MATEMATICKÁ LOGIKA I

VOJTECH FILKORN

Matematická logika je dnes už pomerne dôležitá časť teórie matematických systémov a matematických strojov. Matematickou logikou sa presne vyjadrujú a analyzujú matematické postupy, skúmajú vlastnosti, možnosti a hranice, slovom povaha matematických disciplín a objavujú ich nové teorémy; pomocou nej sa presne a isto určujú rôzne automatické a telekomunikačné zariadenia, bez ktorých si ťažko predstaviť novú techniku. Okrem toho je matematická logika jednou z najprepracovanejších aplikácií modernej formálnej logiky na konkrétnu disciplínu (na matematiku).

Matematická logika je mladá disciplína, okolo ktorej sa nahromadilo veľké množstvo problémov a nedorozumení, ktoré sa len pomaly odstraňujú. Veľmi často ju spájali s idealistickou filozofiou a chápali ako nástroj na jej zdôvodnenie, a to nielen sami idealisti, ale často aj marxistickí filozofi. Táto okolnosť vyvolávala nesprávnu reakciu, chcejúcu likvidovať nielen idealistickú koncepciu matematickej logiky, ale aj ju samu. Okrem iného je úlohou tejto štúdie ukázať pravý, neidealistický charakter matematickej logiky.

Naša štúdia sa rozpadáva na dve časti. V tomto čísle uverejňujeme len prvú časť. V nej krátko skúmame okolnosti vzniku matematickej logiky a povahu matematickej logiky. V druhej časti budeme skúmať metódy jej stavby a jej aplikácie v technike. Pretože matematickú logiku nepovažujeme za celú formálnu logiku, musíme preskúmať aj jej vzťah k formálnej logike a všimnúť si vedúce princípy stavby celej formálnej logiky. Štúdia má elementárny a informatívny ráz, je určená pre neodborníkov a poukazuje na najnovšiu literatúru.

1. VZNIK MATEMATICKEJ LOGIKY

Vznik novej vedeckej disciplíny nie je náhodný, ale je vyvolaný vedeckou alebo spoločenskou potrebou. To platí aj o matematickej logike. Jej zrod siaha hlboko do raného novoveku a viaže sa na algebru, ktorá bola vtedy najdôležitejšou matematickou disciplínou. Rozvojom algebry sa zistilo, že jestvujú oblasti, ktoré sa dajú spracovať algebraicky (geometria, fyzika a pod.) a ktoré sa tak stávajú modelom algebry; algebra sa v týchto oblastiach zasa interpretuje. Postupne sa zistila aj podobnosť medzi aglebraickými operáciami a operáciami prebiehajúcimi myslením v mozgu. Procesy myslenia, najmä spájanie pojmov, usudzovanie a logické zákony sa vyjadrovali algebraickými operáciami. Algebra aplikovaná na myslenie sa volá *algebrou logiky* alebo logickou algebrou.

Z tohto hľadiska Boole[1] prvý pomerne systematicky prepracoval logiku a tak završil snahy Descartesa, Hobbesa a Leibniza. Boolova algebra používa znaky (premenné) $x,y,z\ldots$ na označenie tried vecí majúcich nejakú spoločnú vlastnosť alebo aj na označenie samej spoločnej vlastnosti $x,y,z\ldots$ a konštanty $+$, $.$ — označujúce operácie, pomocou ktorých spájame triedy $x,y,z\ldots$ v nové triedy. Všetky mysliteľné triedy $x,y,z\ldots$ sú prvky triedy všetkých vecí, ktorú označuje znakom 1. Okrem nej zavádza označenie pre prázdnu triedu. O. Boolova algebra sa netýka metód získania tried a im zodpovedajúcich pojmov o predmetoch daných tried, pretože tie považuje za dané a problém za psychologický, ale sa týka len metód, ktorými tvoríme zložitejšie útvary. Operácia $+$ je podobná množivému sčítaniu, operácia . množivému produktu (prieniku) a operácia — množinovému doplnku. Ako príklad zoberme spôsob, ktorým utvoríme triedu „tmavý písací stôl", o ktorej máme potom pojem tmavého písacieho stola. Aby nejaký predmet splnil podmienky „tmavého písacieho stola", musí patriť do triedy 1 a súčasne musí byť aj stolom (x) aj písacím náčiním (y) aj tmavým predmetom (z). To značí, že musíme utvoriť triedu $1.x.y.z$, ktorá má všetky spomínané vlastnosti súčasne. Tmavý písací stôl je prienikom všetkých týchto tried. K tej istej triede sa dostaneme, keď množinu 1 (ktorá sa často vynecháva) spojíme najprv prienikom s x a potom s y, ako keď 1 spojíme najprv s y a potom s x. Preto logický produkt je komutatívny

$$x.y = y.x. \tag{1.1}$$

Podobný zákon platí aj pri logickom sčítaní, ktorým spájame časti v celok. Ak napr. je x trieda mužov, y trieda žien, tak $x + y$ je trieda, do ktorej patria aj všetci muži aj všetky ženy. O obidvoch operáciách platí distributívny zákon

$$z.(x + y) = z.x + z.y. \tag{1.2}$$

Logickým doplnkom vyjadrujeme negáciu. Ak je x trieda stolov, tak $1 - x$ je trieda všetkých predmetov, ktoré nie sú stoly.

Medzi bežnou vtedy známou algebrou a algebrou logiky nie je však úplná totožnosť, ba ani nie podobnosť. Tak v bežnej „matematickej" algebre platí $x.x = x^2$; no keď algebrou logiky z triedy 1 vyberieme triedu x a keď z triedy x znovu vyberieme triedu x, dostaneme znovu tú istú triedu x. Preto v algebre logiky $x \,.\, x = x$, čiže $x^2 = x$. Tento poznatok veľmi posilnil tendencie, ktoré sa snažili o utvorenie nových druhov algebier a pomohli rozvoju teórie algebry. Z rovnice

$$x^2 = x \tag{1.3}$$

nasleduje $x - x^2 = 0$ a z tohto $x.(1 \quad x) = 0$. *Výraz* $x.(x\text{-}1)$ predstavuje triedu predmetov, ktoré sú x a ktoré sú súčasne $(1\text{-}x)$, t. j. ktoré sú nie x. Pretože tento produkt sa rovná nule, rovnica hovorí, že nejestvujú predmety, ktoré by boli x a súčasne boli nie x. Táto rovnica vyjadruje teda zákon neprotirečenia. No (1.3) platí aj v obyčajnej algebre, ak v nej za premenné dosadíme len 1 alebo 0. Zákony, axiómy a operácie takej algebry sa stotožňujú so zákonmi a operáciami algebry logiky.[2]

---

[1] G. Boole, *The Mathematical analysis of logic*, 1847; *An investigation of the laws of thought*, 1854.

[2] Keď x, y, z, ... interpretujeme ako výpovede, $+$ ako odisjunkciu, . ako konjukciu, — ako negáciu, 1 ako pravdu, 0 ako nepravdu, Boolova algebra prejde vo výpovedný kalkul.

V ďalších statiach zavádza Boole pojem funkcie, v ktorej premenná môže mať len dve hodnoty, a najmä pojem rozvinutia funkcie, t. j. vyjadrenia toho, čo je vo funkcii obsiahnuté. Rozvinutie funkcií je systematické určovanie všetkých tried, ktoré sa môžu utvoriť z určitej triedy (predpokladu, premisy, antecedentu) pomocou operácií a zákonov. Pritom sa hneď určuje, ktorá vzniknutá trieda (dôsledok, konzekvens) má stále hodnotu 1 alebo stále hodnotu 0. Rozvinutie funkcií sa teda stotožňuje s dedukciou, pri ktorej sa dôsledky vypočítajú (vyrátajú) z premís.[3]

Hlavné prednosti Boolovej algebry boli v tom, že sa do logiky voviedla jasnosť, presnosť a prehľadnosť, čím sa *vyznačovala* algebra. Ďalšou výhodou bolo, že sa rozšíril pojem dôsledku a určilo kritérium, pomocou ktorého sa neomylne zistí, čo všetko nasleduje z daných podmienok. V tej situácii sa algebra zdala byť nadradená a logika podradená. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že ak je v lepšej situácii matematika (algebra), ak sa zdá istejšia, dokonalejšia, tak pomáha logike, stáva sa jej vzorom a logika sa algebraizuje. Len čo sa však matematika dostáva do ťažkostí a v analýze a teórii množín sa objavujú nejasnosti, nepresnosti a nezáväznosti, pomer sa mení a matematika sa ohliada po logike, ktorou by sa ťažkosti odstránili a dala sa dokázať koherentnosť, bezospornosť matematiky. Tým sa logika stáva rovnocennou matematike alebo ju aj prevyšuje, takže sa objavuje snaha odvodiť matematiku z logiky, t. j. logizovať matematiku.

