodzeného čísla sme tak iba presunuli na nedefinovateľnosť iných pojmov a dokonca dvoch. A ďalej sme zaviedli *dva* nedefinované pojmy a *päť* axióm. Pravda, axiómy netreba číslavať; bolo by dokonca možné spojiť ich do jedinej axiómy, keby sme ich proste pospájali symbolom &. Práve tak by nebolo treba výslovne hovoriť, že zavádzame práve dva nedefinované pojmy, no proste bez vysvetľovania písať v nich symboly „0“ a „x““. To však všetko nemení nič na fakte, že sme jednoduchší pojem celého kladného čísla definovali pomocou *dvoch* pojmov rozhodne zložitejších.

To isté platí o spomínanej definícii prirodzeného čísla (a čísla vôbec) v teórii množín. Alebo vyjdeme z Cantorovej definície: „Množina je súhrn určitých od seba rozlíšených predmetov nášho názoru alebo myslenia do jedného celku.“ Potom — nehľadiac na to, že táto definícia môže viesť k nejasnostiam — definujeme množinu pojmami, ktoré nemožno vtlesniť do systému matematiky a ktoré matematika preberá z gnozeológie. Alebo vytvoríme axiomatický systém pre teóriu množín a potom definujeme číslo pomocou pojmu množiny, ktorý ponechávame bez definície a platí tu to, čo sme už hovorili pri Peanovom systéme axióm.

Po týchto úvahách môžeme sa teda pokúsiť o vymedzenie podstaty pojmu prirodzeného čísla.

Ako sme už hovorili, hmota a hmotný proces sú nekonečne diferencované. Vznikajú relatívne izolované celky, ktoré sme pomenovali vecami a udalosťami. No tieto relatívne izolované celky sa spájajú do vyšších celkov a na druhej strane sú samy znova diferencované na nižšie celky. Ľudské myslenie odráža túto diferencovanosť; poznáva túto diferencovanosť a podľa tohto vzoru si aj samo podľa svojich potrieb takéto celky vytvára.

Toto spájanie nižších celkov na vyššie a naopak, rozpadávanie sa vyšších celkov na nižšie má prirodzene svoju kvalitu aj svoju kvantitu. Kvalita sa prejavuje v tom, že sa celky diferencujú podľa určitej zákonitosti, podľa určitých znakov;³⁸ kvantita sa prejavuje v tom, na koľko celkov nižších sa vyšší celok diferencuje.

Prirodzené číslo je presným abstraktným vyjadrením kvantity, diferencovanosti vyššieho celku hmoty a hmotného procesu na celky nižšie.

Že ide o vyjadrenie abstraktné, je jasné. Prirodzené číslo (ako ostatne každý abstraktný pojem) existuje práve v konkrétnych objektoch a nemá nijakej samostatnej existencie ako akási platónovská idea, nie je teda samo konkrétnym objektom. Iná otázka je, čo rozumieme *presným* vyjadrením. Naša formulácia si nenárokuje nejakú absolútnu logickú bezchybnosť definície, ide skôr o akési vysvetlenie z gnozeologického stanoviska; no jednako len treba povedať, čo sa tu myslí slovom „presne“.

Kvantitu diferencovanosti môžeme totiž vyjadriť aj neurčitým spôsobom, na-

³⁷ K piatej axióme, vyslovujúcej pravidlo úplnej indukcie, ešte sa vrátime. P tu označuje určitú vlastnosť čísel.

³⁸ Znaky samy môžu byť aj kvalitatívne aj kvantitatívne.

příklad „mnoho“, „málo“, „veľmi mnoho“ a pod. Čo myslíme presným vyjadrením, vysvitne vtedy, keď si osvetlíme aj spôsob, akým sa táto kvantita diferencovanosti určuje. Keď určujeme kvantitu diferencovanosti, pokladáme jednotlivé nižšie celky za ekvivalentné, no súčasne si uvedomujeme, že sú aj odlišné, že každý z nich je relativne izolovaný od ostatných ekvivalentných celkov. Slovom, každý takýto pevne zvolený nižší celok je *jednotkou*. Všetky jednotky daného vyššieho celku sú teda vzhľadom k tomuto celku súčasne totožné a súčasne rozdielne. Totožné sú preto, lebo možno jednu nahradiť druhou, rozdielne preto, lebo nesplývajú a netvorí jediný nižší celok.³⁹ Prvou podmienkou presnosti pri určovaní kvantity diferenciácie je teda voľba jednotky, ktorú pri tomto procese musíme pokladať za *stálu*, t. j. relativne stálu.

