

PODSTATA MATEMATIKY

STANISLAV FELBER

Filozofický ústav Slovenskej akadémie vied, Bratislava

I. DEFINÍCIA MATEMATIKY

1. Cieľom tohto článku je formulovať definíciu matematiky zo stanoviska dialektického materializmu¹ a rozobrať ju.

Engels hovorí, že predmetom matematiky sú priestorové tvary a kvantitatívne vzťahy reálneho sveta² a na inom mieste spomína, že matematika sa zaoberá veličinami.³ Obidve tvrdenia sú nesporne správne, no nie sú mienené ako vlastná definícia matematiky — skôr ako púha poznámka alebo vysvetlivka. Alexits a Fenyő⁴ prijímajú prvý Engelsov výrok priamo ako definíciu, súdim však, že by takáto definícia bola príliš široká.

Keď totiž skúmame, akým spôsobom vyjadruje matematika tvary v priestore, dôjdeme k dôsledku, že aj v tomto prípade ide v poslednej inštancii zasa len o vyjadrenie kvantitatívnych vzťahov. Poloha a tvary geometrických útvarov sú napokon vždy určené nejakými kvantitatívnymi údajmi, či presnejšie povedané, nejakými pomermi medzi kvantitatívnymi údajmi, teda kvantitatívnymi vzťahmi.

Pokiaľ ide priamo o metrické vzťahy, je vec celkom jasná. Práve tak je vec jasná aj v analytickej a diferencijálnej geometrii; matematický vzorec alebo rovnica je vždy vyjadrením kvantitatívneho vzťahu. Kvantitatívne vzťahy vyjadrujú aj definície pomocou výtvarných zákonov — napríklad definície kriviek ako geometrických miest bodov a pod. Ide tu vždy v podstate o nejaké vzdialenosti alebo pomery vzdialeností, aj keď sú niekedy zakryté slovným vyjadrením.

Asteroidu môžeme napríklad definovať ako obálku; je to krivka, ktorá sa dotýka všetkých polôh úsečky pevnej dĺžky, ktorej koncové body kĺžu po dvoch pevných na seba kolmých osách. Keď však uvážime, že „kĺzanie“ úsečky je vlastne spájanie bodov na obidvoch osách, ktoré majú rovnakú danú vzdialenosť a že priamka sa dotýka krivky, ak s ňou má (aspoň) dvojnásobný spoločný bod, ukáže sa zasa kvantitatívne vzťahový charakter aj tejto definície. Ostatne všetky podmienky v spomínanej definícii môžeme krok za krokom vyjadriť rovnicami, teda kvantitatívnymi vzťahmi a asteroida je napokon daná kvantitatívnym vzťahom

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0,$$

kde a je dĺžka danej úsečky.⁵

¹ Iné pokusy o vymedzenie predmetu matematiky rozoberám a kriticky hodnotím v pripravovanej knihe *Filozofia matematiky*, z ktorej je tento článok úryvkom.

² F. Engels, *Anti-Dühring*, Bratislava, 1954, 34.

³ F. Engels, *Dialektika prírody*, Bratislava, 1954, 217.

⁴ Alexits Gy. — Fenyő I., *Matematika és dialektikus materializmus*, Budapest, 1948, 14.

⁵ Táto rovnica je dokonca oveľa presnejším vyjadrením asteroidy ako spomínané slovné vyjadrenie. Umožňuje napríklad stanoviť aj imaginárne body asteroidy.

2. Menej jasným by sa mohol vidieť tento kvantitatívne vzťahový charakter určovania tvarov v projektívnej geometrii. No podstatou aj projektívnej geometrie je určovanie *pomerov vzdialeností*.⁶

Kvantitatívne vzťahový charakter sa tu však zdanlivo stráca tým, že nerátame, no robíme konštrukcie. Uvážime to na príklade.

Keď je kužeľosečka daná piatimi bodmi, vieme zostrojiť ľubovoľný počet ďalších bodov aj do tyčnice v nich pomocou vety Pascalovej: „Protíhlé strany šesťuholníka vpísaného do kužeľosečky sa pretínajú v troch bodoch ležiacich na priamke“. Vytvárame tu teda postupne pomerne jednoduchou konštrukciou tvar krivky tým, že hľadáme jej body a smer krivky v týchto bodoch.

No sám pojem polohy a pojem smeru majú kvantitatívne vzťahový charakter. Predovšetkým neexistuje nijaká absolútna poloha bodu ani nijaký absolútny smer. Pojem polohy a smeru má pre matematiku význam, iba ak ide o *vzájomnú* polohu a o *porovnanie* dvoch smerov. Túto vzájomnosť a toto porovnanie však robí matematika zasa vyjadrením určitého kvantitatívneho vzťahu. Nemusí to, pravda, byť práve kvantitatívny vzťah, známy z bežného života (teda napríklad meranie vzdialeností nejakou dĺžkovou jednotkou a meranie smerov uhlami či už v uhlovej alebo oblúkovej miere), môžu to byť aj vzťahy zložitejšie a nenázorné;⁷ no v poslednej inštancii ide napokon vždy o kvantitatívny vzťah.

Konštrukcia polohy a bodu je teda zasa prepisom určitých kvantitatívnych vzťahov.

A napokon sa treba ešte zmieniť o topológii. Topológia abstrahuje už aj od určitého, presne určeného tvaru a skúma len vzájomné vzťahy polôh a tvarov. Keďže však už samy pojmy polohy a smeru majú kvantitatívne vzťahový charakter, platí to tým skôr o všetkých vzťahoch, ktoré formuluje topológia.

3. O tom, ako matematika vyjadruje kvantitatívne vzťahy v ostatných prípadoch, budeme hovoriť ďalej. Tu nám išlo iba o to, aby sme dokázali, že aj tvary v priestore skúma matematika pomocou kvantitatívnych vzťahov. Z týchto úvah vyplýva, že spomínaná Engelsova formulácia je síce naprosto správna, no že by ako definícia matematiky bola príliš široká; skúmanie tvarov je obsiahnuté už v skúmaní kvantitatívnych vzťahov.

Môžeme teda definíciu matematiky formulovať takto:

Matematika je veda, ktorá skúma najvšeobecnejšie kvantitatívne vzťahy reálneho sveta.

Rozoberiem teraz túto definíciu, pričom sa v krátkosti dotknem aj vzťahu matematiky ku gnozeológii a logike.

II. ROZBOR DEFINÍCIE

a) *Kvantitatívne vzťahy*

4. V úvode k definícii sme ukázali, že matematika vyjadruje tvary pomocou kvantitatívnych vzťahov; rozoberieme teraz toto tvrdenie aj pre ostatné odbory matematiky.⁸

⁶ Ba dokonca pomerov týchto pomerov, ako napríklad pri dvojpomere.

⁷ V neuklidovskej geometrii možno napríklad merať vzájomný „uhol“ dvoch priamok vzorcom Lagerrovým:

$$\varphi = \frac{1}{2} i \log(p_1 p_2 uv)$$

kde $(p_1 p_2 uv)$ značí dvojpomer daných priamok p_1 a p_2 a izotropických priamok u a v .

⁸ V dôsledku predchádzajúcich úvah pokladám rozličné druhy geometrie za špeciálne odbory matematiky a nie za osobitnú vedu a nerozlišujem teda medzi akousi „čistou“ matematikou a geometriou, ako sa to neraz robí.

Predovšetkým je jasné, že ide o kvantitatívne vzťahy všade tam, kde matematika narába priamo s pojmom čísla.⁹ „Číslo je najčistejšie kvantitatívne určenie, aké poznáme“, hovorí Engels;¹⁰ mohli by sme povedať, že číslo je *mierou* kvantity. Vznik pojmu miery, ktorú Lenin výstižne volá „špecifickou kvantitou“,¹¹ je tesne spojený s vývinom pojmu čísla. Svet je kvantitatívne (a prirodzene aj kvalitatívne) diferencovaný; vznikajú v ňom *relatívne* izolované celky. Človek je schopný poznávať nielen kvantitu ako jednu zo základných gnozeologických kategórií, no aj túto diferencovanosť reálneho sveta. Spoločenská práca donútila človeka v dlhom vývinovom procese takéto relatívne samostatné celky aj porovnávať, zoskupovať ich podľa toho, ako sa skutočne vo svete vyskytujú aj podľa potrieb jeho práce a naučila ho vzájomne ich porovnávať po kvalitatívnej aj kvantitatívnej stránke. Dospel tak k tomu, že si určitý celok, či už ho našiel priamo v prírode, či si ho sám vyrobil alebo či si ho napokon vytvoril iba vo svojom myslení abstrakciou na podklade celkov konkrétnych, vyvolil za základ kvantitatívneho porovnávania, t. j. za *jednotku*, s ktorou porovnával celky iné.¹²

Súbežne s týmto procesom prebiehal aj vývin pojmu čísla. Keď si človek vytvoril už aj pojem čísla,¹³ keď sa teda naučil *rátat*, stávala sa takáto jednotka *mierou* a číslo vyjadrovalo kvantitatívny vzťah jednotky a meranej kvantity.

