

LOGIKA A JEJ METÓDY

I. Pojem a metódy logiky

1. Ú v o d

Riešiť problém metódy logiky znamená predovšetkým riešiť problém možnosti, prípadne i nevyhnutnosti viacerých logík. Môžeme to robiť noeticky a čisto logicky.

Každý filozofický systém si musí vystavať svoju vlastnú logiku. Ak rozličné systémy majú spoločnú logiku, tak to, v čom sa rozchádzajú, je logikou nezachytené, t. j. systémy sú čiastočne nelogické, alebo postupujú žitou a neuvedomenou logikou.

Noetická požiadavka množstva logík je samým logikám bezprostredne vonkajšia, je teda regulatívnym metodickým kánonom, ukazujúcim, aké musia byť logiky, aby odpovedaly noetickému momentu poznania, teda aby boli formou, ktorou sa sjednotí čím viac poznatkov. Tak chápané logiky sú formálnou stránkou noetiky.

Logická požiadavka viacerých logík vychádza z potrieb logiky samej. Keby jestvovala len jedna logika, ako musí tvrdiť každý absolutistický racionalizmus, musela by sa rozprestierať na každý možný poznatok, bola by v svojej platnosti neohraničená, absolútna. Ňou by sa muselo vyjadriť všetko, čo sa vôbec vyjadriť dá. Ak tvrdíme, že takto koncipovaná logika nie je možná, musíme dokázať, že vedie k samozničeniu a že nesrovnalosti v nej sa odstránia prijatím množstva logík, ktoré sa k sebe radia stupňom bohatstva, t. j. možnosťou slúžiť väčšiemu množstvu poznatkov. Logiky sa množstvom relativizujú, obmedzia svoju platnosť alebo možnosť slúženia na určitý okruh, vylučujúc iné okruhy.

Keď sme sa vyhli logickému monizmu, nesmieme upadnúť ani do logického pluralizmu. Pluralizmus by tvrdil množstvo logík v úplnej izolovanosti, nemajúcich k sebe nijaký vzťah. Takéto logiky sú medzi sebou nevyjadriteľné a nemôžeme sa ani pokúsiť ukázať ich vnútornú koherenciu, čím sme vždy v nebezpečenstve, že pracujeme so zakukleným chaosom.

Netvrdíme, že logiky, vystavané podľa noetických požiadaviek, sa musia kryť s množstvom logík, vzniklých zo snahy odstrániť anti-

nomie absolutistickej logiky. V skutočnosti ani jedna logika nie je absolutistická. Je možné len zabsolutizovanie niektorej logiky, čím k nej pridáme niečo, čo k nej nepatrí. V tom prídavku je spor. Ak logiky nie sú absolutistické, tak celá naša sústavba logík, plynúca z dôkazu relatívnosti niektorej logiky, bude tiež relatívna a dva relatívne okruhy (okruh logík stavaný logickými požiadavkami a okruh stavaný noetickými požiadavkami) sa nemusia kryť. No tieto dva okruhy majú tendenciu vzájomného splynutia nielen preto, že sú to disciplíny, vyrastajúce z dvoch aspektov toho istého poznania a tej istej základnej požiadavky ducha zmocniť sa reality, ale i preto, že nielen v noetike sú momenty, chcjúce odstrániť relativitu, ale v samej logike sú požiadavky, smerujúce k absolútnosti a či k úplnej všeobecnosti. Prejavuje sa to v tom, že každá logika sama nám ukazuje na niečo, čím ona nie je, čím súčasne prekračuje svoju obmedzenosť a ukazuje skrytú tendenciu nášho poznania k absolútnej logike. Preto nepripúšťame ani logický konvencionalizmus, ktorý sa končí l o g i c k ý m nihilizmom.

Problém sa nám rozpadáva na viac častí. Obsahuje súvis relativity logiky s relatívnosťou ľudského poznania, čo sa zasa neobíde bez bližšieho objasnenia pojmu logiky, ktorá sa porozumie jej metodickou výstavbou. Pri výstavbe logík uvidíme, že každá logika sa musí opierať o inú logiku, čím i požaduje jej jestvovanie.

Začnime pokusom o definíciu logiky a po preskúmaní možných metód pristúpime k technickej výstavbe. Nerobíme si nárok na úplnosť. Už preto nie, že budeme postupovať veľmi parciálnou metódou a že nebudeme vstupovať do detailov, čo by si vyžiadalo viac miesta. To znamená, že naša štúdia nebude vyčerpávajúca a bude poznačená tým provizorizmom, ktorý zafažuje každý ľudský pokus. Je smutné, keď sa to musí pripomenúť práve pri logike, ale je ešte smutnejšie, keď úplne relativistické systémy užívajú logiku absolutisticky a považujú ju za absolútnu.