A matematika sa skutočne dostala do ťažkostí. Búrlivý tvorivý rozvoj analýzy začínajúci sa objavením infinitezimálneho počtu niesol so sebou aj to, že matematici v snahe objaviť čím väčšie množstvo poučiek, menej dbali na spôsob a presnosť ich dokazovania. Matematické dôkazy sa často stavali len na názore, v ktorom sa skrývalo veľmi mnoho neuvedomelých, bližšie neanalyzovaných a jasne neformulovaných predpokladov. Tým sa v matematike množili nejasnosti späté najmä s pojmom funkcie a nekonečne malého. Tento proces vyvrcholil, keď sa v teórii množín objavili antinómie. Je zrejmé, že nejasnosti nakoniec museli prekážať samému tvorivému rozvoju matematiky, a preto sa v XIX. stor. objavila celá skupina matematikov, ktorí kládli najväčší dôraz na logickú čistotu a prísnosť dôkazov a postupov a začali skúmať základy, na ktorých stojí matematika. Pomaly vznikala celá teória o dôkaze a metóda, ktorou sa hľadajú predpoklady ľubovoľného tvrdenia[4] a základy celých disciplín, ako aj spôsoby a možnosti redukcie jednej disciplíny na inú ľahšiu, jasnejšiu a lepšie vybudovanú disciplínu. Sem patrí napr. snaha aritmetizovať celú matematiku a hľadať euklidovské modely pre neeuklidovské geometrie. Tieto snahy sú spojené s menami Weierstrass, Dedekind, Poreckij, Frege a i., ktorí sa usilovali rozmontovať nielen matematické postupy, ale aj ich východisko a začali skúmať nielen súvislosti medzi číslami, ale aj (logickú) stavbu samého celého a reálneho čísla a jeho objektívneho korelátu. Tak vznikali zásady presnej metódy matematiky, ktorú Frege aspoň čiastočne nasledovne určuje. „Ideál prísne vedeckej metódy matematiky, o ktorý sa tu usilujem a ktorý by sa mohol nazvať Euklidovým ideálom, mohol by som takto opísať. Nemôžeme žiadať, aby sa všetko

---

[3] J. Jörgensen, *A treatise of formal logic* I, London 1931, 103 a n. Moderné metódy algebraizácie, ako ich rozvíjajú najmä poľskí logici, uvedieme v druhej časti.

[4] Teória dôkazu sa vyvíjala aj pod vplyvom snáh dokázať piaty Euklidov postulát. V tejto súvislosti sa vynoril aj problém vzťahu medzi štruktúrou dôkazu a povahou systému, v ktorom sa dôkaz uskutočňuje. Došlo sa najmä k bezospornosti a úplnosti systému. Tým sa položili prvé základy teórie systémov, ktorá mala široké uplatnenie a ktorá sa stala celkom nevyhnutnou vtedy, keď geometrovia zistili, že podstata geometrií je v štruktúre, vo vzťahových sieťach a súvislostiach a nie v našom úzkom názore konkrétnych geometrických útvarov.

dokázalo, lebo to nie je možné; no môže sa požadovať, aby sa jasne, vyslovene vypočítali všetky vety, ktoré sa používajú bez dôkazu, aby sme tak jasne poznali, na čom spočíva celá stavba. Musíme sa usilovať zmenšiť čo najviac počet týchto základných zákonov tým, že dokážeme všetko, čo je dokázateľné. Ďalej žiadam, a tým idem nad Euklida, aby sa napred uviedli všetky spôsoby vyvodzovania a nasledovania, ktoré sa používajú. Bez toho sa s istotou nesplní prvá požidavka."[5] „Tým, že reťaz dôkazov bude bez medzier, dosiahneme, že každá axióma, predpoklad..., na ktorom spočíva nejaký dôkaz, dostane sa na svetlo,"[6] čím sa možnosť omylu zredukuje na minimum a presne sa ohraničia oblasti, v ktorých sa majú hľadať prípadné chyby. Pred Fregom sa hlavný dôraz kládol na axiómy a zabúdalo sa na metódy ich tvorenia a určovania kritérií a podmienok, ktoré musí nejaká veta spĺňať, ak má byť axiómou. Nazdávalo sa, že podstatná vlastnosť axiómy je jej jasnosť, evidencia alebo naša vôľa vyhlásiť tú ktorú vetu za axiómu. Rovnako sa zabúdalo na formy postupu od axióm k teorémam. Frege jasne pochopil, že pojem teorémy je relatívny a má význam nielen z hľadiska určitých axióm, ako sa dovtedy všeobecne myslelo, ale aj *len* z hľadiska určitých pravidiel postupu (a deduktívnych pravidiel). To značí, že deduktívne pravidlá sa prestali chápať ako vrodená výzbroj nášho rozumu a chápali sa ako vnútorná vlastnosť skúmaných systémov odrážajúcich objektívne súvislosti sveta. To všetko viedlo k vyhľadávaniu pravidiel, ktoré sú skryté v matematických postupoch, a k ich jasnému formulovaniu. To donútilo Fregeho, aby doslova vypreparoval všetky predpoklady a prostriedky, na ktorých sa podľa jeho mienky buduje matematika. Frege uviedol všetky definičné a deduktívne formy a tým vniesol mnoho svetla do tejto disciplíny. Že pritom nazval tieto predpoklady a prostriedky, definičné a deduktívne pravidlá jednoducho logikou (a nielen časťou logiky), je iná záležitosť, hlboko koreniaca v jeho čiastočnom idealizme. No hlavné jadro jeho snáh je živelne materialistické, snažiace sa urobiť z logiky nástroj budovania vied (matematiky) a vedu vnútorne spätú s ostatnými disciplínami. Tým sa formálna logika ako veda prebudila z letargie a oslobodila zo zajatia metafyzicky orientovaných filozofií.

Frege načal oblasť, ktorá má nedozierne šírky. Matematici, ktorým záležalo na presnosti a základoch svojej disciplíny, t. j. matematickí logici sa neuspokojili len s viac-menej náhodným vypočítavaním matematických postupov (definičných a deduktívnych), ale začali skúmať vzťahy medzi nimi a systémom, v ktorom majú zmysel; začali sa vyhľadávať metódy, pomocou ktorých sa vypočítajú a určia všetky pravidlá potrebné na usporiadanie určitej oblasti charakterizovanej učitými vlastnosťami, t. j. začali sa skúmať metódy tvorenia a stavby deduktívnych a definičných pravidiel, ktoré sú nevyhnutné pre vybudovanie určitej disciplíny. Pritom sa museli skúmať vzťahy medzi axiómami a deduktívnymi pravidlami. Zistilo sa totiž, že pri stavbe systémov vychádzajúc z určitých axióm nemôžeme používať ľubovoľné definičné a deduktívne pravidlá, že teda medzi východiskom a postupom sú hlboké súvisy. *Metódy stavby pravidiel* dedukcie a definovania, *metódy* tvorenia *axióm*, *pravidlá* určujúce *možnosti* a dosah ich *aplikácie*, *povaha* a *teória systémov*, v ktorých majú tieto pravidlá zmysel, to sú okruhy, ktoré sa v podstate stotožňujú s *matematickou logikou*, a presne hovoriac sú teóriou matematických a matematizovateľných systémov, a to najmä teóriou axiomatických systémov.

Z toho, že matematická logika je teóriou *určitých* systémov, nasleduje, že ju nesmieme stotožniť s modernou formálnou logikou. Matematická logika, nakoľko

[5] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik* I, Jena 1893, VII.
[6] Frege, c. d., VII.

sa stotožňuje s logikou vôbec, často sa nazýva symbolická logika alebo *logistika* a považuje sa za najrozvinutejšiu formu logiky.[7] V skutočnosti a neskoršie to dokážeme, matematická logika nemôže spĺňať všetky úlohy celej logiky, no môže sa stať adekvátnym nástrojom stavby matematických disciplín. Matematická logika je aplikácia jednej časti logiky. Okruh pôsobnosti matematickej logiky sa stotožňuje s okruhom pôsobnosti matematiky. Veľkosť tohto okruhu môže byť jednou z príčin stotožnenia matematickej logiky s logikou vôbec. Matematická logika sa usiluje byť len formou alebo teóriou matematiky. Tým sme určili nielen vzťah medzi logikou a matematickou logikou, ale aj vzťah medzi matematickou logikou a matematikou. Čo sa týka tohto vzťahu, panuje niekoľko nesprávnych názorov, ktoré musíme v krátkosti spomenúť.