Keď sa nám teda podarí k hocikakému javu reálneho sveta stanoviť jednotku, môžeme ho pomocou tejto jednotky a čísla zmerať. S tým súvisí aj pojem *veličiny*. Nemyslím, že by bolo správne volať veličinou každý jav, ktorý má nejakú kvantitu — teda vlastne každý jav vôbec. Súdim, že je správnejšie pomenovať veličinou len taký jav, pre ktorý vieme zvoliť jednotku a pomocou tejto jednotky ho zmerať. Existujú totiž aj javy, ktoré nesporne kvantitu majú, ktoré však jednako len merať nevieme. Nie je napríklad možné pochybovať, že svoju kvantitu majú aj naše duševné schopnosti. Veď v praktickom živote aj porovnávame pozornosť alebo pamäť u rozličných ľudí a hovoríme, že niekto má väčšiu schopnosť zapamätáť si niečo ako druhý. Nevieme však doteraz vybrať a určiť nejakú presnú jednotku, ktorou by sme kvantitu týchto schopností vedeli zmerať.¹⁴ Z tohto stanoviska uznávame teda za veličinu len jav, ktorý vieme merať. Keby sme za charakteristickú vlastnosť veličiny pokladali už možnosť kvantitatívneho odstupňovania, bolo by napokon veličinou vôbec všetko — napríklad aj krása umeleckého diela.

Z týchto úvah súčasne vidieť, že pojmy jednotky, miery, veličiny a čísla presahujú rámec matematiky; matematika ich *nemôže* naozaj definovať,¹⁵ musí ich preberať z gnozeológie, ktorá ich môže vysvetliť. Matematika ich, pravda, môže *spresniť*, t. j. vo vnútri systému udať presné pravidlá, ako s týmito pojmami treba *narábať*.¹⁶

⁹ Pojem čísla a jeho vznik rozoberám v osobitnej kapitole spomínanej knihy; tu sa obmedzujem na krátku rekapituláciu svojich úvah.

¹⁰ F. Engels, *Dialektika prírody*, Bratislava 1954, 218.

¹¹ V. I. Lenin, *Filosofické sešity*, Praha 1954, 95.

¹² Pojem jednotky je, pravda, veľmi zložitý (porovn. F. Engels, *Dialektika prírody*, Bratislava, 1954, 218); nemôžeme ho však na tomto mieste podrobne rozoberať. Ide nám len o to, akým spôsobom vyjadruje matematika kvantitatívne vzťahy.

¹³ O tomto vývine budeme hovoriť aj neskoršie. Vo vývine pojmu čísla môžeme badať rozličné stupne abstraktnosti. Súdim, že človek začal v pravom slova zmysle rátať až vtedy, keď sa naučil používať tie isté číselky pre všetky druhy rátaných predmetov.

¹⁴ Prirodzene sa takéto pokusy aj robia — spomeňme len pochybný kvocient inteligencie v psychotechnike.

¹⁵ Porovn. F. Engels, *Dialektika prírody*, Bratislava, 1955, 217.

¹⁶ Podrobnejšie rozoberám túto vec v osobitnej kapitole spomínanej knihy.

Keďže však číslo je vyjadrením kvantity, je jasné, že matematika všade tam, kde narába s číslom, vyjadruje kvantitatívne vzťahy. Už sám pojem čísla má v podstate vzťahový charakter, vyjadruje totiž pomer k nejakej jednotke, hoc aj neraz mlčky predpokladáme, že každý vie, o akú jednotku ide a nemusíme vždy voľbu jednotky zdôrazňovať.¹⁷

5. Sem spadá veľká väčšina odborov matematiky — elementárna aritmetika a geometria, číselná teória, infinitezimálny počet, teória funkcií, analytická a diferenciálna geometria, vektorový počet, počet pravdepodobnosti.

Treba spomenúť ešte teóriu grúp a svázov, teóriu množín a konečne pokusy vybudovať matematiku axiomaticky.

V teórii grúp a svázov ide o vzájomné vzťahy nejakého (konečného alebo nekonečného) počtu prvkov a určitých operácií, ktoré s týmito prvkami robíme. Pokiaľ sú prvkami nejaké matematické objekty, je kvantitatívny a vzťahový charakter jasný (napríklad keď ide o zákrytové pohyby geometrických útvarov alebo o grupu transformácií). Prvkami grupy môžu však byť aj objekty, ktoré nechápeme kvantitatívne. Je možné napríklad vytvoriť grupu farieb s tromi prvkami — belasou farbou (B), červenou farbou (Č) a žltou farbou (Ž); operáciou je miešanie farieb.¹⁸ „B.Ž“ potom značí žltozelenú farbu. Kvantitatívny charakter je tu azda menej jasný. No treba si uvedomiť, že práve týmto zhrnutím farieb do grupy kvantitatívne vzťahový charakter do teórie farieb priamo vnášame. Každý odtienok farby vyjadrujeme matematickým vzorcom a miešanie farieb sme nahradili matematickým vzťahom.¹⁹

Pravda, teóriu grúp je možné vybudovať čiste axiomaticky, no o tom budeme hovoriť neskoršie.

Podobné úvahy platia aj o teórii množín. Už sama Cantorova pôvodná definícia množiny ako „zhrnutie určitých, od seba rozoznateľných objektov nášho názoru alebo myslenia do jedného celku“ je vlastne vyjadrením spomínanej už ľudskej schopnosti poznávať kvantitatívnu diferencovanosť reálneho sveta a jej kvantitatívne vzťahy. Pojmy kardinálneho čísla, ekvivalencie množín, spočítateľnosti, usporiadateľnosti atď. sú jasne vyjadrením kvantitatívnych vzťahov.

Pravda, Cantorova definícia vedie k určitým nejasnostiam, k takzvaným antinómiám; na jej základe je totiž možné vytvoriť aj množiny, ako napríklad množinu všetkých kardinálnych čísel, množinu všetkých množín, ktoré neobsahujú seba samých (antinómia Zermello-Russellova) a pod. Aby sa matematici vyhli týmto antinómiám, vychádzajú pri budovaní teórie množín (a ostatne aj pri budovaní dnes temer všetkých odborov matematiky) zo systému axióm, ktoré síce pojem množiny nedefinujú, no určujú základné vzťahy medzi množinami a určujú pravidlá, ako s množinami operovať.

6. Treba sa teda zamyslieť aj nad axiomatickým budovaním matematiky.²⁰

Keď napríklad Hilbert²¹ pri zostavovaní svojho axiomatického systému pre geometriu tvrdí, že vôbec nie je potrebné vedieť, čo značí „bod“, „priamka“, „ležať na priamke“, „medzi“ atď., že postačí poznať práve len vzťahy medzi týmito

¹⁷ Matematika sama nemôže síce definovať priamo základný pojem jednotky, to však neznačí, že nemôže presne vo vnútri systému definovať jednotky z tohto pojmu odvodené — napríklad imaginárnu jednotku i alebo jednotkový vektor atď.

¹⁸ Farby môžeme, pravda, vyjadriť aj kvantitatívne, totiž vlnovou dĺžkou; no na to neberie naša úvaha zreteľ.

¹⁹ Symbol „.“ tu, pravda, neznačí násobenie v zmysle aritmetiky.

²⁰ Kritiku axiomatickej metódy podávam v prvej kapitole spomínanej knihy; tu sa obmedzujem na dôkaz, že aj takto vybudovaná matematika skúma kvantitatívne vzťahy.