Logika sa obyčajne definuje ako veda o zákonoch myslenia. Ak odhliadneme od mimologického významu logických zákonov, môžeme tvrdiť, že logika je veda, určujúca pravidlá koherencie, ba že je komplexom koherencií, súhrnom možných spôsobov shôd myslenia s ním samým. A pretože každá koherencia, čeliaca chaosu, neprehľadnosti a nejasnosti, ba i samej možnosti neprehľadnosti, je určitým druhom poriadku, preto logika bude rozvinutím myšlienkového poriadku, zúčastneného na každom poznaní, a teda rozvinutím všetkých možných typov a štruktúr (schém) mysliteľných poriadkov a ich vzájomných súvislostí. Poriadok je vždy medzi niečím a v niečom. Logika neskúma poriadky, jestvujúce medzi niečím, ale len poriadky samy,

t. j. súhrn vzťahov, ktoré sú medzi tým, čo voláme niečím. Ak naše niečo je znova poriadok („v niečom“), nezaujímajú nás členy poriadkom sjednotené a usporiadané, lebo tieto, ak poriadok má mať noetický a životný význam, sa môžu meniť bez zmeny samého poriadku. Logika skúma, lepšie povedané, logikou sa vyjadruje len štruktúra, vzájomné vzťahy medzi členmi poriadku a vzťahy, ktorými členy plynú z poriadku a či z určitého syntetického celku. Že tieto dva druhy vzťahov sa vzájomne odzrkadľujú, plynú z jednoty celku, teda z toho, že „člen“ poriadku je možný len zaradením sa do celku. Vzťahy medzi celkom a členmi a medzi členmi samými nám ukazujú vzájomné viazanie členov a tým spôsob prechodu od jedného člena k druhému, možnosť uzatvárania z... na... a či nasledovania voľného z voľného. Majúc na mysli všeobecnosť celku, nemôžeme si všimnúť determináciu členov celkom, ale len rozličné spôsoby a možnosti plynutia, prechodu a uzatvárania. Spôsobom „nasledovania z...“ je teda určený celý poriadok a tým pochop logiky. Tieto dva pochopy pokladáme za totožné a logiku pokladáme za vyjadrenie spôsobu nasledovania z... Preto „ak pre nejakú reč (logiku) určíme pochop ‚dôsledok‘ (konzekvencie), určili sme tým všetko, čo môžeme povedať o logických vzťahoch v tejto reči.“¹ Tým sme určili i metódu logiky. Metóda logiky je postup, realizovanie pochopu „dôsledku“, ktorý sa neodlišuje od samej logiky. Lebo ak i výstavba a či metóda disciplíny musí byť logická, potom ak by sa logika líšila od svojej metódy, líšila by sa sama od seba.

Ak sa logika zaoberá len rozličnými spôsobmi transformácie, tak nielen že transformačnými pravidlami sa určujú i formačné zákony, t. j. určením transformačných možností ustáľujeme i niektoré vlastnosti členov, umožňujúce im dostať sa do daného poriadku, ale logika stráca samostatný charakter. Logika nie je disciplína v pravom slova smysle, nie je v e d o u, ktorá niečo hovorí, ukazuje, dokazuje a poučuje, je len t o, č í m sa niečo hovorí, dokazuje a poučuje, je metódou a n u t n o u f o r m o u každej disciplíny. Je teda operatívnou schémou, čiže má inštrumentálny charakter. Inštrumentálnosť logiky znamená, že logika, keďže má skúmať, ale najmä vedome aplikovať zákony myslenia, nesmie sa vytrhnúť z celku myslenia, nie je teda autonómna, ale má v myslení určitú úlohu, danú samým celkom myslenia. Z toho plynie, že hovoriť o logike, keďže ň o u hovoríme o všetkom, je pomerne ťažko. Hovorení o logike často nebýva logikou, ale nadradenou vedou, metalogikou. Tým však predpokladáme viac logik. Preto možnosť chápania logiky ako predmetu úvah je daná

¹ R. C a r n a p, *The logical syntax of language*, London 1937, 168.