Frege, po ňom Russell, Carnap a s ním celý viedenský krúžok vyslovili a veľmi dôkladne rozpracovali názor, podľa ktorého pojem čísla a tým celá aritmetika a matematika je čisto logickým útvarom, t. j. že matematika je časťou logiky. Toto tvrdenie doslova brané je idealistickou skomoleninou pravdivého materialistického obsahu, ktorý spočíva v tom, že celé číslo nesmieme považovať za nejaký útvar, ktorý je rozumom neanalyzovateľný a nezdôvodniteľný, ako sa napr. nazdával intuicionista matematik Kronecker. Podľa neho a podľa jeho nasledovníkov Brouwera, Heytinga a i. sú nám celé čísla dané v nejakej základnej intuícii, ktorá sa nedá bližšie analyzovať. Materialistické jadro Fregeho tvrdenia je teda v objavení logickej štruktúry pojmu čísla. No táto materialistická črta spočívajúca v tom, že prirodzené čísla nie sú apriórne pojmy alebo božské, nedotknuteľné danosti, je hneď skomolená idealistickými primiešaninami, ktoré sa apriórnosť usilujú zachrániť aspoň nepriamo. Frege sa nazdáva, že úplná, absolútna istota matematiky sa môže len tak vysvetliť, keď sa bez zbytku redukuje na logiku, ktorá bola podľa vtedajších názorov úplne istá. Novopozitivisti sa na vec dívajú zasa zo subjektívno-idealistického hľadiska a uvažujú asi nasledovne. Istota matematiky nespočíva v tom, že vyjadruje empirické pravdy, ktoré sa dopĺňajú a menia, ale v tom, že je komplexom analytických právd, t. j. konvenčných definícií a ich dôsledkov, ktoré sa vyhlasujú za pravdivé bez ohľadu na ich vzťah k reálnemu svetu.[8]

Mienka Fregeho je nesprávna v tom, že považuje logiku za večný a nemenný útvar a že sa neusiluje chápať pojem čísla ako odraz určitej situácie reálneho sveta a že neanalyzuje pojem čísla z tejto strany, ale ho chápe ako názov vlastností pojmov a výpovedí. Ale aj vtedy, keby Frege chápal číslo ako vlastnosť samých množín, nemohli by sme hovoriť o redukcii matematiky na logiku, ale len o vyjadrení určitých stránok čísla pomocou logiky. Z nevyčerpateľnosti sveta a jeho častí nasleduje nevyčerpateľné bohatstvo čísla a nevyčerpateľné možnosti jeho analýzy, ktoré ďaleko prevyšujú bohatstvo logického aparátu a ktoré prinucujú tento aparát dopĺňať. Podľa Fregeho je logika prvotná, hotová disciplína a matematika je druhotná. Tomuto tvrdeniu nič nezodpovedá v dejinách vied. V skutočnosti logika ako veda vzniká len v procese tvorenia vedeckých disciplín, a preto sa tieto nedajú zredukovať na logiku. Má zmysel hovoriť len o jednote logiky a matematiky, logiky a fyziky atď.

Mienka Carnapa a i. je ešte nepravdivejšia, lebo považuje logiku za čistú konvenciu, za hru, kalkul, ktorý nemá a nemôže mať so skúsenosťou a skutočnosťou

---

[7] K. Schröter, *Über Fragen der Logik*, Deutsche Zeitschrift für Philosophie 1953, č. 3—4, 619.

[8] To, zdá sa, je aj mienka A. Mostowského, *Logika matematyczna*, Varšava 1948, 173 a n.

vnútorný, organický súvis, ktorý teda nie je pravdivý, ale len vhodný organizujúci prostriedok našich empirických poznatkov. Títo logisti, vychvaľujúci sa silou svojej analýzy, boja sa analyzovať pojem „vhodnosti". Logika je preto vhodný nástroj a len ten kalkul je vhodný organizačný činiteľ vedy a vedeckej práce, ktorý má nejaký, no vždy presný a jednoznačný vzťah k empirickým poznatkom odrážajúcim skutočnosť. Bez tohto vzťahu by sme pomocou kalkulu nemohli zjednotiť empirické poznatky, a preto vhodnosť nevyhnutne implikuje pravdivosť. Logický kalkul, o ktorom hovoria pozitivisti a ktorý nazývajú logistikou, objavil sa len preto, lebo ho veda na niečo potrebovala. Novopozitivisti abstrahovali od toho „niečo", len aby sa vyhli materialistickej otázke pravdivosti logiky, no tým došli k protirečiacemu pojmu „vhodného nástroja", ktorý nie je na nič vhodný.

Najlepším dôkazom vnútornej materialistickej povahy matematickej logiky a jej kalkulov sú ich aplikácie v technike, ktoré budeme rozoberať v druhej časti. Tu len toľko pripomenieme, že každá analytická veta výpovedného kalkulu vyjadruje určitú stálu vlastnosť napr. elektrických releových sietí. Výpovedný kalkul (jeho platné vety) má teda rôzne realizácie, modely v skutočných technických zariadeniach a ak sú modely reálne, aj ich kalkul musí byť reálny, pravdivý.

2. POVAHA MATEMATICKEJ LOGIKY

Matematickú logiku sme definovali ako teóriu matematických systémov. Súčasná matematická logika skúma len povahu a vlastnosti deduktívnej stránky matematických disciplín, takže je teóriou tých deduktívnych systémov, s ktorými sa stretávame v matematike. Aby sme pochopili povahu deduktívneho systému, musíme analyzovať najprv všeobecnejší pojem systému vôbec.

a) *Systém*

Dnes nevieme a z ohraničenosti nášho poznania nasleduje, že ani nebudeme vedieť podať vyčerpávajúcu a všeobecnú definíciu systému. Musíme sa preto uspokojiť s definíciami, ktoré chtiac-nechtiac vyjadrujú povahu len určitých typov systémov, pomocou ktorých sa môžeme vyjadrovať a orientovať v matematike. Podľa Kleeneho „systém S predmetov je (neprázdna) množina alebo trieda, alebo oblasť O ... predmetov, medzi ktorými sú určité vzťahy".[9] Systémom je napr. číselný rad, lebo v ňom všetky čísla tvoriace oblasť O môžeme pospájať vzťahom $+ 1$ a pomocou tohto vzťahu vychádzajúc z nuly dostaneme hocijaké celé kladné číslo. Môžeme teda povedať, že vzťah $+ 1$ je operácia uskutočniteľná na ľubovoľnom celom čísle a má preto univerzálnu platnosť v celom rade, čiže systemizuje číselný rad. Definícia Kleeneho nie je úplná, lebo neurčuje výraz „určité vzťahy"; tento výraz musíme bližšie opísať. Určitý vzťah označuje presne vymedzený vzťah, ktorý, nakoľko utvára v množine O systém S, budeme volať systémovým vzťahom. Systémový vzťah alebo komplex systémových vzťahov musí byť taký, aby jednoznačne jednotil všetky predmety oblasti O, lebo len v tom prípade hovoríme o systéme S oblasti O (a nie o viac systémoch). Preto ak nejaký predmet p patrí do systému S a ak p má systémový vzťah R_s k inému predmetu q, tak aj q patrí do systému S. Ale aj naopak. Ak p patrí do S a q patrí do S, tak musí jestvovať nejaký R_s. Vzťah

[9] S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam 1952, 24.

$p\ R_s\ q$ budeme označovať $f_s\ (p) = q$. Potom platí, že množina O je systémom S vtedy a len vtedy, keď

$$p \subset O \mathbin{\&} q = f_s\ (p) \longrightarrow q \subset O, \tag{2.1}$$

teda

$$\text{ak } p \subset O \mathbin{\&} q = f_s\ (p) \longrightarrow q \subset O, \text{ tak } O \in S. \tag{2.2}$$

Veta (2.2) sa dá zovšeobecniť tým, že R_s nebude dvojčlenný, ale n-členný vzťah a f_s nebude jednoargumentová, ale n-l argumentová funkcia, pričom jej niektorý argument môže byť vzťahom. Potom o určitej oblasti hovoríme, že je systémom, ak v nej jestvuje určitá operácia, funkcia uskutočniteľná na každej n-tici predmetov (kde $n = 1,2,\ldots$) (takže výsledok operácie patrí do tej istej oblasti). No nemusíme sa uspokojiť s jednou operáciou, ale môžeme zobrať celý komplex operácií. n-tica predmetov tvorí podmnožinu množiny O a označujeme ju X, komplex operácií označujeme D. Výsledok komplexu operácií D prevedených na X označíme

$D\ (X)$. Veta (2.2) potom bude $X \subset O \mathbin{\&} D\ (X) \subset O \longrightarrow O \in S$, (2.3)

ak okrem toho platí, že $D(X) = X$, tak systém je deduktívny. D vyjadruje podmienku, vzhľadom na ktorú O je uzavretá a nie je ničím iným ako vyjadrením rôznych spôsobov jednoznačných súvisov, na základe ktorých od jedného alebo viac predmetov (od jednej n-tice alebo viac n-tíc predmetov) oblasti O sa dostaneme k druhému predmetu (druhej n-tici) oblasti O, t. j. D vyjadruje presné spôsoby a či pravidlá prechodu. Pomocou D môžeme z existencie predmetu p a z existencie oblasti O vyvodiť existenciu predmetu q. Systém S a oblasť O môžu jestvovať mimo nášho myslenia a môžu sa odrážať v našom myslení. Odraz systému, t. j. poznanie systému S a predmetov p,q budeme označovať úvodzovkami, teda „S", „p" atď. „p" je buď poznanie, pojem predmetu p, alebo nejakej vlastnosti p, prípadne je výpoveď vyjadrujúca existenciu alebo povahu predmetu p. Ak „p" označuje výpoveď,[10] tak z pravdivosti „p" a z existencie O vyvodíme pravdivosť výpovede „q". Hovoríme, že z „p" *nasleduje* „q" („p" $\longrightarrow$ „q"), alebo že „q" je dôsledok „p" v O. D teda vyjadruje pojem dôsledku, ktorý je tak základným pojmom teórie systémov. To značí, že myslieť dôsledne (z hľadiska určitého systému — a myslieť sa dá len v nejakom systéme), znamená tak myslieť, aby sme myšlienkovými operáciami alebo pravidlami D ostali v danej oblasti (v danom systéme). Z toho, že z výpovede „p" vyvodíme výpoveď „q", nasleduje, že výpoveď „q" je dôsledok výpovede „p", no nemusí platiť opak. Výpoveď „q" môže byť dôsledok výpovede „p", hoci ju nevieme vyvodiť pomocou konečného počtu krokov a konečného počtu pravidiel z výpovede „p".[11] Pojem dôsledku vyjadruje nevyhnutné systémové vzťahy, medzi pojmami a predmetmi, ktoré sa v pojmoch odzrkadľujú. Základný sémantický pojem vyvodenia vyjadruje ľudskú činnosť pomocou pravidiel vyvodenia.