²¹ D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Berlin, 1929, 241 a. n.

pojmom, zdá sa, že sa kvantitatívne vzťahy nahradili vzťahmi logickými. To je konečne aj náhľad Hilbertov a celej jeho axiomatickej matematickej školy. Axiómy majú, pravda, *formu* logickú a je možné z nich čiste deduktívne odvodzovať ďalšie vety príslušného odboru matematiky, no axiómy majú aj *obsah*, aj keď to matematici pozitivisticky zameraní popierajú. Dokazuje to sám pôvod axióm; sú odrazom vzťahov reálneho sveta, pravda, odrazom mnohokrát overeným. Platí o nich to isté, čo hovorí Lenin o axiómach logických²² — praktická činnosť človeka musela viesť jeho vedomie miliardkrát k opakovaniu určitých výrokov o pravzoroch matematických pojmov v reálnom svete, aby sa mohli stať axiómami nejakého matematického odboru. Obsahom matematických axióm sú však zasa len kvantitatívne vzťahy. Keď Hilbert vyslovuje axiómu: „Ak bod A leží medzi B a C , potom leží A aj medzi C a B , no B neleží medzi A a C “, vyjadruje polohový vzťah známy z praktického života dokonca ešte pred vznikom matematiky ako abstraktnej vedy. Keby tento vzťah nebol už vopred známy, nemohla by matematika spomínanú axiómu vysloviť. Sám Hilbert uznáva, že k zavedeniu axióm môžu viesť aj úvahy nad *obsahom* matematických pojmov a vzťahov a takéto úvahy volá metamatematikou.²³ No jednako tvrdí, že axiómy samy už nijakého obsahu nemajú. V skutočnosti axiómy obsah majú, no pri deduktívnom odvodzovaní matematických vzťahov nám na svoj obsah dovoľujú zabudnúť na tak dlho, pokiaľ pri dedukciách nenarazíme na logické protirečenie alebo pokiaľ nevznikne potreba riešiť matematické problémy, na ktoré daná sústava axióm nestačí. Potom nezvyší než zaviesť nové axiómy, prípadne celú sústavu axióm zmeniť. A vtedy zasa vystúpi do popredia obsahová stránka axióm.

Ako vidieť, ani axiomatické spracúvanie neodstraňuje z matematiky kvantitatívne vzťahy; ich premena na vzťahy logické je iba zdanlivá. K tejto veci sa ešte vrátime pri úvahách o vzťahu matematiky a logiky.

b) Kvantita a kvalita

7. Keď teda matematika vyjadruje len a len kvantitatívne vzťahy, neznačí to, že úplne zanedbáva kvalitatívne rozdiely. Matematika vystihuje vo svojich výskumoch kvalitatívne rozdiely aj dialektické skoky z kvantity na kvalitu.

Uvážme napríklad rovnicu kužeľosečky:

$$y^2 = 2px + qx^2. \quad (1)$$

Tento kvantitatívny vzťah je všeobecným vyjadrením kužeľosečky, ktorej jeden vrchol je v počiatku súradníc a ktorej jedna os splýva s osou x .

Nechajme teraz q prebiehať hodnoty počínajúce nejakou kladnou hodnotou cez nulu až k hodnotám záporným. Pokiaľ je $q > 0$, predstavuje rovnica (1) hyperbolu (prípád a), ak $q = 0$, zmení sa kužeľosečka na parabolu (prípád b) a keď konečne $q < 0$, je (1) rovnicou elipsy (prípád c). (Špeciálne pre $q = -1$ je (1) rovnicou kružnice.) Kvantitatívnou zmenou q menia sa teda vlastnosti kužeľosečky danej rovnicou (1) — elipsa napríklad nemá reálne body v nekonečne, kým hyperbola aj parabola má atď.

Môžeme však pokračovať aj ďalej a meniť vo všetkých troch prípadoch aj p .

²² V. I. Lenin, *Filosofické sešity*, Praha, 1954, 158.

²³ D. Hilbert, *Neubegründung der Mathematik*, Abh. d. math. Semin. d. Hamburger Universität, I, 1922, 157 a. n.

Ak v prípade a zvolíme $p > 0$, dostaneme hyperbolu, ktorá má jeden vrchol v počiatku súradníc a druhý v kladnej časti osi x . Keď p zmeňujeme, bliži sa tento vrchol počiatku. Pre $p = 0$ sa hyperbola rozpadne na dve priamky, prechádzajúce počiatkom (degeneruje). Keď prejdeme do hodnôt záporných, teda keď $p > 0$, dostaneme zasa hyperbolu, no druhý vrchol sa presťahuje na zápornú časť osi x . Podobne môžeme pokračovať v prípade b . Keď sa tu p zmeňuje v kladných hodnotách, parabola sa neprestajne „zužuje“, je však stále obrátená smerom kladnej osi x . Keď položíme $p = 0$, zmení sa parabola na dvojnásobnú priamku ležiacu v osi x . A keď konečne $p < 0$, dostaneme zasa parabolu, no obrátenú smerom zápornej osi x . A napokon v prípade c dostávame pre $p > 0$ elipsu, ktorá má jeden vrchol v počiatku súradníc a druhý na kladnej časti osi x . Keď p zmeňujeme, obidva vrcholy sa k sebe približujú. Keď však položíme $p = 0$, rozpadne sa elipsa na dve imaginárne priamky, pretínajúce sa v počiatku súradnej sústavy. A keď konečne zvolíme $p > 0$, dostaneme zasa elipsu, ktorej druhý vrchol je však v zápornej časti osi x .

Ak teda meníme *kvantitu* koeficientov p a q , mení sa tvar kužeľosečky, až v určitých uzlových bodoch (v našom prípade je to vždy nula) sa zmení *kvalita* kužeľosečky. Je napríklad jasné, že dve imaginárne priamky majú iné geometrické vlastnosti ako elipsa.

Ešte všeobecnejší príklad môžeme uviesť z neeuklidovskej geometrie. Vyjdeme z Kleinovho stanoviska a pre jednoduchosť sa obmedzíme na útvary jednorozmerné — teda na bodový rad alebo sväzok papršlekov. Neeuklidovské geometrie potom skúmajú invarianty projektívnej jedinomocnej grupy transformácií

$$\begin{aligned} k x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ k x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned}$$

ktoré reprodukujú dvojicu absolútnych elementov, daných rovnicou

$$g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

Podľa hodnoty diskriminantu tejto rovnice

$$D = g_{12}^2 - g_{11}g_{22}$$

dostávame tri druhy geometrií. Pre $D > 0$ dostávame geometriu hyperbolickú, pre $D = 0$ geometriu parabolickú a pre $D < 0$ geometriu eliptickú. (Euklidovská geometria je potom špeciálnym prípadom geometrie parabolickej.) Kvantitatívnu zmenou koeficientov g_{ik} dochádzame teda k rozličným geometriám, ktoré sa od seba kvalitatívne líšia a v ktorých dostávajú geometrické pojmy (napríklad vzdialenosť dvoch bodov alebo uhol dvoch priamok) celkom iný význam.

V geometrii sú takéto zmeny kvality, spôsobené kvantitatívnymi zmenami, ľahšie zbadateľné, keďže geometria je bližšia názoru ako ostatné odbory matematiky. No takéto prípady vyskytujú sa aj v nich. V algebraickej rovnici

$$\sum_{k=1}^n a_k x^k = 0$$

je napríklad možné vyjadriť korene vzorcom pomocou koeficientov a_k , len pokiaľ platí $n \leq 4$. Pre $n > 4$ je to nemožné.

8. Vidieť teda, že matematika vystihuje aj kvalitatívne rozdiely, ba aj dialektické skoky. No vystihuje ich svojím špecifickým spôsobom.

Elipsa, hyperbola a parabola majú nesporne odlišné vlastnosti, no matematika tieto odlišné vlastnosti vystihne tým, že určí nové kvantitatívne vzťahy, ktoré pri zmene kvantity nastanú. Matematika teda využíva fakt, že pri kvalitatívnej zmene nastávajú zmeny aj v kvantitatívnych vzťahoch; konštatovaním týchto nových kvantitatívnych vzťahov konštatuje sa nepriamo aj zmena kvality.

Na tom nič nemení okolnosť, že matematika vie kvalitatívne odlišné prípady zhrnúť prípadne pod jediný, všeobecný kvantitatívny vzťah. Rovnica (1), prípadne ešte všeobecnejšia rovnica kužeľosečky v Descartesových súradniciach:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

alebo všeobecná rovnica algebraickej krivky

$$\sum a_{rs} x^r y^s = 0; r, s = 0, 1, 2, 3, \dots, n; r + s = n,$$

či dokonca najvšeobecnejšia rovnica krivky v rovine

$$f(x, y) = 0$$

zahŕňajú najrozličnejšie, kvalitatívne odlišné druhy kriviek do jediného kvantitatívneho vzťahu. No keď začneme tieto všeobecné kvantitatívne vzťahy rozoberať, ukáže sa vždy, že nejaký kvantitatívny vzťah odvodený z danej rovnice rozhoduje svojou hodnotou o kvalitách jednotlivých špeciálnych prípadov.