len množstvom, t. j. nedokonalosťou našich logických systémov. Ak sú totiž logiky zúžené na určitý okruh typov poriadkov, tak ich obmedzenosť poznáme len na pozadí širšieho systému, ktorý nám tým hovorí o prvom systéme, t. j. je metalogikou našich logík. Keby sme o logike chceli povedať niečo ňou samou, nemohli by sme to o nej povedať ničím, čím ona nie je, t. j. nič by sme o nej nepovedali. Inštrumentálnosť logiky ukazuje, že logika nie je v sebe uzavretým celkom, ale je celá orientovaná mimo seba, k inej logike alebo k obsahovému poznaniu. Ak má logika nutný vzťah k celku poznania, nevyhnutne prijíma vlastnosti a osudy poznania. Ľudské poznanie skutočnosti je nedokončiteľné, nedokončiteľná bude i logika. Nedokončiteľnosť poznania nie je to isté, čo nedokončenosť a nutne obsahuje metaempirické prvky k dôkazu; znamená provizórnosť, t. j. relatívnosť nášho poznania. Provizórnosť, predbežnosť sa nedá pochopiť bez tendencie k nepredbežnému, k absolútnemu poznaniu, preto ak k a ž d é naše poznanie je relatívne, n e c e l é naše poznanie je také, čo sa musí odrážať i na logike. Nedokončiteľnosťná logika znamená množstvo logík, nástrojov, usporadujúcich poznatky, ktoré sa postupom poznania budú vymieňať. Mohol by síce niekto namietat, že na nové poznania môžeme aplikovať staré nástroje a schémy; ale staré schémy nám niečo z nového poznania neusporadujú a neregistrujú. Ak chceme zachytiť i zvyšky, musíme to urobiť novým modifikovaným pochopom „dôsledku“. Ako naše pochopové poznatky o veciach nie sú raz navždy určené, ale sa stále menia, modifikujú, t. j. majú akýsi plynulý, elastický charakter, tak to musí byť i s ich formálnou sieťou; ani tá nesmie byť ustrnulá, ale sa musí neustále modifikovať a meniť svoj tvar. No bude nám niekto znova namietat, že od staroveku veda urobila ohromné pokroky a predsa naša logika je logikou starých. K tomu len toľko poznamenáme, že objavy a veda postupovali logikou, ktorá bola žitá a nedostala sa do kníh. Ako veľmi sa zmenila logika, vidieť až z niektorých nových pokusov o jej konštrukciu. „Nová logika“ vzniká i malou zmenou, napr. zmenou jednej vlastnosti členov, lebo ak v celku niečo zmeníme, má to vplyv na všetko v celku, teda i na transformačné pravidlá. A pretože sa do poriadku dostala nová vlastnosť členov, zmenia sa i formačné pravidlá. Preto prechod od logiky k logike môže byť skoro plynulý.

Z nedokončiteľnosti logiky nasleduje, že ani jedna logika nie je adekvátnym inštrumentom, ale len aproximatívnu schémou, svojou složitosťou alebo jednoduchosťou viac alebo menej registrujúcou poznatky. Všetky naše logiky sú sieťou, ktorou poznávajúcemu vždy niečo unikne. Mohli by sme sa teda nazdávať, že ak logika je len aproximatívna, nie je ani istá. A predsa každý považuje logické poznanie

za isté a analytické. Ako spojíme analytickosť s aproximativnosťou? Len správnym pochopením logiky. Logika je nástrojom, ale z povahy nástroja plynie, že sa musí brať celý. Preto logiku musíme chápať ako celok, v ktorom jedno plynie z druhého a od jedného člena sa dostaneme k druhému tým, že sú členmi celku. „Plynutím“ sa definuje analytickosť. Spojenie (veta) je analytická, ak nasleduje z hocíjakých členov (viet). Celok predpokladá niečo určitého, ukončeného; sú to všetko výrazy, úzko spojené s pochopom istoty. Celok, ktorý by bol neurčitý, nedokončený, mierou neurčitosti by prestával byť celkom. Pochop analytickosti platí len medzi členmi celku, teda v celku. A preto logiky sú dokončiteľné a analytické, logika však je nedokončiteľná, lebo stále sa budú hľadať nové logiky, nové celky a operatívne nástroje, ktorými sa lepšie spracujú a sjednotia nové poznatky vied. A všetky tieto čo ako rozdielne logiky budú analytické, lebo analytickosť nie je pochop, vzťahujúci sa na logiku ako celok, ale len na vnútro logiky, preto platí len v jednotlivých logikách, je teda tento pochop relatívny ako relatívne sú i logiky. Analytickosť je i n t r a s y s t é m o v ý pochop, hovoriaci, že v danom celku prechody, plynutia a odzrkadľovania sú také... a také... a že tam panuje nutnosť, reprezentovaná koherenciou. Ale či sám celok je nutný, to v danom celku a daným celkom nemôžeme rozhodnúť, lebo to by znamenalo zaradiť logiku do širšieho celku, z ktorého plynie, čiže v ktorom by bol časťou, výrazom jednej složitej analytickej vety. Pretože logiky ako celky nemôžu byť analytické, môžu byť len induktívne a navodzované induktívnou činnosťou, t. j. vývinom ostatného poznania. Z toho nasleduje i to, že logika nie je čisto formálna, lebo má sama sebou a nie našou konvenciou nejaký vzťah k obsahovému poznaniu. Ak by logika bola čisto formálna, potom všetko okrem symbolov, teda i text ich objasňujúci, by nepatrilo do logiky a logika by sa stala komplexom formuliek, o ktorých by nikto nevedel, čím vlastne sú. Uzavretím sa do seba strácala by vnútorný kontakt s oblasťami, na ktoré sa aplikuje a ktorými sa dokazuje jej koherentnosť.