Pojem dôsledku, ako aj iné systémové pojmy môžeme budovať dvojakým spôsobom: sémanticky a syntakticky.

Sémantika je tá časť logiky, ktorá si všíma vzťah medzi výrazmi, výpoveďami, pravidlami a medzi tým, čo výrazy, výpovede a pravidlá označujú, teda napr. vzťah

---

[10] Miesto používaného termínu „veta" používame všeobecnejší termín „výpoveď". Pod slovom „veta" rozumieme vždy pravdivú, všeobecne platnú (analytickú) výpoveď v zhode s matematickými zvyklosťami.

[11] K. Schröter, *Theorie des logischen Schliessens*, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 1955, č. 1, 40.

pojem je preto pojem *pravdy*, s ktorým sú spojené ďalšie dôležité pojmy, ako pojem doloženia, spĺňania a modelu. Najvšeobecnejší je pojem doloženia. *Doloženie* je to, čo robí výpoveď buď pravdivou alebo nepravdivou. Tak doloženie pre číslo 5 je predikát „párny", no nie je doloženie predikát „Hanibal". Všetkými doloženiami výpovede sa určuje jej *význam*. Ak je nejaká výpoveď pravdivá, vždy musíme a môžeme nájsť jej zodpovedajúci predmet alebo situáciu, o ktorej sa vo výpovedi hovorí, a tým predmetom alebo situáciou naše tvrdenie *pravdivo* doložíme. Hovoríme, že v pravdivej výpovedi predmet alebo situácia, o ktorej sa vo výpovedi hovorí, *spĺňajú* to, čo sa o nich hovorí. To, čo spĺňa určitú výpoveď, t. j. čo je pravdivým doložením výpovede, je *model* výpovede.

Z viet (2.1)—(2.3) nasleduje, že štruktúra dôsledku D závisí na povahe systému a že z rôznych typov systémov nasledujú aj rôzne štruktúry vzťahu dôslednosti a prostriedkov, ktorými vyjadrujeme povahu systémov. Pretože nám ide o aplikáciu logiky na matematiku, musíme si všímať matematické systémy a teda aj matematické výrazové prostriedky a podľa toho potom analyzovať aj primeraný pojem dôsledku. Dnes disponujeme väčším množstvom teórií matematiky a teoretických výrazových a dokazovacích prostriedkov. Pojem dôsledku musíme tak definovať, aby vyhovoval všetkým dnešným alternatívam.

Keď zoberieme hociktorú matematickú formulu alebo výpoveď, teda rad znakov, ktorý má v matematike zmysel a o ktorom hovoríme, že môže byť buď pravdivý alebo nepravdivý (teda jeho negácia je pravdivá), zistíme, že hovorí o určitej triede predmetov (bodov, priamok, čísel a pod.), a to alebo o ich vlastnostiach, alebo o vzťahoch medzi nimi. Každá formula si nárokuje určitú všeobecnosť, t. j. platnosť nielen pre niektoré individuálne priamky, ale pre všetky priamky (napr. *každé* dve priamky sa pretínajú v jednom bode. Táto veta ostáva pravdivá, keď za výraz „dve (rozličné) priamky" dosadíme ľubovoľné dve konkrétne priamky, teda keď dosadíme konštantné priamky, pričom výraz „dve priamky" nevyjadruje konštantu, ale to, že jednu konštantnú priamku môžeme zameniť druhou konštantnou priamkou a veta ostáva pravdivá). Výraz „dve priamky" je teda premenný (v rámci triedy priamok). To isté platí aj o formule $a + b = b + a$. Môžeme teda povedať, že každá matematická formula sa skladá z časti stálej a z časti premennej. Vo formule $a + b = b + a$ je stály vzťah $+$ a $=$, premenné sú a, b. Že vzťahy $+$ a $=$ sú konštantné, vidieť z toho, že ak by sme za ne dosadili iné vzťahy, mohli by sme dostať nepravdivú výpoveď alebo až nezmysel. Napr. ak miesto $+$ dáme delenie $:$ a miesto $=$ dáme vzťah väčší ako $>$. Tú formulu, v ktorej dosadením konštanty za premennú dostaneme pravdivý alebo nepravdivý výraz (teda výraz, ktorý má význam), t. j. výpoveď, nazývame výpovednou *formou* alebo výpovednou funkciou. Keď vo výpovednej forme miesto premennej dáme konštantu, dostaneme výpoveď. Výpovednou formou je napr. výraz „x je párne číslo", pričom x je premenná, ktorej hodnoty môže byť ľubovoľné číslo.

Rozlíšením stálej a premennej časti sa analýza nekončí. Vo vete $3 + 2 = 2 + 3$ výsledky dosadenia nie sú len čísla 3 a 2, ale aj vzťahy $+$ a $=$. Primerané premenné pre vzťahy $+$ a $=$ sú napr. výrazy „trojčlenný vzťah" (určitých vlastností) a dvojčlenný vzťah určitých vlastností. Tak vzťah $=$ je zvláštny prípad a dosadením do reflexívno-symetricko-tranzitívneho vzťahu, s ktorým sa stretávame nielen v aritmetike, ale aj v iných oblastiach. Symetrickosť a tranzitívnosť sú konštantné vlastnosti prebiehajúce všetky oblasti. Konštanty, s ktorými sa všade stretávame, voláme *logickými*, na rozdiel od matematických konštánt (napr. $+$, 3, 4, atď.), s ktorými se stretávame len v matematike a v oblastiach aplikability matematiky.

Formulu, v ktorej sú presne vyznačené aj logické konštanty a ostatné časti sú premenné, voláme logickou výpovednou formou, kým formulu, v ktorej sú presne vyznačené (len alebo aj) matematické konštanty, voláme matematickou výpovednou formou. Analýza, ktorou dôjdeme až k logickým konštantám, volá sa logická, kým analýza, ktorou dochádzame k matematickým konštantám, volá sa matematická. Logické konštanty určujú štruktúru. Čo všetko z výpovede nasleduje, závisí od jej štruktúry a od primeranej výpovednej formy. Prvý túto okolnosť presne formuloval a pojem dôsledku definoval B. Bolzano.

Bolzano miesto výrazu „premenná" používa výraz premenná predstava alebo premenná časť. Označme výpovednú formu znakom $A(x)$. Nech napr. $A(x)$ značí výpovednú formu „x je väčšie ako 4". Keď potom za x dosadíme „5", dostaneme pravdivú výpoveď, keď za x dosadíme „3", dostaneme nepravdivú výpoveď. „5" teda *spĺňa* výpovednú formu $A(x)$, „3" túto formu nespĺňa; inými slovami, „5" je model, pravdivé doloženie, realizácia výpovednej formy $A(x)$, „3" nie je model tejto formy. Bolzano potom pojem dôsledku definuje nasledovne: „Výpovede $M,N\ldots$ sú *odvoditeľné* z výpovedí $A,B,C\ldots$ vzhľadom na ich premenlivé časti $i,j,\ldots$, keď každá skupina predstáv (dosaditeľných predmetov), ktorá dosadená na miesto i,j, robí z $A,B,C\ldots$ pravdivé výpovede, robí pravdivé výpovede aj z $M,N\ldots$"[12] To značí, že ak sú pravdivé výpovede A,B,C, tak sú pravdivé aj výpovede $M,N\ldots$, teda, že pravdivosť výpovedí A,B,C sa nezlučuje, je v protirečení s nepravdivosťou výpovedí M,N.[13] H. Scholz podáva presnú Bolzanovu formuláciu nasledovne: „Výpoveď A je *odvodená* z výpovede B vzhľadom na ich spoločnú časť a vtedy a len vtedy, keď a je spoločná časť výpovedí A a B a keď a nahradíme premennou x a keď každý predmet, ktorý *spĺňa* výpovednú formu $A(x)$ vzniknutú z A, spĺňa aj výpovednú formu $B(x)$ vzniknutú z B."[14] Tou istou metódou postupuje aj Tarski a *logický* dôsledok definuje nasledovne: „Výpoveď X *logicky nasleduje* z triedy výpovedí K vtedy a len vtedy, keď každý model triedy výpovedí K je súčasne model výpovede X."[15] Tarského definícia predpokladá logickú analýzu. Z hľadiska rôznych analýz môžeme hovoriť o logickom a matematickom dôsledku a modele. Bolzanova definícia platí pre obidva druhy modelov. Každá matematická konštanta predpokladá logické konštanty a to isté platí aj o dôsledku. Logika sa často definuje ako veda o zákonoch logických konštánt a to isté platí aj o matematike. V tom zmysle je logika časť matematiky, a to alebo nástroj dokazovania (vtedy logika dáva matematike deduktívne pravidlá), alebo nástroj formulovania matematických viet (matematické vety môžeme vyjadriť aparatúrou nižšieho alebo vyššieho predikátového kalkulu).