Podobne zahŕňa matematika pod pojem čísla najrozličnejšie kvalitatívne odlišné typy čísla — prirodzené čísla, zlomky, iracionálne a transcendentné čísla, relatívne čísla aj čísla komplexné. Dokonca aj v každom z týchto druhov čísel sú ešte kvalitatívne rozdiely. „Číslo je najčistejšie kvantitatívne určenie, aké poznáme. No je plné kvalitatívnych rozdielov“, napísal Engels.²⁴ A všetky tieto kvalitatívne odlišné druhy jednako zahŕňa matematika pod jediný pojem. Prejavujú sa však, keď treba vytvoriť axiomatický systém pre nejaký druh čísel — v každom prípade treba určiť iné základné kvantitatívne vzťahy. Pre prirodzené čísla postačí známy Peanov systém piatich axiém. Hilbertov systém axiém pre reálne čísla už obsahuje 18 axiém.²⁵ Pre komplexné čísla treba zaviesť ďalšie, nové kvantitatívne vzťahy — napríklad pri porovnávaní veľkosti treba zaviesť nový pojem absolútnej hodnoty. Pre Hamiltonove kvaterniony treba dokonca porušiť komutatívny zákon aspoň pre jednu základnú operáciu atď.

c) Matematická abstrakcia

9. V našej definícii tvrdíme ďalej, že sa matematika zaoberá najvšeobecnejšími kvantitatívnymi vzťahmi.

Matematika ako veda vznikla abstrakciou z konkrétnych poznatkov o kvantitatívnych vzťahoch v našom svete a celá jej história je naplnená úsilím po vždy abstraktnejších pojmoch a vzťahoch. Čo najvyššia abstraktnosť je priamo cieľom celého matematického skúmania.

Uvážme to na niekoľkých príkladoch.²⁶

²⁴ F. Engels, *Dialektika prírody*, Bratislava, 1954, 218.

²⁵ D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Berlin 1929, 241 a. n.

²⁶ Vznik matematických pojmov a vývin formulácie ich vzťahov rozoberám podrobne v spomínanej knihe, tu sa obmedzujem na krátku rekapituláciu.

Vo vývine ľudského myslenia existovalo obdobie, zachované sčasti dodnes v myslení primitívov a našich detí, keď neexistoval abstraktný pojem čísla. Vyvinuli sa síce akési prostriedky na vyjadrenie počtu, no tie boli nerozlučne spojené s konkrétnymi situáciami a predmetmi. Je napríklad známe, že primitív odmietol sčítať člny svojej dediny s člnami hostov v tom istom prístave, lebo vraj nepatria k sebe.²⁷ Pripustil však, že by ich bolo možné sčítať, keby sa vydali spoločne na nejakú výpravu. Poznáme ešte dnes jazyky, ktoré majú na rátanie rozličných predmetov rozličné spôsoby vyjadrenia, rozličné „číslvky“.²⁸ Je tu jasné tesné spojenie počtu s konkrétnymi predmetmi a konkrétnou situáciou.

Až dlhým postupným vývinom začalo ľudstvo abstrahovať od rátaných konkrétnych predmetov a dospelo tak k pojmu prirodzeného čísla. A od neho pokračovalo v abstrakcii k zlomkom a relatívnym číslam, teda k číslu racionálnemu a ďalej k číslam iracionálnym a napokon k číslam komplexným.

V dnešnom pojme čísla došla matematika k takému stupňu abstrakcie, že to v matematikoch až vzbudzuje dojem, že pojem čísla je celkom odtrhnutý od reality, že je „čistým výtvorom ľudského myslenia“.²⁹

10. Práve tak sú aj geometrické pojmy produktom abstrakcie. Človek sa naučil poznávať rozmery, polohu, tvary atď. na konkrétnych predmetoch. Ešte dnes napríklad označujeme tvary a dokonca aj v geometrii prirovnaním k určitým veciam — hovoríme napríklad o srdcovitom tvare krivky alebo o „vlné“ sínusoidy. Pravda, v dnešnej matematike stojí za takýmto označením vždy nejaké presne vymedzenie príslušných kvantitatívnych vzťahov.

Pojem priamky vznikol abstrakciou z konkrétnej predstavy rovnej laty, napätého povrazu, rovnej cesty, smeru nášho pohľadu a pod. Pojem bodu skrsol abstrakciou z veľmi malých teliesok, z pokusov presne určiť miesto, polohu atď. V dnešnej geometrii dosiahli tieto pojmy už takú vysokú abstraktnosť, že je možné narábať nimi aj takým spôsobom ako Hilbert vo svojej axiomatickej sústave.

Starí grécki matematici už síce vedeli, že rozličné druhy kužeľosečiek vznikajú rezmi roviny a kužeľovej plochy v rozličných vzájomných polohách, no jednako skúmali každú kužeľosečku osobitne. (Pravda, už napríklad pojem paraboly bol sám osebe vysoko abstraktným pojmom — odhliadalo sa od toho, že každý reálny útvar má tri rozmery.) Dnešná geometria vie zahrnúť všetky druhy, kužeľosečiek rovnicou o dvoch premenných druhého stupňa:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

ktorá zahŕňa aj kužeľosečky degenerované. Zavedením homogénnych súradníc vie matematika vyjadriť aj nevlastné body kužeľosečky; rovnica

$$\sum a_{rst} x_1^r x_2^s y_3^t = 0; r, s, t, = 0, 1, 2; r+s+t = 2$$

dovoľuje skúmať aj body „v nekonečne“.

²⁷ M. Wertheimer, *Drei Abhandlungen zur Gestalttheorie*, Erlangen 1925, 111 a. n.

²⁸ L. Lévy—Bruhl, *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures*, Paris, 1910, 223. Zvyšky tohto javu nachádzame aj v jazykoch moderných. Slovo „pár“ použijeme len v dvojici predmetov, ktoré k sebe nejak patria; môžeme povedať „kopa orechov“ v zmysle „60 orechov“, nemôžeme však v tom istom zmysle povedať napríklad „kopa traktorov“ atď.

²⁹ Osobitne to platí o pojme prirodzeného čísla. Tento pojem je taký starý, tak pevne zakotvený v ľudskom myslení a toľkokrát overený praxou, že ho matematici intuicionistickej školy pokladajú za „evidentný“, za akosi človeku vrozený. Známy je výrok matematika Kroneckera, že vraj celé čísla stvoril boh a ostatné že je ľudským dielom.

Ba kužeľosečky vie matematika zaradiť pod ešte všeobecnejší prípad algebraickej krivky rovinnej:

$$\sum a_{rst} x_1^r x_2^s x_3^t = 0; r, s, t, = 0, 1, 2 \dots n; r + s + t = n$$

alebo dokonca pod pojem krivky vôbec, danej vzťahom

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(v homogénnych súradniciach).

Navyšší stupeň abstraktnosti dosiahla matematika nesporne v teórii množín a v topológii, ktoré ostatne spolu tesne súvisia. Napríklad vyjadrenie čísla pomocou kardinálnych čísel je rozhodne najabstraktnejšie chápanie čísla vôbec.³⁰ Práve tak abstrahuje topológia od skutočných tvarov a zaoberá sa iba určitými spoločnými vzťahmi polohovými medzi jednotlivými tvarmi.

11. Matematická abstrakcia je pritom abstrakciou správnu, dialektickou.

E. Čech formuluje matematickú abstrakciu takto:³¹ Je daná nejaká množina *M*. Zvolíme si určité znaky a zoskupíme prvky do podmnožín tak, aby v jednej podmnožine boli všetky prvky, ktoré majú určitú skupinu zvolených znakov a nijaké iné prvky. Potom hovoríme, že podmnožiny takto vytvorené vznikli abstrakciou a prvky, ktoré obsahujú, voláme konkrétnym vyjadrením príslušnej podmnožiny.

Opísaný proces vystihuje *formálnu* stránku abstrakčnej činnosti *vo vnútri* určitého usporiadaného matematického systému. V matematickej abstrakcii je však ešte niečo viac. Vidíme to na vzniku matematických pojmov. Ľudské myslenie si vytvorilo pojem priamky z konkrétnych predstáv rovnej lavy, cesty, napätého povrazu atď. preto, lebo si to vynucovala priamo ľudská prax a nie azda ľubovoľnou vôľbou znaku priamosti. Pri matematickej abstrakčnej činnosti teda rozhoduje aj *obsah* matematických pojmov. Matematická abstrakcia sa neodtrhuje od skutočnosti, neochudobňuje; čím je matematický pojem abstraktnejší, tým má širší nielen rozsah, ale aj obsah. Všeobecná rovnica kužeľosečky zahŕňa všetky jednotlivé kužeľosečky a všetky ich individuálne vlastnosti a dovoľuje *hlbšie* preniknutie do každej jednotlivéj kužeľosečky. A ešte viac. Pojem kužeľosečky dovoľuje aj hlbšie, presnejšie poznanie každého reálneho útvaru, ktorý má hoci aj len približne elipsovitý či iné obrysy.