To však by nestačilo, nevyučovalo by to neurčité spôsoby určenia, ako „málo“, „mnoho“ a pod. Druhá podmienka vysvitne vtedy, keď začneme porovnávať dva vyššie celky podľa kvantity diferenciácie,⁴⁰ slovom, keď zavedieme vzťahy „viac“ resp. „menej“. Tento vzťah nie je definovateľný; je to podstatný immanentný vzťah obsiahnutý v pojme kvantity. Priamo prostredníctvom vzťahu „viac“, resp. „menej“ poznávame kvantitu, bez tohto vzťahu nemožno kvantitu pochopiť.⁴¹ Niekedy, pravda, možno vzťah „väčší“, „viac“ formulovať vo vnútri matematického systému; na príklad v teórii množín pomocou ekvivalencie s podmnožinou.⁴² Tu však vychádzame z iných nedefinovaných pojmov, ako sme to už spomínali.

Práve možnosť určiť vzťah „väčší“ (resp. „menší“) medzi dvoma kvantitatívnymi vyjadreniami diferenciácie je však podmienkou *presného* (mohli by sme povedať aj *exaktného*) vyjadrenia.

Vyjadrenie kvantity diferencovanosti vyššieho celku na celky nižšie je teda vtedy *presné*, ak vychádza z pevne zvolenej, relativne stabilnej jednotky a keď dovoľuje pri porovnaní kvantitatívnej diferenciácie dvoch rozličných celkov jednoznačne určiť vzťah „väčší“, resp. „menší“.⁴³

Naša formulácia, podotýkam, neplatí napríklad pre čísla racionálne, lebo sme zvolili pevnú, relativne stabilnú jednotku, od prípadnej diferenciácie ktorej abstrahujeme; všetky jednotky, ktoré tvoria daný celok, sú pritom ekvivalentné či už vzhľadom na zákonitosť diferenciácie alebo vzhľadom na našu voľbu znakov.

³⁹ Preto hovorí Hegel, že číslo je podľa momentu diskretnosti počtom, podľa momentu spojitosti jednotou. Hegel G. W. F., *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften*, Leipzig 1945⁵, 118.

⁴⁰ Jednotky nemusia byť v takýchto celkoch toho istého druhu.

⁴¹ Pravda, možno stanoviť charakteristické vlastnosti tohto vzťahu — je to vzťah asymetrický, irreflexívny, tranzitívny atď.; to však nie je definícia.

⁴² Ak označíme kardinálne číslo množiny M znakom $|M|$, potom:

$$\left(|M_1| < |M_2| \right) \equiv \left\{ E^N \left[\left(N_2 \subset M_2 \right) \& \left(M_1 \sim N_2 \right) \right] \right\} \& \left\{ E^N \left[\left(N_1 \subset M_1 \right) \& \left(M_2 \sim N_1 \right) \right] \right\} \quad (5)$$

⁴³ Podobné úvahy by sme mohli urobiť aj o vzťahu „rovnaký“, t. j. kvantitatívne rovnaký. Na kritérium v našom prípade by však tento vzťah nestačil. V tomto prípade možno však vzťah kvantitatívnej rovnosti priamo definovať vzťahom „väčší“. Keďže tu nemôže ísť o veličiny inkomenzurabilné, platí

$$\left[\left(\overline{n_1 > n_2} \right) \left(\overline{n_2 > n_1} \right) \right] \equiv \left(n_1 = n_2 \right), \quad (6)$$

kde n_k značí vyjadrenie kvantity diferenciácie k -teho celku.

Prv ako sa začneme zaoberať pojmom čísla vôbec, treba ešte krátku úvahu o nule ako čísle.

Nula nie je prirodzené číslo. Vyšší celok, ktorý sa diferencuje na nulu nižších celkov, proste sa nediferencuje. Pojem nuly ako čísla vyvíjal sa rozhodne veľmi pomaly. Ani Pytagoras ani Aristoteles ešte o nule ako čísle nehovorí, ba ešte aj Ptolemaios, ktorý nulu označuje 0, nepoužíva ju ako číslo v pravom slova zmysle, no iba ako skratku slova οὐδέν, t. j. nič.⁴⁴ Je to tým zaujímavejšie, že pritom gréckym matematikom a filozofom bol veľmi jasný pojem bodu.

Prvé náznaky chápania nuly ako čísla vznikli pravdepodobne tam, kde sa začal používať pozičný spôsob zapisovania čísel. Prvé stopy nachádzame, pravda, u starých Babylončanov;⁴⁵ no prázdny priestor alebo dokonca osobitná značka pre nulu značila práve len chýbajúcu mocninu šesťdesiatich, nikdy však výsledok nejakého výpočtu alebo dokonca jeho súčasť.⁴⁶ Aj keď totiž zistíme, že napríklad $2.16 - 4.8 = 0$, nemusíme ešte nulu na pravej strane chápať ako číslo, no iba za znak, že sa obidva výpočty na ľavej strane rušia, teda asi v duchu Ptolemaiovho znaku pre nulu. Sám som sa presvedčil, že takto tento výsledok chápú naše deti, aj keď už vedia dobre robiť aritmetické základné operácie.