Bolzanovu definíciu dostaneme z definície Tarského, lebo pravdu môžeme vždy definovať pomocou modelu, ktorý tak nadobúda centrálne postavenie v teórii systémov. Pojem modelu nemá zmysel len pre výpovedné funkcie, pre ktoré znamená rad predmetov, ktoré dosadením dávajú pravdivé výpovede, ale v prvom rade pre celé systémy. Model systému je zložitejší útvar a budeme o ňom hovoriť neskoršie.

Teraz nám ostáva preskúmať samu štruktúru pojmu dôsledku, t. j. poznať jeho

---

[12] B. Bolzano, *Wissenschaftslehre* II, Leipzig 1929, § 155, 114.

[13] Niekedy sa taký vzťah volá aj logickou implikáciou alebo deducibilitou. R. Carnap, *Foundations of logic and mathematics*, Chicago 1939, 14.

[14] H. Holz, *Die Wissenschaftslehre Bolzanos* (Abhandlungen der Fries'schen Schule Bd. VI, Heft 3—4), Berlin 1937, 447.

[15] A. Tarski, *Über den Begriff der logischen Folgerung*, Actes du congrès intern. de ph. scientifique VII, Paris 1936, 9.

vnútornú *syntaktickú* stránku. Videli sme, že ak p patril do systému S, tak do S patril aj $D(p)$. Nech $D(p) = q$. Na q aplikujeme pravidlo, že ak $q \subset S$, tak aj $D(q) \subset S$. Z toho nasleduje platnosť vety

$D(D(p)) \subseteq D(p)$ alebo všeobecnejšie[16]

$$D\ (D(X)) \subseteq D(X). \tag{2.4}$$

Ľahko sa ukáže, že

$$X \subseteq Y \longrightarrow D(X) \subseteq D(Y) \tag{2.5}$$

a že

$$X \subset D(X), \tag{2.6}$$

lebo ak máme v systéme vyvodiť X a vieme, že $X \subset S$, tak to ľahko urobíme nulovým krokom.

$$Y \subset X \longrightarrow D(X) = \text{suma } D(Y),^{17} \tag{2.7}$$

$$X + Y \longrightarrow D\ (X + Y) = D\ (\ X + D(Y)) = D(D(X) + D(Y)). \tag{2.8}$$

Rozvedením ďalších okolností a ich systematickým usporiadaním dostaneme algebru dôsledku, ktorá syntaktickým spôsobom vyjadruje pojem dôsledku a tak aj časť pojmu systému. Podľa Tarského[18] na to stačia vety (2.4), (2.6), (2.7).

Aj sémantické aj syntaktické vymedzenie pojmu dôsledku určuje len podmienky, ktoré sa musia realizovať, no neurčujú konkrétne formy modelu, jeho tvar a neurčujú konkrétne pravidlá vyvodzovania. Tie sa určujú v podstate dvojakým spôsobom: synteticky alebo analyticky. Syntetické určenie pozostáva v tom, že celé systémy sa tvoria z premenných a konštánt, teda z určitých základných kameňov alebo podmienok určených buď našimi zámermi, alebo povahou veci. Zo štruktúry základných podmienok nasleduje štruktúra modelu a deduktívnych pravidiel. S takýmto postupom sa stretávame na každom kroku v modernej algebre, kde tvoríme nové algebraické systémy, hoci nepoznáme ešte možnosti ich aplikácie. Podobným spôsobom tvoríme aj rôzne logické systémy. Analyticky postupujeme tak, že v hotovom systéme hľadáme jeho vnútornú jednotu a systémové vzťahy. Aby sme tomu rozumeli, uvedieme rozbor jedného typu systémov a príklady.

b) *Kalkuly*

K metódam stavby kalkulov sa vrátime v druhej časti. Analýzou matematických systémov formulovaných v rad výpovedí a viet zistíme, že sa skladajú z určitého množstva základných pojmov, znakov, termínov, ktorých môže byť aj nekonečne mnoho. Množinu týchto znakov budeme označovať M_0.[19] Prvky množiny M_0 sa spájajú v *rady*. Z toho nasleduje, že musia byť dvojakého druhu, t. j., že M_0 sa skladá z dvoch podmnožín M_{01} a M_{02}. M_{01} je množina prvkov, predmetov, o ktorých sa v matematike hovorí, M_{02} je množina operácií, t. j. rôznych možností a spôsobov

[16] (2.4) vyjadruje tranzitivitu dokázateľnosti. P. H e r t z, *Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme*, Mathematische Annalen t. 101, 1929, 465.

[17] A. T a r s k i, *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Comptes rendus des séances de la société des sciences ... de Varsovie, Cl. III, 1930, 23.

[18] A. T a r s k i, *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 1930, 465.

[19] H. H e r m e s—H. S c h o l z, *Mathematische Logik* (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften), Leipzig 1952, 11 a n.

kombinovania prvkov množiny M_{01} v rady alebo v zložené znaky. Do množiny M_{01} patrí napr. pojem čísla, bodu atď., do M_{02} patrí napr. pojem následníka, sčítania a pod. Prvky M_{01} sú často premenné (hovoríme o ľubovoľnom čísle), prvky množiny M_{02} sú naopak konštanty. Množinu všetkých radov označíme M_1. Množina M_1 má najmenšiu podmnožinu M_2, ktorá 1. obsahuje množinu M_{01} množiny M_0 a 2. je uzavretá vzhľadom na množinu operácií množiny M_0. M_2 voláme množinou *výrazov*. Podmienky 1. a 2. sa často vyjadrujú vo forme *formačných* pravidiel (napr. ak a je číslo, tak aj $a + 1$ je číslo). M_2 má podmnožinu M_3. M_3 je množina všeobecne platných výrazov a či viet alebo je množina vetných foriem, z ktorých dostaneme vety pri každom dosadení konštanty za premennú. M_3 je teda množina takých výpovedných foriem, v ktorých je každá dosadená konštanta alebo predmet patriaci do uvažovanej oblasti modelom. Takou vetou je napr. aritmetická veta $x < y \;\&\; y < z \longrightarrow x < z$ (pričom x,y,z sú premenné čísiel), lebo keď do antecedentu $x < y \;\&\; y < z$ dosadíme ľubovoľné čísla spĺňajúce vyslovenú podmienku nerovnosti, tak tie čísla spĺňajú aj vzťah vyjadrený konzekvensom $x < z$.[20] Táto definícia množiny M_3 je sémantická. Syntakticky určujeme M_3 pomocou dvoch podmnožín M_{31} *a* M_{32}. M_{31} je množina axióm a M_{32} je množina deduktívnych pravidiel. Systém určený pomocou M_0 — M_3 voláme kalkulom. Kalkul, v ktorom sa M_3 určuje sémanticky, volá sa *formalizovaný*, a kalkul, v ktorom sa M_3 určuje syntakticky, volá sa *abstraktný*.[21] Kalkul K môžeme považovať za algebru $K = \langle M_0, M_2, M_3 \rangle$. Na ilustráciu príklady.[22]

M_0 sa skladá z jediného predmetu „0" a operácie označenej „ ' " vyjadrujúcej následník čísla. Množina M_2 sa dá určiť pomocou formačného pravidla: ak a je výraz, aj a' je výraz. Množina M_3 je určená axiómou $0 = 0$ a pravidlom $a = b \longrightarrow a' = b'$. Termíny tohto systému sú prirodzené čísla a celý systém sa stotožňuje s primitívnou aritmetikou. Ako druhý príklad vezmime výpovedný kalkul.

M_0 výpovedného kalkulu sa skladá z nekonečného množstva výpovedných premenných $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ a z konštánt, ktoré sú tu operácie alebo výpovedné funktory. Použijeme jednu uninárnu operáciu „ — " negáciu ($\bar{p}$ = nie je pravda, že p) a tri binárne operácie „v" disjunkciu (alebo p *alebo* q), „&" konjunkciu (aj p aj q) a „ $\supset$ " implikáciu (ak p tak q, presnejšie, implikácia vyjadruje: neplatí, aby platilo p a neplatilo q, $\overline{p \;\&\; \bar{q}}$). Okrem toho používame zátvorky. Výpovedný kalkul je teóriou výpovedných funktorov. M_1 sa skladá zo všetkých možných spôsobov zoradenia výpovedných premenných a operácií. Niektoré z týchto radov nemajú význam, nemôžu byť ani pravdivé, ani nepravdivé. Taký je napr. rad p v & $\supset$ p alebo rad p v v atď. Rady, ktoré majú význam, volajú sa výrazy. To značí, že výraz je rad, ktorý je tak usporiadaný, že ak sú prvky radu výpovede, je aj celý rad výpoveď. To značí, že M_2 môžeme charakterizovať nasledujúcimi formačnými pravidlami: ak p je výpoveď, aj $\bar{p}$ je výpoveď; ak p a q sú výpovede aj p v q, $p \;\&\; p$, $p \supset q$ sú výpovede. M_3 tvorí množinu všeobecne platných výpovedných výrazov a či *viet*. M_3 môžeme určiť sémanticky a syntakticky. Sémantické určenie pozostáva v tom, že sa hľadajú doloženia výrazov. Ako doloženie prichádza do úvahy buď pravda P, alebo nepravda N. Vety sú vý-

[20] Nech za výpoveď p dosadíme akúkoľvek výpoveď, veta ak p tak p je vždy pravdivá, teda každá výpoveď je modelom spomínanej vety.