Matematická abstrakcia teda patrí medzi „*vedecké* (správne, vážne, nie nezmyselné) abstrakcie“, ktoré „odrážajú prírodu hlbšie, vernejšie, *úplnejšie*“.³² Matematická abstrakcia vyšla z praxe a v aplikáciách sa k praxi vracia. „Od živého nazerania k abstraktnému mysleniu a od neho k praxi — taká je dialektická cesta poznania *pravdy*, poznania objektívnej reality.“³³

Všade tam, kde sa matematici odtrhujú od reality, kde dôsledne zamietajú dialektiku a súvis s objektívnou realitou, dostávajú sa nevyhnutne skôr či neskôr do závozu, ako to vidieť na pokusoch vybudovať matematiku ako odbor čiste formálnej logiky alebo dokonca ju vyhlásiť za „vedu o formálnej štruktúre symbo-

³⁰ Toto vyjadrenie čísla nemožno však pokladať za definíciu čísla v pravom slova zmysle. F. Gonseth celkom správne poznamenáva, že je čudné definovať celé číslo tak, že najprv *vyrátame* určitý počet axióm teórie množín. (F. G o n s e t h, *Les fondements des mathématiques*, Paris, 1926, 207.)

³¹ E. Č e c h, *Čísla a početní výkony*, Praha, 1954, 59 a n.

³² V. I. L e n i n, *Filosofické sešity*, Praha, 1954, 140.

³³ Tamže.

lov“.³⁴ Matematika má však zdravé korene a jej vývin prerastá cez hlavu všetkým, ktorí chcú matematiku vykladať idealisticky alebo aspoň bez dialektiky. Vyrástla z praxe, zo skutočného života a zasa sa k nemu vo svojich aplikáciách na druhej vedy vracia. Skutočne veľkí matematici pristupovali k matematike živelné materialisticky; bez ohľadu na všetky protesty idealistických filozofov prijali iracionálne a imaginárne čísla, zaviedli infinitezimálny počet, transfinítne čísla atď.

12. Týmito otázkami sa budeme zaoberať ešte v nasledujúcom úseku, pri úvahách o súvisi matematiky s reálnym svetom. Tu by sme chceli ešte zdôrazniť, že matematika pri svojich abstrakciách nevystačí s formálnou logikou a že postupuje dialekticky.

Ukážme to najprv na príklade komplexných čísel, o ktorých Engels hovorí, že sú už „vlastným voľným výtvorom a predstavou rozumu“.³⁵

Zo všetkých pravidiel, ktoré platia pre reálne čísla, teda aj z každej axiomatickej sústavy pre reálne čísla vyplýva, že nie je možné nájsť také reálne číslo, ktoré umocnené na druhú dá číslo záporné. To bolo jasné aj matematikom v XVI. storočí. Keď však sa Cardan pokúšal riešiť rovnicu tretieho stupňa, došiel k pozoruhodnému dôsledku. Riešil totiž rovnicu

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2)$$

spôsobom používaným aj dnes. Položil

$$x = u + v$$

a viazal u a v podmienkou

$$3uv = -p$$

Dosadením dostávame dva vzťahy:

$$u^3 + v^3 = -q, u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Potom však musia u^3 a v^3 byť koreňami rovnice

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \quad (3)$$

Cardan tak riešil rovnicu

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad (2')$$

a došiel k pomocnej rovnici

$$X^2 - 4X + 125 = 0. \quad (3')$$

Jej korene sú:

$$X_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-121},$$

teda *neexistujúce* čísla — pokiaľ, pravda, za najvšeobecnejší pojem čísla pokladáme

³⁴ Porovn. napr. M. Black, *The Nature of Mathematics*, London-New York, 1933, 8.

³⁵ F. Engels, *Anti-Dühring*, Bratislava, 1954, 34.

číslo reálne. Neexistuje teda z tohto „čísla“ ani tretia odmocnina a rovnica (2') by vlastne nemala nijaké korene. A jednako má rovnica (2') reálne korene $4, -2 + \sqrt{3}$ a $-2 - \sqrt{3}$, ako je možné ľahko sa presvedčiť dosadením. Matematika sa tu dostala do jasného logického rozporu, metódami matematicky naprosto správnymi a bezchybnými sa dochádzalo k protirečivému výsledku — rovnica typu (2') súčasne mala aj nemala reálne korene. Toto protirečenie riešila matematika dialektickou cestou — poprela ho a vyhlásila, že neexistujúce čísla existujú. Došla tak k novému, vyššiemu druhu čísla, k číslu imaginárnemu a k jeho spojeniu s číslom reálnym, k číslu komplexnému. Syntézou „možných“, t. j. reálnych čísel a čísel „nemožných“, t. j. imaginárnych vytvorila číslo komplexné, teda číslo vo všeobecnom tvare $a + bi$, kde i je nová imaginárna jednotka, rovná $\sqrt{-1}$. Bolo však aj potrebné modifikovať kvantitatívne vzťahy platné pre čísla reálne. Pre reálne čísla napríklad môžeme vždy písať

$$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

pretože odmocnina zo záporného čísla nemá význam. Ak pripustíme čísla imaginárne, platí tento vzorec iba vtedy, ak je aspoň jedno z čísel a a b kladné. Ak sú obidve záporné, treba postupovať inakšie:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i \cdot \sqrt{a} \cdot i \cdot \sqrt{b} = i^2 \cdot \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}.$$

Rozviedol som tento príklad podrobnejšie, pretože na ňom dobre vidieť, ako matematiku k vyššej abstrakcii donútila *vnútorná* logická súvislosť matematiky. Pre čísla reálne malo ľudské myslenie ešte určitú oporu v názore — napríklad v osi číselnej. Pre imaginárne čísla už priamej opory v názore niet. Matematika si ich teda skutočne sama vytvorila, ako to hovorí Engels. Matematika tu akosi *prekročila* priamy názor; že sa však ani tým neodtrhla od reality, dokazujem v nasledujúcom odseku.

13. Ako druhý príklad uveďme základné úvahy diferenciálneho počtu. Zvolíme celkom jednoduchý prípad; budeme hľadať dotyčnicu ku krivke danú rovnicou

$$y = x^2$$

v nejakom danom bode krivky. Nech je tento bod všeobecne $P(x, y)$. Nejaký susedný bod krivky (P') bude mať súradnice $x + \Delta x, y + \Delta y$. (Δx a Δy nemusia byť kladné.) Priamka, ktorá prechádza bodmi P a P' bude mať smernicu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Súradnice bodu P' vyhovujú rovnici (4):

$$y + \Delta y = x + 2x \Delta x + \Delta x^2.$$

Odčítaním rovnice (4) dostaneme:

$$\Delta y = 2x \Delta x + \Delta x^2,$$

delením činiteľom Δx dostaneme

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x. \quad (5)$$

Nechajme teraz bod P' približovať sa k P . Potom sa Δx a Δy , budú vždy zmenšovať. Keď bod P' splynie s bodom P , prejde priamka na dotyčnicu. Newton a Leibniz, ktorí súčasne a neovislo od seba objavili diferenciálny počet, uvažovali teraz takto: keď sa bod P' blíži neobmedzene k bodu P , *stávajú sa* Δx a Δy nekonečne malými. Ich pomer sa tiež neobmedzene blíži smernici dotyčnice, čiže ľavá strana rovnice (4) bude s nekonečne malou chybou udávať práve túto smernicu. Táto nekonečne malá chyba je v našom prípade práve Δx na pravej strane rovnice (5). Pretože však Δx sa stáva práve nekonečne malým, môžeme ho *zanedbať* a dotyčnica v bode P má práve smernicu $2x$.

A tu vzniká protirečenie. Matematika je presná, nemôže zanedbať ani veľmi malú veličinu, ak sa nechce uspokojiť iba s približným výsledkom. Δx by bolo možné zanedbať iba vtedy, ak by sa rovnalo nule. Keby však bolo Δx rovné nule, potom by bolo rovné nule aj Δy , ako vyplýva z rovnice (4). No podiel $\frac{0}{0}$ nemá v matematike nijakého zmyslu. Pritom však konštrukcia dotyčnice v bode na parabole potvrdzovala správnosť uvedeného výpočtu.

Newton a Leibniz rozriešili toto protirečenie tak, že proste vyhlásili, že Δx je možné zanedbať, aj keď sa nule len neobmedzene blíži a nie je priamo rovné nule a jednak len výsledok $\operatorname{tg} \varphi = 2x$ platí presne. K tomuto rozhodnutiu viedla Newtona a Leibniza nielen vnútorná logika matematiky, ale aj vzory v reálnom svete. Ich úvaha je abstrakciou z čiste praktických postupov, pri ktorých zanedbávame veličiny malé oproti veľkým a nebojíme sa o presnosť výsledku. Nekonečne malé a nekonečne veľké má svoje predobrazy v prírode. „Matematické nekonečno sme si vypožičali zo skutočnosti, aj keď neuvedomelo, a možno ho teda vysvetliť len zo skutočnosti, a nie z neho samého, z matematickej abstrakcie.“³⁶ Matematika tu abstrakciou z pomerov a vzťahov v reálnom svete došla k novým, vyšším pojmom a novým, vyšším vzťahom — k diferenciálu a k diferenciálnemu kvocientu — a došla k tomuto cieľu dialektickou abstrakciou.³⁷

d) Matematika ako odraz reálneho sveta

14. A napokon tvrdíme v definícii matematiky, že matematika — tak ako každá iná veda — je odrazom reálneho sveta.

Tento otázku dotkli sme sa už v predchádzajúcich odsekoch. Tu nám postačí zhrnúť výsledky našich úvah a pripojiť niektoré poznámky.