Kedy začalo ľudské myslenie pokladať nulu za číslo, ťažko zistiť. Rozhodne bolo nevyhnutné chápať nulu ako číslo tam, kde sa začalo rátať s negatívnymi číslami. Akési náznaky vidíme u Diofanta (3.—4. stor. n. l.), ktorý hovorí o hyparxis a leipsis, t. j. o pridávaní a odpočítavaní už spôsobom, ktorý je blízky chápaniu negatívnych čísel, ba stanoví aj akési pravidlá pre násobenie kladných a záporných čísel. No negatívne čísla sú mu stále ešte len akýmsi naznačeným odčítaním, nie samostatným druhom čísel.⁴⁷ V pravom slova zmysle chápali negatívne čísla až Indovia, ktorí ich označovali osobitným znamienkom, bodkou nad číslom.⁴⁸ No ešte arabskí matematici neuznávali nulu ako riešenie rovnice.⁴⁹ Prvá zmienka o nule ako čísle pochádza zo 16. stor. M. Stiefel (1486 alebo 7 — 1567) tvrdí vo svojej knihe *Arithmetica integra* (1544), že kladné čísla sú väčšie ako nula, záporné menšie a nula že stojí uprostred medzi nimi.⁵⁰

Vidíme, že k pojmu nuly ako čísla došlo ľudské myslenie dvoma cestami. Predovšetkým akýmsi poprením — nula označovala, že nie je prítomná nejaká jednotka, na druhej strane položením, kladom, určením stredy, ktorý vyplýval medzeru medzi $+1$ a -1 .

A skutočne v dnešnom pojme nuly v matematike sú spojené klad aj negácia. Nula je predovšetkým vyjadrením faktu, že sa v danom prípade nevyskytujú nejaké určité jednotky (zostávajú stále v oblasti prirodzených čísel), čiže, že určitý vyšší celok *nie* je diferencovaný na celky nižšie. Keďže však ide práve o určité jednotky, súčasne nula takéto jednotky predpokladá a je teda aj kladom. Je totiž možné, že daný celok je diferencovaný na *iné* jednotky a potom vyjadrením kvantity dife-

⁴⁴ T r o p f k e J., *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung* I, Leipzig 1902, 10.

⁴⁵ M i k a n M., *Jak se vyvinula matematika a geometrie*, Praha 1954, 13.

⁴⁶ W e t t e r Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Praha 1926, 26n.

⁴⁷ T r o p f k e J., tamže, 164.

⁴⁸ Tamže, 165.

⁴⁹ Tamže, 155.

⁵⁰ Tamže, 166.

renciácie nie je už nula. Nula je teda, ako to hovorí Engels dopĺňajúc Hegla, nič niečoho a teda určité nič.⁵¹ „Nič každého kvanta je však samo ešte kvantitatívne určené a len preto možno s nulou rátať.“⁵²

Zavedenie nuly ako čísla je teda nielen oprávnené, ale nevyhnutné, a to ako zo stránky vnútornej logiky matematického systému, tak aj zo stránky gnozeologickej. Zavedenie nuly má však hneď za následok modifikáciu pravidiel pre základné matematické operácie. Výrazy $a \div 0$, $a \cdot 0$ majú jasný význam a spĺňajú základné pravidlá, výraz $a : 0$ stráca zmysel. Rozhodne neplatí $a : 0 = \infty$, ako to neraz vidíme dokonca aj v učebniciach.⁵³

V tomto súvisi treba povedať niekoľko slov o pomere nuly k nekonečnu. O matematickom nekonečne budeme hovoriť ďalej, tu stačí upozornenie, že nula nie je protikladom nekonečna. Nula je protikladom každého druhého kvantitatívneho určenia a to platí v podstate o každom určitom čísle. Protikladnosť nuly na rozdiel od ostatných čísel spočíva v tom, že nula označuje *neprítomnosť* nejakej určitej jednotky, kým druhé čísla konštatujú *prítomnosť* nejakých jednotiek.

Protikladom nekonečne veľkého môže byť len nekonečne malé, no nekonečne malé a nula nie sú a nemôžu byť totožné pojmy. Spomínali sme už v predchádzajúcej štúdii v tomto časopise problémy, ktoré z tohto faktu vyrastajú v infinitezimálnom počte, a ešte sa k veci budeme musieť vracieť. Stretávame sa s ňou aj v geometrii — pri určitých transformáciách napríklad bod v nekonečne odpovedá bodu v počiatku — nekonečno a nula tu zdanlivo stoja proti seba ako protiklady. To všetko však vyžaduje, aby sme rozobrali pojem matematického nekonečna. Ešte predtým však treba rozvážiť niekoľko iných problémov.

⁵¹ Engels F., *Dialektika prírody*, Bratislava 1954, 187, 221.

⁵² Engels F., tamže, 221.

⁵³ Je to veľmi nevhodná skratka za vzťah: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty$.