[21] Hermes—Scholz, c. d., 12.

[22] H. B. Curry, *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, Amsterdam 1951, 18 a n.

razy, v ktorých aj P aj N je modelom, t. j. ktorým vyhovuje každé doloženie. O každom výraze majúcom n premenných sa môžeme pomocou 2^n krokov presvedčiť a teda *rozhodnúť*, či je alebo nie je vetou, a tak sémantické určenie je súčasne aj metódou rozlíšenia M_2 a M_3. Robíme to napr. pomocou tabuliek vyjadrujúcich nielen štruktúru logických funktorov (konštánt), ale aj každej výpovede.

p	$\bar{p}$	p	q	$p \vee q$	$p \,\&\, q$	$p \supset q$	$p \,\&\, \bar{p} \subset q$	
P	N	P	P	P	P	P	P	
N	P	P	N	P	N	N	P	(2.9)
		N	P	P	N	P	P	
		N	N	N	N	P	P	

O výpovedi $(p \,\&\, \bar{p}) \supset q$ sa tak presvedčíme, že je vetou, že najprv utvoríme tabuľku pre $p \,\&\, \bar{p}$ a potom túto tabuľku pomocou implikácie spojíme s tabuľkou q. Dôkaz, že $p \,\&\, \bar{p} \supset q$ je vetou, urobíme 2^2 krokmi; najprv dokážeme, že $p \,\&\, \bar{p} \supset q$ je pravdivá vtedy, keď p je P a q je P, potom, keď p je P a q je N, keď p je N a q je P a keď aj p, aj q je N. Spomínaná výpoveď je teda vždy pravdivá, každé doloženie je jej modelom. No výpoveď $p \vee q$ nie je vetou, lebo keď p doložíme N a q doložíme N, výpoveď $p \vee q$ je N.

Syntaktické určenie pozostáva v tom, že sa určí niekoľko výpovedí obsahujúcich logické konštanty v,&, ⊃, —, za vety a určia sa také pravidlá, aby aj dôsledky viet boli vety. Nakoľko sémantické určenie je priamejšie a prístupnejšie, syntakticky tak postupujeme, aby vybrané výpovede boli aj zo sémantického hľadiska vety a pravidlá tak volíme, aby množina viet bola z ich hľadiska uzavretá. Uvedieme dvanásť viet[23] rozdelených do štyroch skupín podľa štyroch logických konštánt. Každou skupinou sa syntakticky definuje príslušná logická konštanta.

I. $p \supset (q \supset p)$ (2.10) $\quad (p \supset (\supset q)) \supset (p \supset q)$ (2.11)
$(p \supset q) \supset ((q \supset u) \supset (p \supset u))$ (2.12)

II. $(p \,\&\, q) \supset p$ (2.13) $\quad (p \,\&\, q) \supset q$ (2.14)
$(p \supset q) \supset ((p \supset u) \supset (p \supset q \,\&\, u))$ (2.15)

III. $p \supset (p \vee q)$ (2.16) $\quad q \supset (p \vee q)$ (2.17)
$(p \supset u) \supset ((q \supset u) \supset (p \vee q \supset u))$ (2.18)

IV. $(p \supset q) \supset (\bar{q} \supset \bar{p})$ (2.19)
$p \supset \bar{\bar{p}}$ (2.20) $\quad \bar{\bar{p}} \supset p$ (2.21)

Ako pravidlá berieme pravidlo substitúcie týkajúce sa samozrejme len viet. Podľa neho vo vete môžeme za premennú dosadiť hocijaký výraz. Druhé je pravidlo odlúčenia, podľa ktorého ak A je veta a $A \supset B$ je veta, aj B je veta. Sémanticky zistíme, že všetky výpovede (2.10) — (2.21) sú vždy pravdivé, t. j. keď im priraďujeme hodnoty P a N podľa tabuliek (2.9), tak dostaneme vždy výslednú hodnotu P. Priraďovanie hodnôt podľa (2.9) voláme aj normálnou interpretáciou alebo normálnym hodnotením a hodnoty P,N normálnym modelom; pravda, je pritom uprednostená hodnota.

---

[23] D. Hilbert—P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik* I, Berlin 1934, 66.

Dnes sú už pomerne dobre rozpracované metódy, pomocou ktorých z každej vety vieme urobiť deduktívne pravidlo a logiku definovať ako množinu deduktívnych pravidiel potrebných na rozvíjanie vied.

Hoci výpovedný kalkul je základný, predsa je chudobný a nepostačuje na formulovanie matematických pojmov a viet. Na to je potrebný predikátový kalkul, ktorý sa skladá z nekonečne mnoho premenných $x, y, z, \ldots$ reprezentujúcich indivíduá a nekonečne mnoho premenných P, $R, \ldots$ reprezentujúcich vlastností indivíduí a vzťahy medzi nimi. Okrem výpovedných konštánt v, &, $\supset$, —, sú v ňom ešte predikátové konštanty tzv. kvantifikátory, a to všeobecný kvantifikátor hovoriaci, že nejaká vlastnosť alebo vzťah platí pre všetky indivíduá, a partikulárny kvantifikátor hovoriaci, že vlastnosť alebo vzťah platí len pre niektoré indivíduá. Prvý označujeme (x) a druhý (Ex). Tak $(x)\ P(x)$ znamená, že pre všetky x platí vlastnosť P, alebo, že všetky x majú vlastnosť P. Výpoveď, že pre všetky x a pre všetky y platí vzťah R, značíme $(x)\ (y)\ R(x,y)$. Výpoveď, že pre všetky x a pre niektoré y platí vzťah R, značíme $(x)\ (Ey)\ R(x,y)$ atď. Predikátový počet, v ktorom sa kvantifikátory vzťahujú len na indivíduá, volá sa nižší, počet, v ktorom sa kvantifikátory vzťahujú aj na indivíduá aj na vlastnosti a vzťahy, volá sa vyšší. Systémy, ktoré sa budujú a vyjadrujú nižším predikátovým počtom, volajú sa *elementárne*, kým systémy budované na vyššom predikátovom počte sú neelementárne. Elementárne sa dá napr. vyjadriť geometria, niektoré druhy a časti algebry, no aritmetika, ako uvidíme v druhej časti, je neelementárnym systémom. Podobne aj teória množín.

c) *Vlastnosti systémov*

Ak sme systém definovali pomocou pojmu dôsledok, tak pomocou tohto pojmu musíme definovať aj jeho vlastnosti. Tie vlastnosti, ktoré môžeme takto určiť, voláme všeobecnými a systémovými.

Najdôležitejšia systémová vlastnosť je *neprotirečiteľnosť*, ktorú môžeme definovať syntakticky a sémanticky. Systém je syntakticky neprotirečiaci si, keď sa z neho nedá všetko odvodiť. Z hľadiska predchádzajúcej analýzy systému, systém je neprotirečiaci si vtedy a len vtedy, keď $M_3 \subset M_2$, ale $M_3 \neq M_2$, keď teda jestvuje výraz (výpoveď), ktorý nie je vetou, čiže keď nie každá výpoveď sa dá v systéme dokázať. Systém je sémanticky neprotirečiaci si, keď má model. Tieto dve určenia spolu súvisia; z druhého nasleduje prvé. V M_2 systému S jestvujú totiž výrazy, ktoré majú model (ba pri ktorých je každé doloženie modelom), ale jestvujú aj výrazy, ktoré nemajú model (pri ktorých nie každé doloženie je modelom alebo pri ktorých nie je ani jedno doloženie modelom). Medzi posledné výrazy, ktoré vôbec nemajú model, patrí výpoveď $p\ \&\ \overline{p}$. Ak totiž niečo spĺňa p, nespĺňa $\overline{p}$ a naopak; preto niečo nespĺňa aj p a súčasne aj $\overline{p}$, čiže $p\ \&\ \overline{p}$ nemá model. Výrazy, ktoré nemajú model, nemôžu nasledovať z výrazov, ktoré majú model, lebo vtedy by neplatilo, že všetky modely antecedentu musia byť aj modelami konzekvensu. Ba v množine M_2 každého systému, ktorý predpokladá výpovedný kalkul, jestvuje výpoveď k, ktorá spĺňa vzťah $D(k) = M_2$; voláme ju protirečením. Z protirečenia môžeme všetko vyvodiť, a preto systém $D(k)$ je jalový a celkom nič nehovoriaci a najmä neurčujúci. Výpoveď k je totožná s výpoveďou $p\ \&\ \overline{p}$. Z výpovede $p\ \&\ \overline{p}$ nasleduje podľa (2.13) výpoveď p a podľa (2.14) nasleduje $\overline{p}$. Teda z nej nasleduje aj p, aj $\overline{p}$. $\overline{p}$ však vyjadruje všetko okrem toho, čo vyjadruje p, a preto $p\ \&\ \overline{p}$

vyjadruje všetko, hocičo. Keby však zo systému nasledovalo hocičo, nič by nebolo treba dokazovať a všetko by bolo pravdivé. Keby sa veda opierala o taký systém, vládla by v nej ľubovôľa a nemohla by vyjadrovať zákonitosť sveta.