Vývin v poznaní nie je možný bez niečoho stáleho, lebo potrebuje zákony, ktoré ho jednotia. Prejavuje sa to snahou každej logiky prekonať svoju provizórnosť, t. j. v množstve logík sa zaradiť čím bližšie k ideálu adekvátneho inštrumentu. Preto všetky vedecké logiky¹ budú podliehať zákonu, udávajúcim im smer a smysel, čiže budú podliehať novej logike, ktorej budú členmi a ktorou jedna bude prekonávať druhú, čím sa stanú provizórными. Poznať túto najvyššiu logiku, ktorú, keďže je kánonom vedeckých logík, nazveme metavedec-

¹ Tieto relatívne a partikulárne logiky nazývame preto vedeckými, lebo i vedecké poznanie je relatívne.

kou, znamenalo by poznať vzťahy medzi vedeckými logikami a spôsob nasledovania jednej po druhej, čo by umožňovalo predvídanie vedeckého vývinu, keďže z vedeckých logík sa dá uzatvárať na vlastnosti vied. No my nepoznáme metavedeckú logiku v jej konkrétnosti a vieme o nej len toľko, že dáva poznaniu charakter vývinu k adekvátnejšiemu zachycovaniu a „mapovaniu sveta“. Preto naše logické skúmania nemôžeme začať metavedeckou logikou. Ona bude nevyhnutne vplývať na náš výskum, ale len ako žité, celkom sa neuvedomujúce, tobôž nesystematizované pozadie. A predsa povaha logiky svojím analytickým charakterom by si požadovala práve tento postup. No naše nedokonalé poznanie zapríčiňuje, že logické požiadavky sa musia uspokojiť analytickým postupom v určitých celkoch, o ktorých sa už nemôžeme logicky vysloviť, teda ktoré už nemôžeme vyanalyzovať zo širších poriadkov, čím narážame stále na mimologické oblasti. Keď zlogizujeme jednu oblasť, stretneme nové polia, ktoré ešte nepatria do jednoty foriem nášho poznania. Ľudské poznanie by sa zakončilo, keby sa žitá metavedecká logika stala poznanou a vyjadriteľnou (sama sebou), čím by sa akosi sotrel rozdiel medzi obsahom a formou.

Doteraz sme skúmali „dejinnú“ relativitu logík a nutnosť ich modifikácie. Ale i logiky, ktoré by mali byť adekvátnym inštrumentom dnešného skutočne celého vedeckého poznania, sú poznačené určitým stupňom relativity, čo sa prejavuje i tým, že tieto adekvátne logiky doteraz nejestvujú. Veď ani „klasická“ logika, logika klasifikácie, vystavená len na pochope „subsumpcie pod . . .“, nie je doteraz celkom dokončená a pre jej obrovskú rozlohu niet nádeje, že sa tak rýchlo dokončí. Ale klasifikačné myslenie je pomerne len nepatrnou časťou celku myslenia, ktorú by sme mohli dať do súvisu s kategóriou substance a kvality.¹ Okrem tejto logiky jednej kategórie, všímajúcej si len určitý moment určitého poriadku, máme logiky, všímajúce si iné poriadky, ako napr. relacionalitu a v nej napr. len vzťah „pred . . . za . . .“, ktorým sa dá vybudovať veľmi rozsiahla topologická logika. Klasifikačná logika sa javí ako jeden z najspeifikovanejších prípadov tejto novej logiky. Ale ani týmito logikami sa nevyčerpajú všetky možné poriadky. Nespomínali sme celky, v ktorých prichádzajú do úvahy pochopy kauzality, finality, nutnosti, možnosti, pravdepodobnosti atď. Ak si uvedomíme, že zavedením jedného z týchto pochopov do logiky zmeníme celú logiku, tak sa nám vytvára matný obraz obrovského množstva logík, ktoré sú jednoducho nezvládnuteľné. Musíme sa uspokojiť niektorými logikami.