Je jasné, že základné matematické pojmy aj ich vzájomné vzťahy vznikli abstrakciou z konkrétnych predmetov a ich konkrétnych vzťahov v našom reálnom svete a vznikli v procese ľudskej spoločenskej práce. „Matematika, ako všetky ostatné vedy, vznikla z *potrieb* ľudí: z merania polí a obsahu nádoby, z merania času a z mechaniky“.³⁸ Kvantitatívnu diferencovanosť reálneho sveta museli si proste ľudia nejako vyjadriť, ak mali v tomto svete žiť a predovšetkým *vyrábať*. Potreba *presného* vyjadrenia tejto diferencovanosti ich donútila vytvoriť si abstrakciou až pojem čísla. Tá istá potreba ich viedla, aby z rovnej lavy atď. došli abstrakciou až k pojmu priamky atď.

³⁶ F. Engels, *Dialektika prírody*, Bratislava, 1954, 225 a n., kde sa celá vec podrobne rozoberá.

³⁷ Ako sa dialektika uplatňuje priamo v matematickej metóde, a to aj vo vnútri matematického systému, rozoberám podrobne v osobitnej kapitole svojej knihy. Tu mi išlo iba o dôkaz, že matematická abstrakcia je dialektická.

³⁸ F. Engels, *Anti-Dühring*, Bratislava, 1954, 35.

Keď si však už ľudské myslenie takéto abstraktné pojmy a vzťahy vytvorilo, mohlo s nimi narábať už bez ohľadu na ich predobraz v reálnom svete — pravda, až po určité hranice; aj pravidlá pre toto narábanie sú totiž odrazom skutočných procesov a vzťahov v reálnom svete. Ba takéto zanedbanie vzťahu k reálnemu svetu je nevyhnutné. „Predmetom čistej matematiky sú priestorové formy a kvantitatívne vzťahy skutočného sveta, teda veľmi reálna látka. To, že táto látka vystupuje v krajne abstraktnej forme, môže iba povrchne zakrývať jej vznik z vonkajšieho sveta. No aby sme tieto formy a vzťahy mohli skúmať ako také, musíme ich úplne odlúčiť od ich obsahu, odložiť ho nabok ako ľahostajný; takto dostaneme body bez rozmerov, čiary bez hrúbky a šírky, a a b a x a y , veličiny stále a premenné a potom celkom naostatok pridáme až k vlastným voľným výtvorom a predstavám rozumu, totiž k imaginárnym veličinám“.³⁹

15. A práve tento prípad, keď matematika dospieva k takýmto „voľným výtvorom“, treba ešte uvážiť.

Ukázali sme na príklade práve imaginárnych čísel, že k ich zavedeniu dospeli matematici pod tlakom vnútornej logiky matematického systému. Hamilton išiel ešte ďalej a pokúsil sa vytvoriť ešte vyšší pojem čísla. Nebol k tomu nútený logickým protirečením ako Cardan, proste chcel pokračovať v abstraktnom procese a skúsiť, či by nebolo možné zaviesť ešte všeobecnejší pojem čísla. Došiel pritom k pozoruhodnému výsledku, že je to možné iba za cenu porušenia základných vzťahov, platiacich pre dovtedajší pojem čísla. Keď totiž porušil zákon komutatívnosti pre násobenie, podarilo sa mu zaviesť čísla tvaru $a + bj + cj + dk$, kde i, j a k sú nové jednotky, analogické, no súčasne vyššie ako imaginárna jednotka komplexných čísel.⁴⁰ A pre tieto čísla — kvaternióny — holo možné zostaviť práve taký logicky konzistentný systém ako pre čísla komplexné, hoci už vôbec nezodpovedali ničomu v reálnom svete a hoci ich matematika nijako nevyhnutne nepotrebovala.

Podobný zjav možno badať aj pri vzniku neeuklidovských geometrií.

Matematikov už dávno veľmi trápil piaty postulát vyslovený Euklidom v jeho *Stoicheiach*: „Keď priamka pretína dve iné priamky a tvorí s nimi na tej istej strane dva vnútorné uhly, ktoré sú dovedna menšie ako dva pravé, potom sa tieto priamky, ak ich neobmedzene predlžujeme, pretnú na tej strane, na ktorej ležia spomínané uhly“. Tento postulát sa im videl prizložitým a málo evidentným. Vynaložili mnoho námahy, aby ho nahradili nejakým jednoduchším, „evidentným“ alebo aby ho dokázali z ostatných postulátov a axióm.⁴¹ Dokázať sa im ho síce nepodarilo, no našli aspoň postuláty jednoduchšie znejúce, ktoré boli s Euklidovým postulátom rovnocenné; ukázalo sa, že je ho možné nahradiť napríklad postulátmi: „Súčet vnútorných uhlov trojuholníka sa rovná dvom pravým uhlom“ alebo „Ak sú v štvoruholníku tri vnútorné uhly pravé, je aj štvrtý uhol pravý“.⁴²

A zasa Gauss, Bolyai a Lobačevskij proste skúsili — a to priamo proti názoru a proti všetkým skúsenostiam — ako by to vyzeralo, keby sme pripustili, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je väčší alebo menší ako dva pravé, alebo keby

³⁹ Tamže, 34.

⁴⁰ Pre tieto čísla platí $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ik = -j$, $ki = j$.

⁴¹ Euklides totiž rozoznával medzi postulátmi (aitémata) a axiómami (koinai ennoiai) — dnes by sme všetky jeho základné vety pomenovali axiómami.

⁴² Porov. napr. R. Bonola — H. Liebmann, *Die nichteuklidische Geometrie*, Leipzig—Berlin 1921, 3. vyd. alebo V. Hlavatý, *Úvod do neeuklidovské geometrie*, Praha, 1949, 13 a. n.

štvrtý uhol v spomínanom štvoruholníku bol väčší alebo menší ako pravý. Dostali zasa prekvapujúci výsledok — v obidvoch prípadoch dostali geometrie, ktoré boli síce logicky správne vybudovateľné a konzistentné, no ktoré odporovali všetkej skúsenosti. Ak je napríklad súčet vnútorných uhlov v trojuholníku menší ako dva pravé, je možné bodom mimo priamky viesť k tejto priamke *dve* rovnobežky; ak je tento súčet väčší ako dva pravé, nie je takým bodom možné viesť vôbec nijakú rovnobežku.⁴³

Označíme vnútorné uhly trojuholníka α , β a γ . Ak potom spíšeme axiomy geometrie — napríklad podľa vzoru Hilbertovho, no namiesto axiomy zodpovedajúcej piatemu postulátu Euklidovmu postulát: „ $\alpha + \beta + \gamma \geq 2R$ “, dostaneme geometriu, ktorá zahŕňa všetky tri druhy geometrií, ktoré sme už v našich úvahách spomínali (ods. 7), eliptickú, parabolickú aj hyperbolickú. Dosiahli sme tak zasa ešte vyššiu abstrakciu.

No aj tento krok by sa mohol vidieť naprostým odtrhnutím od reality a ozajstným činom „čistého rozumu“.

16. Všimnime si však dve okolnosti spoločné týmto prípadom.

Predovšetkým je to vnútorná logická súvislosť — či už s ostatným matematickým systémom, ako to bolo pri zavedení komplexných čísel, alebo logická konzistencia nového systému.

A po druhé je to aplikovateľnosť takýchto nových, vyšších systémov zasa na konkrétne prípady vyskytujúce sa v reálnom svete. Komplexné čísla a kvaterniony sa ukázali veľmi užitočnými napríklad vo vektorovom počte; moderná fyzika nám ukazuje, že euklidovská geometria nie je nijako absolútne platná v priestore a že existuje veľmi mnoho, pravdepodobne nekonečne mnoho rozličných geometrií, ktorých platnosť závisí — ako ostatne vôbec priestor — od formy hmoty vo vesmíre.