Neprotirečiteľnosť systému nesmieme stotožňovať z princípom neprotirečenia $\overline{p \& \bar{p}}$. Sú možné systémy, v ktorých platí $p \& \bar{p}$, a predsa sa v nich nedá všetko dokázať. Každý systém sa totiž skladá z viac viet a najmä z pravidiel dokazovania. Obsah pojmu a výpovede nie je daný len ňou samou, ale aj príslušnými pravidlami dokazovania a ostatnými výpoveďami daného systému. Preto ak by sme za vetu zobrali $p \& \bar{p}$, nemohli by sme za vetu považovať výpoveď $p \& \bar{p} \supset q$, podľa ktorej z $p \& \bar{p}$ nasleduje ľubovoľná výpoveď q, alebo by sme museli zmeniť deduktívne pravidlá (napr. modus ponens a pod.). Je jasné, že ak neplatí veta $p \& \bar{p} \supset q$, tak tým implicitne aj negácia, aj konjunkcia dostávajú iný zmysel, než aký mali vo výpovednom kalkule. Táto poznámka môže byť užitočná pri preberaní otázky protirečenia v dialektických systémoch.

Dôkaz neprotirečenia najmä zložitejších systémov nie je jednoduchý a ľahký. Poznáme niekoľko metód tohto dôkazu, o vypracovanie ktorých sa najviac zaslúžil Hilbert, Ackermann, Gentzen, Markov a i. Tieto metódy delíme na priame a nepriame. Nepriama je tá metóda, ktorou sa neprotirečiteľnosť systému S_1 redukuje na neprotirečiteľnosť systému S_2, pričom S_2 musí byť izomorfný s S_1 a S_2 zasa musí byť preskúmanejší, známejší a istejší. Dva systémy S_1 a S_2 sú inzomorfné vtedy, keď jestvuje jednojednoznačne priradenie medzi predmetami systému S_1 a predmetami systému S_2 a medzi vzťahmi, ktorými sú predmety v každom systéme pospájané. Tak redukoval Hilbert neprotirečiteľnosť geometrie na neprotirečiteľnosť aritmetiky,[24] ktorá sa samozrejme predpokladá. Pretože vzťah izomorfie je tranzitívny, taký bude aj vzťah medzi izomorfnými systémami. Preto ak systémy S_1, S_2, S_3 sú izomorfné a neprotirečiteľnosť systému S_1 sa redukuje na neprotirečiteľnosť systému S_2, táto na neprotirečiteľnosť systému S_3, tak neprotirečiteľnosť systému S_1 sa redukuje na neprotirečiteľnosť systému S_3. No nepriame metódy sú len relatívne, a preto predpokladajú metódy priame.

Pri priamych metódach rozoznávame dva prípady. V prvom skúmame len konečné oblasti alebo také nekonečné oblasti, ktoré majú konečný model. V druhom prípade skúmame nekonečné oblasti, ktoré nemajú konečný model. Pri konečných systémoch môžeme konečným počtom krokov zistiť, či sa v systéme objavuje aj výpoveď p aj výpoveď $\bar{p}$. Jestvujú systémy, ktoré sa skladajú z nekonečného počtu prvkov (priamok, bodov a pod.), no tieto systémy majú model obsahujúci len konečný počet prvkov. Model systému dostaneme vtedy, keď všetky premenné nahradíme konštantami. Videli sme, že matematické vety sú vzťahy medzi premennými. Matematický systém je množina matematických viet uzavretá vzhľadom na deduktívne pravidlá. Keď v ňom premenné nahradíme konštantami, dostaneme matematický model. Model je teda rad hodnôt, ktoré dosadzovaním do matematického systému dávajú pravdivý systém, pričom sú všetky modely medzi sebou izomorfné a ekvivalentné. Systém môžeme považovať za jednojednoznačný vzťah jestvujúci medzi jeho modelmi.

Všetky geometrické vzťahy sa dajú vyjadriť pomocou dvojčlenného vzťahu „ležať na“ a pomocou trojčlenného vzťahu „medzi“; situáciu okolo týchto vzťahov

[24] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1903, 18 a n.

a teda aj v celej geometrii môžeme jednoznačne vyjadriť pomocou množiny piatich prvkov.[25] To značí, že geometria má konečný model a je preto neprotirečiaca si.

Celkom iná je situácia, keď M_3 môže mať len model, ktorý sa skladá z nekonečného počtu prvkov. Ako príklad vezmime tri vety, pomocou ktorých vyjadríme časť povahy číselného radu, pričom $R(x,y)$ označuje vzťah $x < y$.

$$(x)\ \overline{R(x,x)} \tag{2.22}$$
$$(x)\ (y)\ (z)\ R(x,y)\ \&\ R(y,z) \longrightarrow R(x,z) \tag{2.23}$$
$$(x)\ (Ey)\ R(x,y) \tag{2.24}$$

Tieto tri vety sa nemôžu spĺňať konečným počtom predmetov, t. j. nemôžu mať pravdivé doloženie v konečnej oblasti. Ak vychádzame z nejakého prvku (čísla) a, tak podľa (2.24) musí jestvovať nejaký prvok b, ktorý podľa (2.22) musí byť odlišný od a. To isté platí aj o b, pre ktoré musí jestvovať nejaké $c$také, že platí $R(b,c)$ atď. až do nekonečna. V takýchto prípadoch postupujeme nasledovne.

Vychádzame z veľmi jednoduchých matematických viet, o ktorých nikto nemôže pochybovať (také sú napr. vety $0 = 0$, $0 \neq 0'$), a z nich pomocou pravidiel uzatvárania vybudujeme celú teóriu čísel. Celú váhu teda kladieme na deduktívne pravidlá a na pravidlá tvorenia pojmov (na definičné pravidlá), lebo pri rozbore antinómií v teórii množín sa zistilo, že ťažkosti, nejasnosti, po prípade až protirečenia vznikajú pri používaní určitých metód tvorenia pojmov a deduktívnych pravidiel (na ťažkosti narážal napr. pojem „množina množín“). Preto ak sa má vyjasniť situácia okolo neprotirečiteľnosti, tak predmetom úvah nesmie byť len aritmetika, ale v prvom rade definičné a deduktívne pravidlá, t. j. možné dôkazy. To značí, že zo skúmaného systému sa musia deduktívne pravidlá a formy dôkazu vypreparovať, zbaviť obsahu, postihnúť ich formu a zhrnúť v systém. Teda predmetom skúmania sa musia stať samé pravidlá dôkazu, ktoré sa musia podrobiť presnej analýze, pomocou ktorej zistíme, že vychádzajúc z viet určitej presnej štruktúry a použijúc dôkazy a pravidlá určitej presnej štruktúry nemôžeme dôjsť k výpovedi typu $p\ \&\ \overline{p}$.[26] Dôkaz neprotirečenia sa tak redukuje na dôkaz *nemožnosti* dôjdenia k protirečeniu v systéme charakterizovanom určitými, presne vymedzenými definičnými a deduktívnymi pravidlami.[27] Aby tento dôkaz bol možný, musíme mať ako predmet všetky deduktívne pravidlá pred sebou, aby sme ich mohli prehliadnuť konečným počtom krokov. Exaktné skúmanie týchto pravidiel tvorí tzv. teóriu dôkazu, ktorá je dôležitou časťou logických kalkulov. Logické kalkuly sa tak stávajú nevyhnutným nástrojom skúmania matematických systémov.

Gentzen uvádza, že matematické vety sú útvary formy $A \longrightarrow B$, pričom A je skratka pre konjunkciu viac viet a B je skratka pre disjunkciu viac viet. Tieto útvary volá sekvencie. Rozoznávame sekvenciu s antecedentom a konzekventom, ktorou sa vyjadruje, že z určitých podmienok vyjadrených antecedentom nasledujú určité dôsledky vyjadrené konzekventom; ďalej sekvencie bez antecedentu, ktorými sa vyjadruje, že konzekvent platí neodvisle na nejakej podmienke, t. j. že platí bezpodmienečne; sekvenciou bez konzekvensu sa vyjadruje, že za predpokladu platnosti antecedentu neostáva už žiadna možnosť, t. j. že predpoklady vyjadrené antecedentom vedú k protirečeniu. Konečne máme prázdnu sekvenciu bez antecedentu a konzekvensu. Ňou sa vyjadruje bezpodmienečné protirečenie, t. j. protirečivosť

---

[25] Weyl ukazuje, že projektívna geometria sa dá zmodelovať pomocou 14 prvkov. H. Weyl, *Philosophy of mathematics and natural science*, Princeton 1949, 22 a n.

[26] G. Gentzen, *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*, Leipzig 1938, 26 a n.

[27] A. Schmidt, *Mathematische Grundlagenforschung*, Leipzig 1950, 7.

samého systému. Dokázať, že systém je neprotirečiaci si, znamená dokázať, že v ňom nemôžeme vyvodiť prázdnu sekvenciu. K prázdnej sekvencii môžeme dôjsť takým pravidlom, v ktorom v antecedente je napr. viac viet ako v konzekvente. Také je napr. pravidlo „*rezu*“[28] $\dfrac{A \longrightarrow B \qquad B \longrightarrow C}{A \longrightarrow C}$.