¹ F. Orestano, *Nouvelles vues logiques*. Travaux du IX. congrès internat. de ph. VI, Paris 1937, 66 n.

Ako potom postupujeme?

Samozrejme, že analytickou metódou, ktorá jediná je logickou metódou, lebo je aktualizovaním pochopu „dôsledok“.

2. Analytická metóda

V analytickej metóde udáme tvar a spôsob základných vzťahov prvkov a spôsob operácií s prvkami. Pretože operovať s prvkami môžeme len podľa ich tvaru, tvar môžeme vyčítať z operácií, t. j. operáciami je definovaný tvar prvkov. Opačný postup je spojený s určitými teoretickými ťažkosťami. Prvok je teda definovaný svojou vlastnosťou, uschopňujúcou ho zaradiť sa do poriadku, t. j. vstúpiť do operácie, bez zmeny operácie. Ak spôsob operácie určuje spôsob dosadzovania členov do nej, potom pochop „substitúcie“ sa stáva pochopom systémovo ekvivalentným s pochopom „dôsledok“. Substitúcia je však možnosť dosadenia do „premennej“. Preto je substitúcia ekvivalentná s premennou. Určiť povahu premennej znamená ustáliť, čo sa môže a čo nie do premennej dosadiť a do čoho v premennej, čím rozoznávame konštantné a premenné aspekty v samej premennej a nimi je určený spôsob operácie a tým celý logický systém. Preto k výstavbe logiky stačí dobre poznať pochop premennej.

Ostatné metódy, o ktorých sa myslelo, že sa nimi dajú vystavať logiky, sú alebo len špecifikáciou analytickej metódy, alebo vedú k nekoherenciám. Zaraďujú logiku na rovinu ostatných disciplín, čím sa logických problémov vlastne ani nedotýkajú. Platí to o čisto algebraických, axiomatických a maticových metódach.

Algebraická logika a či algebra logiky považuje pravidlá rozumného poznania za pravidlá algebry, ktorej premenné sú obmedzené na čísla „0“ a „1“ a ktoré sú logicky interpretované.¹ I keď odhliadneme od toho, že tým sa vystavia len dvojhodnotová logika a že pri viachodnotových logikách algebraická logika zlyhá, metóda predsa nie je bezchybná, lebo ak algebra musí byť logicky interpretovaná, je to znakom, že logika nie je algebrou. Algebra sa totiž nedá a nemusí sama sebou interpretovať. Preto algebra logiky sa nedotýka logických problémov a my sa pýtame, čo to znamená *l o g i c k y*, t. j. logikou niečo interpretovať. Aby sme mohli odpovedať, museli by sme mať už vystavanú logiku.

Ani čisto axiomatická metóda nemôže byť logická.

Axiomatická metóda pozostáva v tom, že z niekoľkých základných, vždy platných spojení prvkov (viet), pomocou deduktívnych

¹ C. Lewis — C. Langford, *Symbolic logic*, New York 1932, 12.

pravidliel odvodíme ďalšie platné spojenia. Pôsobí to dojmom, ako by logika bola systémom spojení ako iné deduktívne vedy a ako by sa uprednostňovali axiómy, od ktorých by boli pravidlá dedukcie nezávislé. Podobné chápania sú nesprávne, lebo i axiómy i pravidlá dedukcie sú časťami jedného celku, v ktorom, vyjdúc od hociktorého člena, dôjdeme k hociktorému inému spôsobom, ktorý určuje celok. Nezáleží teda, ktoré spojenia si vyberieme za základné. Podľa povahy systému sa špecifikujú nielen axiómy (analytické vety, tautologie), ale i spôsoby prechodu a či pravidlá dedukcie. Inštrumentálnosť logiky spôsobuje, že sa v nej nekladie dôraz na uzatváranie z a x i ó m , ale na s p ô s o b y u z a t v á r a n i a , teda na uzatváranie samo, čím axiómy strácajú samostatnosť a stávajú sa len špecifikáciou, spôsobom a f o r m o u uzatvárania. To treba mať na mysli, keď z metalogických dôvodov chápeme logiku axiomaticky, aby sme dokázali neprotirečiteľnosť niektorých jej častí. Ale i vtedy musíme chápať axiomatickú metódu len ako fragment analytickej metódy.