Pre dialektického materialistu sú obidve okolnosti — logická konzistencia a aplikovateľnosť matematiky — v jasnom súvisi. Pre matematika, ktorý nedospel k vedeckej metóde dialektického materializmu, neraz sa vidia niečím nepochopiteľnými. Preto sa niektorým pozitivistickým matematikom vidí celá matematika akousi hrou so symbolmi, pri ktorej treba len zachovať logickú konzistenciu. Aplikovateľnosť matematiky je pre nich niečím náhodným, čo matematika nemusí zaujímať.⁴⁴ Alebo sa im aplikabilita matematiky vidí naprostou a nepochopiteľnou záhadou. Aj taký veľký mysliteľ ako Einstein si tento fakt nevedel vysvetliť inakšie ako „prestabilizovanou harmóniou“, pred tajomnosťou ktorej sa skláňal v „kozmickej zbožnosti“.⁴⁵

Uvážme však, čo značí logická konzistencia matematických systémov.

„Logika je náuka... o zákonoch vývinu... všetkého konkrétneho obsahu sveta a jeho poznania, t. j. výsledok, suma, záver z *dejín* poznania sveta“.⁴⁶ Logické kategórie, logické figúry, logické zákony nie sú apriórne, aj ony vznikli abstrakciou na základe skúsenosti. „Zákony logiky sú odrazy objektívna v subjektívnom vedomí

⁴³ Pravda, treba si uvedomiť, že pojmy „uhol“, „priamka“, „rovnobežka“ dostávajú pritom *nový* obsah, všeobecnejší ako v geometrii euklidovskej.

⁴⁴ Preto tiež hovoria o vzťahoch a procesoch, na ktoré je možné matematiku aplikovať ako o „modely“ príslušného axiomatického systému matematiky. Bolo by oveľa správnejšie hovoriť o matematickom axiomatickom systéme ako o abstraktnom, zidealizovanom modeli konkrétneho sveta.

⁴⁵ „Kosmische Religiosität“. Porovn. napr. A. Einstein, *Mein Weltbild*, Amsterdam 1934, 169 a n.

⁴⁶ V. I. Lenin, *Filosofické sešity*, Praha, 1954, 68.

človeka“.⁴⁷ Keď teda vyjdeme z nejakého matematického axiomatického systému, ktorý je systémom vzťahov dosiahnutých abstrakciou z konkrétnych vzťahov reálneho sveta, a dedukujeme z neho pomocou zákonov logiky, ktoré sú zasa odrazom zákonitosti reálneho sveta, nemôže nás prekvapíť, že výsledky dedukcie sú v súhlase so zákonitosťami reálneho sveta a že tieto výsledky môžeme nazad aplikovať na konkrétne vzťahy a procesy reálneho sveta.

Táto niekedy neočakávaná možnosť aplikácie aj takých úsekov matematiky, ktoré vznikli bez ohľadu na názor, ba proti názoru, dokazuje, že matematická abstrakcia bola správna, vedecká a že preto dovoľuje poznať a pochopiť vzťahy reálneho sveta širšie a hlbšie než priamy názor.

A nemôže ani prekvapíť, že ten istý úsek matematiky je možné aplikovať na rozličné úseky reálneho sveta. Matematika skúma práve *najvšeobecnejšie kvantitatívne* vzťahy a je preto celkom pochopiteľné, že určité všeobecné kvantitatívne vzťahy nachádzame aj v rozličných, po druhých stránkach sa od seba líšiacich úsekoch reálneho sveta.

17. Aplikabilita matematiky je teda veľmi jasným dôkazom, že aj abstraktná matematika je odrazom reálneho sveta v našom myslení.

Abstraktnosť tohto odrazu umožňuje z jednej strany širšie a hlbšie pochopenie zákonitostí reálneho sveta, no na druhej strane ho — dialekticky — aj v určitom smere obmedzuje.

„Zobrazenie pohybu v myslení je vždy zhrubenie, umŕtvenie — a nielen v myslení, no aj v pocite a nielen pohybu, no *hocijakého* pojmu. A v tom je podstata dialektiky“.⁴⁸ S vysoko abstraktnými matematickými pojmami a ich vzťahmi môžeme narábať s naprostou presnosťou — to bol konečný dôvod, pre ktorý si ich ľudské vedomie vytvorilo, ako sme to už spomínali. Ak ich však aplikujeme, zaplatíme daň za zjednodušenie, ktoré sme pri ich tvorení vykonali, za vynechávanie podružných okolností; výsledky, ktoré aplikáciou získame, budú vždy viac alebo menej *približné*. Aby sme vôbec mohli matematiku aplikovať, musíme aj pomery v reálnom svete zjednodušovať, idealizovať.

Ukážme to na príklade tzv. voľného pádu. Ak predpokladáme, že na voľne padajúce teleso pôsobí ozaj stála sila smerujúca do stredu zemegule a ak zanedbáme všetky sily ostatné, dostaneme jednoduché pohybové zákony $v = gt$, $s = \frac{1}{2} gt^2$. Výsledky vyrátané podľa týchto zákonov budú však len približné. Keby sme vzali do ohľadu, že príťažlivá sila sa mení podľa gravitačného zákona, dostaneme pohybové zákony oveľa zložitejšie a výsledky budú presnejšie. Keby sme brali do ohľadu aj odpor vzduchu, pôsobenie veľkých hmôt nablízku, rotáciu zemskú, atď., prípadne aj pôsobenie mesiaca a slnka, budeme síce dostávať výsledky vždy presnejšie, no pohybové zákony budú vždy komplikovanejšie a napokon (napríklad v prípade troch alebo aj viac telies) budú dokonca našimi matematickými prostriedkami vôbec nevyjadriteľné.

Táto iba aproximatívna použiteľnosť matematiky nie je však akýmsi „osudovým“ nedostatkom matematiky. Je proste nevyhnutným dôsledkom dialektiky abstraktného a konkrétneho a stretáme sa s ňou v miere oveľa väčšej vo všetkých vedách, ktoré práve aplikáciou matematiky získavajú na presnosti. Okrem toho je v matematike táto aproximácia oveľa presnejšie kontrolovateľná ako vo vedách druhých. Vo väčšine prípadov nám matematika dokonca poskytuje presnejšie vy-

⁴⁷ Tamže, 152.

⁴⁸ Tamže, 234.

stiahnutie skutočnosti, než potrebujeme, t. j. vystiahnutie, ktoré je presnejšie ako medzi pozorovacích chýb.

Na druhej strane to však neznačí ani nejakú dokonalosť matematiky a nedokonalosť prírody alebo aspoň nášho poznávania prírody.⁴⁹ Matematika je naopak *výsledkom* nášho vždy dokonalejšieho pozorovania prírody a celého reálneho sveta a v dialektickej súhre nám dovoľuje spätným pôsobením ešte dokonalejšie poznanie reálneho sveta.

III. MATEMATIKA, LOGIKA A GNOZEOLÓGIA

18. Rozobrali a odôvodnili sme našu definíciu matematiky. Chceme ešte krátko poukázať na vzťah matematiky k logike a gnozeológii.

Matematika, vychádzajúc zo svojich základných pojmov a vzťahov, využíva v plnej miere logické zákony — ako všetky ostatné vedy. „Každá veda je užitá logika“.⁵⁰ V matematike je však táto aplikácia logiky oveľa nápadnejšia ako vo vedách iných. Niekedy sa dokonca vidí, že niektoré základné vzťahy matematiky a logiky splyvajú. Aj v logike aj v matematike napríklad platí úsudok: „Ak $a=b$ a $b=c$, potom $a=c$ “. Tento dojem ešte zvyšuje okolnosť, že logika aj matematika môže používať podobnú, ba do istej miery spoločnú symboliku.

Z tohto tesného súvisu a z takýchto podobností mohli vzniknúť nesprávne výklady podstaty matematiky. Preto sa matematici Hilbertovej školy nazdávali, že vytvorením axiomatického systému sa kvantitatívne vzťahy matematiky menia na čiste logické (a ešte k tomu *formálne logické*) vzťahy. Preto vyhlásili stúpenci logistickej matematickej školy (Russell a ostatní) matematiku za púhy odbor logiky a práve naopak niektorí stúpenci Brouwerovi logiku za odnož matematiky.⁵¹

Všetky takéto náhľady vznikajú z idealistického chápania matematiky, logiky, gnozeológie a vedy vôbec. Z tohto stanoviska by bolo možné vyhlásiť všetky vedy za odbor logiky⁵² alebo logiku či vôbec každú vedu za odbor matematiky.⁵³ Všetky vedy spolu vzájomne súvisia a všetky vychádzajú zo spoločného gnozeologického a logického základu.

19. Zo stanoviska dialektického materializmu sú všetky tieto problémy celkom jasné. Gnozeológia a logika tvoria základný celok, na ktorom budujú ostatné vedy, a naopak logiku a gnozeológiu je možné vybudovať len na základe vedeckého poznania reálneho sveta.⁵⁴ Matematika, práve tak ako všetky ostatné vedy, má svoj špecifický odbor, t. j. kvantitatívne vzťahy reálneho sveta, a nie je nič prekvapujúce, že vo svojom vystihnutí týchto vzťahov je v súhlase so všetkými ostatnými vedami a napokon aj s logikou a gnozeológiou — pravda, s logikou dialektickou a s gnozeológiou dialektického materializmu.