Preto jestvuje viac spôsobov, ako toto pravidlo vylúčiť a nahradiť ho množinou iných pravidiel.[29]

Pri dôkaze neprotirečiteľnosti najmä jednoduchších systémov sa uplatňuje „metóda dedičnosti“ alebo metóda hodnotenia, pozostávajúca v tom, že sa vetám systému priradí určitá stála hodnota (v prípade výpovedného kalkulu to bola hodnota P — pričom o každej vete sa musí vedieť zistiť, či jej prísluší stále hodnota P alebo nie) a dokáže sa, že táto hodnota P je deduktívne dedičná, t. j. že ak premisy majú hodnotu P, budú ju mať aj dôsledky. Videli sme, že všetky vety výpovedného kalkulu majú stále hodnotu P. Táto hodnota sa dedí aj z hľadiska pravidla substitúcie aj z hľadiska pravidla odlúčenia. Je jasné, že hodnota vety sa nemení, keď za jednotlivé jej premenné dosadíme hocijaký výraz, lebo tento, čo ako dlhý a rôzny, je charakterizovaný buď hodnotou P alebo hodnotou N. A v povahe vety je zahrnuté už to, že jej hodnota je P, nech je hodnota jej premenných P alebo N. Pravidlo odlúčenia pozostáva v tom, že ak A je veta a ak $A \supset B$ je veta, tak aj B je veta. Predpokladajme, že A je veta, $A \supset B$ je veta, ale B nie je veta. Ak B nie je veta, má hodnotu N. No potom veta $A \supset B$ má hodnotu $P \supset N$, čo dáva výslednú hodnotu N. To je však zrejme proti predpokladu a tak aj pravidlo odlúčenia spĺňa podmienku dedičnosti. Tým je neprotirečiteľnosť výpovedného kalkulu dokázaná.

Veľká skupina systémov, ktoré majú veľký praktický význam, dá sa *axiomatizovať*. Axiomatický systém môžeme charakterizovať sémanticky a syntakticky. Systém S je sémanticky axiomatizovateľný vtedy a len vtedy, keď jestvuje podmnožina X množiny M_3 taká, že $\overline{\overline{X}} \leqslant alef_0$,[30] t. j. že X je buď konečná alebo spočetne nekonečná[31] a že $X \equiv M_3$. X je vtedy ekvivalentná s M_3 ($X \equiv M_3$), keď $D(X) = D(M_3)$, teda keď platí, že z X sa dajú vyvodiť všetky vety, celá množina M_3. Množina X reprezentuje súhrn všetkých axióm. Keď $\overline{\overline{X}} = alef_0$, t. j. keď počet axióm je nekonečný, tak o určitej axióme musíme vedieť rozhodnúť, či je axiómou alebo nie, alebo musíme vedieť všetky axiómy aspoň vypočítať. To isté platí aj o deduktívnych pravidlách. V najširšom zmysle môžeme každý postup, ktorým určujeme (vypočítavame) nejakú množinu výrazov, považovať za jej axiomatizovanie. Z toho môžeme uzatvárať na axiomatizovateľnosť výpovedného kalkulu, lebo v ňom sme našli spôsob, ktorým rozhodneme o výraze, či je vetou alebo nie je vetou.[32] Za axiómy môžeme považovať vety (2.10)—(2.21) a za D považujeme pravidlo substitúcie a odlúčenia. Z týchto viet a pravidiel sa odvodia len pravdivé vety a všetky pravdivé vety vytvorené z premenných $p, q, \ldots$ a z konštánt v,&, $\supset$,—.

---

[28] G. Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift, 1934.

[29] W. Ackerman, *Widerspruchsfreier Aufbau de Logik*, The Journal of symbolic logic, 1950, 46 a n. K. Schütte, *Zur Widerspruchsfreiheit einer typenfreien Logik*, Mathematische Annalen 1952, 397 a n.

[30] $\overline{\overline{X}}$ znamená mohutnosť množiny X, teda „počet“ prvkov množiny X.

[31] Tarski považuje podmienku $\overline{\overline{X}} < alef_0$ za podstatnú pri axiomatizácii.

[32] Z toho vidieť aj úzku súvislosť medzi axiomatizovateľnosťou systému, jeho úplnosťou a rozhodnuteľnosťou.

S axiomatizovateľnosťou súvisí aj *úplnosť* systému. Axiomatický systém je syntakticky vtedy úplný, keď pre každú množinu Y takú, že $Y = \overline{D(X)}$ platí, že $X + Y$ je syntakticky protirečiaca si. To značí, že ak nejaký systém je úplný, tak k nemu nič nemôžeme pridať (je nasýtený).[33] A kritérium nemožnosti je protirečenie. Axiomatický systém je sémanticky úplný, keď $D(X) = M_3$, t. j. keď sa z axiómov odvodia všetky vety. Výpovedný kalkul je syntakticky a sémanticky úplný, kým nižší predikátový kalkul je síce sémanticky úplný, no syntakticky nie je úplný. Vyššie predikátové kalkuly nie sú úplné ani sémanticky ani syntakticky.

Od axiomatického systému sa často vyžaduje, aby jednotlivé axiómy boli na sebe *nezávislé*. Axióma X_2 je nezávislá na axióme X_1, keď platí $X_2 \neq D(X_1)$. Keby totiž platilo $X_2 = D(X_1)$, tak X_2 by sme mohli dokázať pomocou X_1 a nebolo by ju treba prijať za axiómu a či za základnú vetu. Pri dôkaze nezávislosti axióm vychádzame z definície dôsledku pomocou modelu. Veta $X_2 \neq D(X_1)$, teda $\overline{X_1 \longrightarrow X_2}$ platí vtedy a len vtedy, keď jestvuje aspoň jeden model vety X_1, ktorý nie je modelom vety X_2. Ako príklad vezmime vety (2.10)—(2.21). Ak chceme dokázať, že veta (2.10) je nezávislá na vetách (2.11)—(2.21), tak uvedieme model, ktorý nie je normálny a ktorý nie je modelom vety (2.10), ale je modelom ostatných viet. Vetu (2.10) teda neodvodíme z ostatných viet, lebo tieto spĺňajú nenormálny model, kým veta (2.10) ho nespĺňa. Vety (2.10)—(2.21) sú rozdelené do štyroch skupín. V každej skupine vystupuje nová logická konštanta, a preto stačí dokázať nezávislosť viet v rámci každej skupiny. Ako príklad vezmime vety (2.13) a (2.16). Nech (2.13) má nasledujúce nenormálne hodnotenie: $p \,\&\, q = q$, $p = N$, $q = P$. Ak do vety $p \,\&\, q \supset p$ dosadíme tieto nenormálne hodnoty, dostaneme $q \supset p$,$P \supset N$, čo dáva výslednú hodnotu N. Keď to isté hodnotenie vovedieme do vety (2.14), tak zistíme, že táto bude mať hodnotu P, a preto z nej nenasleduje veta (2.13), čiže (2.13) je nezávislá na (2.14). Naozaj, zaveďme do vety $p \,\&\, q \supset q$ hodnotenie $p \,\&\, q = q$, $p = N$, $q = P$. Dostaneme $q \supset q$ a teda $P \supset P$, čo dáva P.

Veta (2.16) $p \supset (p \vee q)$ nech má nasledujúce nenormálne hodnotenie: $p \vee q = q$, $p = P$,$q = N$. Dosadením dostaneme $p \supset q$ a ďalším dosadením $P \supset N$, čo dáva N. Keď však to isté hodnotenie dosadíme do (2.17) (a samozrejme aj do (2.18)), tak z $q \supset (p \vee q)$ dostaneme $q \supset q$ a $N \supset N$, čo dáva P. Aby sme zistili nielen nezávislosť vety (2.16) na vete (2.17), ale aj nezávislosť (2.17) na (2.16), musíme pre vetu (2.17) nájsť nenormálny model, ktorý spĺňa veta (2.16), ale nie veta (2.17). (2.17) nech má toto hodnotenie: $p \vee q = p$, $p = N$,$q = P$ (teda opačné ako pri vete (2.16)). Keď toto hodnotenie dosadíme do (2.17) $q \supset (p \vee q)$, dostaneme $q \supset p$ a $P \supset N$; no keď to isté hodnotenie dosadíme do (2.16), dostaneme $p \supset p$ a $N \supset N$, čo dáva P.[34] Celkom obdobne sa postupuje aj pri dôkaze nezávislosti Peanových axióm aritmetiky.

Problematika axiomatiky je taká rozsiahla a pritom taká rôzna podľa povahy systémov, že sa nedá zvládnuť bez poznania podrobnej stavby systémov. Ťažko nahliadneme, že napr. vyššie predikátové kalkuly sú neaxiomatizovateľné bez poznania ich stavby. To isté platí aj o *rozhodnuteľnosti* systémov. Otázka rozhodnuteľnosti je dnes centrálnou otázkou matematickej logiky. Najzávažnejšie príspevky k tomuto problému priniesla sovietska a poľská matematicko-logická škola.

Problémy axiomatizovateľnosti a rozhodnuteľnosti budeme skúmať až po metódach výstavby systémov v druhej časti.

---

[33] J. Cavailles, *Axiomatique et système formal,* Paris 1938, 83.

[34] Hilbert—Bernays, c. d. I, 75 a n.