Pri zostavovaní určitého axiomatického systému je prirodzene možné zaradiť medzi axiomy aj určité logické pravidlá, podľa ktorých sa potom z axióm dedukuje.

⁴⁹ Tak sa napríklad vyjadruje Bavink (B. Bavink, *Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaft*, Leipzig 1933, 229).

⁵⁰ V. I. Lenin, *Filosofické sešity*, Praha, 1954, 167.

⁵¹ Všetky tieto omyly rozoberám podrobne v prvej kapitole svojej spomínanej knihy.

⁵² Takýto náhľad vyslovuje napríklad Carnap v svojej knihe *Der logische Aufbau der Welt*, Berlin, 1928.

⁵³ M. Landolt napríklad odvodzuje axiomy matematiky z fyzikálneho poznania sveta (*Grösse, Masszahl und Einheit*, Zürich 1943).

⁵⁴ Porovn. V. I. Lenin, *Filosofické sešity*, Praha 1954, 101.

No logika a gnozeológia aj tak zostávajú primárnymi. Práve k voľbe axióm, k voľbe základných pojmov aj k voľbe základných logických pravidiel vedú gnozeologické a logické dôvody, ktoré sú teda *pred* axiomatickým systémom a vôbec *pred* celou matematikou. Už samy najzákladnejšie pojmy matematiky — kvantita a vzťah — sú gnozeologickými kategóriami a matematika ich iba preberá. Preto tiež súdím, že sú márne pokusy definovať pojem čísla vovnútri matematického systému — číslo je, ako hovorí Engels, najčistejším vyjadrením kvantity a vysvetlenie tohto pojmu môže dať len gnozeológia. Matematika môže dať presné pravidlá, ako číslo používať a môže tak dať len akúsi *pracovnú* definíciu čísla. A to platí aj o ďalších najabstraktnejších, najzákladnejších pojmoch matematiky — o polohe a smere.

Záverom možno teda povedať, že matematika je v podstate v tom istom súvisi s gnozeológiou a logikou ako všetky ostatné vedy, hoci tento súvis je pre vysokú abstraktnosť matematiky jasnejší a nápadnejší ako v niektorých vedách druhých.

IV. ZÁVER

Pokúsil som sa zdôvodniť a rozobrať uvedenú definíciu matematiky a súčasne ukázať, že základy a podstatu matematiky je možné plne pochopiť iba zo stanoviska dialektického materializmu.

Nechcem tým, prirodzene, azda tvrdiť, že existujú akési dva druhy matematiky — matematika materialistická a idealistická; je však možné podstatu matematiky, jej základné pojmy a vzťahy aj jej súvis s gnozeológiou a logikou vykladať dvojakým spôsobom — materialisticky a idealisticky.

Idealistické pokusy však napokon vždy vedú do závozu — či už je to pokus vykladať matematické pojmy a vzťahy za púhu hru so symbolmi bez reálneho obsahu, alebo pokus vydávať matematické pojmy a vzťahy za apriórne, od skúsenosti neodvislé, či za niečo, čo nám je „vrodené“ alebo čo poznávame akousi viac-menej záhadnou intuíciou, alebo či je to dokonca pokus pozbaviť matematiku charakteru samostatnej vedy a urobiť z nej iba odnož logiky.

Jedine materialistická dialektická metóda môže objasniť, čo je podstatou a predmetom matematiky a môže ju správne zaradiť medzi ostatné vedy.⁵⁵

СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИКИ

Заключение

Математику определяю как науку изучающую самые общие количественные отношения реального мира.

Обосновывая и доказывая правильность этого определения, показываю сначала, что в математике действительно все построено всегда только на количественных отношениях. Даже самые элементарные понятия математики — число, положение, направление, форма — сохраняют в математике значение количественных отношений, и возникли они в головах людей в процессе общественного производства, так-как нужно было точно определить отдельные количественные отношения. Аксиоматический характер математики как будто бы скрывает этот характер количественного отношения, но даже аксиомы являются своим происхождением часто проверенными количественными отношениями. Правда, законченная аксиоматическая система позволяет нам забыть это происхождение до тех пор, пока систему не нужно восполнить или изменить.

⁵⁵ V kapitole o metóde matematiky v svojej spomínanej knihe dokazujem, že táto metóda nachádza plné uplatnenie aj pri vnútornom budovaní matematiky.

Несмотря на то, что сущностью математики является исследование количественных отношений, математика в состоянии выражать и качественные различия; а то таким образом, что она отмечает новые количественные отношения, которые неизбежно возникают при изменении качества.

Дальше анализирую процесс абстракции при помощи которой математики ищет самые общие количественные отношения. Доказываю, что это процесс диалектический, что математическая абстракция не обедняет понятия, но наоборот помогает глубже и правдивее определить и конкретные отношения реального мира.

В конце анализирую отношение математики к реальному миру. Стараюсь доказать, что понятия математики и их взаимные отношения взяты с реального мира; они благодарят своему происхождению способности человеческого ума понимать и выражать количественную дифференцированность реального мира. Эта способность развивалась исходя из практических потребностей человеческого общества.

Даже в тех случаях, когда математика как будто бы отрывается от реального мира, идет дальше непосредственного взгляда, она остается в связи с реальным миром. В таких случаях является непосредственным критерием правильности (например при употреблении комплексных чисел, кватернионов и неевклидовых геометрий) внутренняя логическая консистенция. Но внутренняя консистенция предполагает соглашение с определенными логическими законами а эти законы являются опять-таки много раз проверенным абстрактным отражением конкретных взаимоотношений реального мира.

Еще одним доказательством этой связи является возможность аппликации математики к реальному миру. Доказываю, что в ней нет ничего случайного или априорного; аппроксимативность этой аппликации объясняю из диалектики абстрактного и конкретного.

На конец исследую связь математики, логики, гносеологии и доказываю, что здесь существует такая-же связь, как у других наук. У математики свое специфическое содержание и нельзя ее сводить только к логике; но она исходит из определенных элементарных гносеологических и логических предпосылок, свои самые элементарные понятия берет она прямо на гносеологии.

В заключении утверждаю, что исключительно материалистический диалектический метод в состоянии изложить сущность математики, между тем как все идеалистические попытки приводят только в тупик.

THE ESSENCE OF MATHEMATICS

Summary

I define mathematics as the science investigating into quantitative relations of the real world.

In the analysis and logical foundation of this definition I demonstrate above all that mathematics actually deals always with quantitative relations. The fundamental ideas of mathematics themselves — such as number, position, direction, form — have in mathematics the significance of quantitative relations and arose in human mind at the process of social production as the result of the need to give exact expression to certain quantitative relations. The character of quantitative relations is seemingly hidden by the axiomatic structure and procedure of mathematics, but the axioms themselves are in most cases nothing else but quantitative relations proved by experience. The axiomatic system as a whole, however, makes us forget its origin as long as there is no need to complete or change the system.

The very essence of mathematics being the research of quantitative relations, this science doesn't fail to comprise also qualitative differences. In doing so mathematics states the new quantitative relations necessarily established with the change of quantity.

Then I treat the process of abstraction, whereby mathematics seeks to find the most general quantitative relations. I prove that this is a dialectical process, that by mathematical abstraction ideas do not become poorer, but in the opposite, by the aid of this process of abstraction the actual relations of the real world are comprehended more profoundly and with greater veracity.

Finally I treat the relation of mathematics to the real world. I prove that the ideas of mathematics and their relations are modelled according to the real world. They arose due to the capacity of human mind to comprehend and express quantitatively differentiated state of the real world. This capacity developed in men as a result of the urgent need of human society.

Also where mathematics seems to separate from the real world, and somehow transgresses the horizon of immediat insight, it remains in close connection with reality. In such cases the immediat criterium of its exactness (as e. g. in the application of complex numbers, quaterniones, and of non-euclidean geometry) lies in its immanent logical consistency. Logical consistency, however, means accordance with certain laws of logics, the latter being many times verified abstract expressions of actual relations in the real world.

Further evidence of this connection is the applicability of mathematics to reality. I prove that there is nothing accidental nor any element a priori; the approximativity of this application can be fully explained by dialectics of the abstract and the concrete.

In the end I examine the relations between mathematics, logics and epistemology. This relation — so I conclude — is the same as with other disciplines. Mathematics has its specific contents and cannot be reduced to logics; it is based, however, on fundamental gnoseologic and logical premises. The most fundamental ideas of mathematics are taken directly from the sphere of the epistemology.

I close by stating that only the method of dialectical materialism is able to explain clearly the essence of mathematics, while all idealistic experiments finally prove to be failures.