Môžeme si pritom počínať asi takto:

Pri analytickej metóde sme vychádzali priamo zo zákonitosti celku, javiacich sa v transformačných pravidlách. No z jednoty celku plynie, že stačí udať niektoré pravidlá a niektoré členy, aby sme mohli uzatvárať nielen na nové členy, ale i na nové pravidlá prechodu, čím je celok implicitne definovaný a axiomatická metóda sa stáva druhom analytickej metódy.

Okrem týchto metód poznáme ešte celé množstvo spôsobov, ako sa priblížiť aspoň k niektorým častiam logík. Tieto spôsoby, ak sa chceme vyhnúť chybám algebraickej logiky, musíme chápať ako spôsoby postupu, t. j. ako fragmenty analytickej metódy. Pretože ešte nemáme vystavanú logiku skutočne celého dnešného poznania, sme odkázaní na syntetické metódy, usilujúce sa aspoň mozaikovo (organicky je to sotva možné) pospájať viac logík. Odtiaľ pokus slúčiť extenzionálne logiky s intenzionálnymi a topologické doplniť metrickými. Nemôžeme tu podať presnú definíciu extenzionality, ale poslužíme si nepresným opisom. Extenzionálne logiky neskúmajú smysel a vzťahy medzi smyslami a významom jednotlivých prvkov. Tieto logiky musia byť doplnené intenzionálnymi, skúmajúcimi i vzťahy medzi smyslami prvkov, lebo nemôžeme predpokladať, že by základné spojenia a funktory boli celkom bez smyslu; vtedy by sme ani nevedeli, že sa od seba líšia,¹ čo by nám zabráňovalo vystavať hocikakú logiku. Všetky pokusy, vychádzajúce priamo z klasickej logiky, chce-

¹ J. J ö r g e n s e n , *Über die Ziele und Probleme der Logistik*, Erkenntnis II, 1931, 93.

júce vystavať nové celky vynechaním niektorých jej zákonov, pokladáme za parciálne modely dvojhodnotovej logiky.

Jednou z metód extenzionálnej logiky, nie práve najlogickejšiou, ale najnázornejšiou, je m a t i c o v á m e t ó d a. Ujasníme si najprv pochop tejto metódy a potom ňou vybudujeme niekoľko systémov.

3. Maticová metóda

Čisto maticová metóda má práve také nedostatky ako algebraická, no predsa ju môžeme za určitých okolností chápať ako špecifickú analytickú metódu.

Maticová metóda je analytická metóda n -hodnotovej logiky, v ktorej sa interpretácia zavedie hneď na začiatku definitoricky a v ktorej sa každá funkcia určuje maticou a či tabuľkou, určujúcou hodnotu spojenia hodnotami prvkov. A pretože ju chceme chápať analyticky, musíme v nej vychádzať z počtu matíc, vyčerpávajúcich určitý celok. Počet matíc plyní z počtu hodnôt prvkov, pospájaných všetkými možnými spôsobmi, ktorý počet nám určuje i „prechod od...ku...“, teda povahu operácií a tvar prvkov. Vyčerpanie všetkých možností nám zaručuje všeobecnosť, nutnosť a analytickosť logických spojení v danom poriadku. A pretože si vyberáme len určitú jednu metódu a ňou chceme (a môžeme) konštruovať len určité logiky, premenná, ktorá bude reprezentovať tieto logiky, bude mať konštantné momenty, pozostávajúce v danej definícii hodnôt a ich množstva. Počtom a spôsobmi kombinácií hodnôt prvkov medzi sebou, t. j. počtom možných foriem spojenia sme určili funkcie a funktory a tým sme určili i funkcie vždy platné, t. j. logické zákony, reprezentujúce celý systém. Tým sme i ukázali, že tvar premennej určuje celý logický systém. Ale i pri maticovej metóde sa stretávame s ťažkosťami, ktorým musíme urobiť ďalšie ústupky. Logika je tým lepším nástrojom, čím je všeobecnejšia, čím viac možností obsahuje, slovom, čím je premennejšia premenná, ktorá ju reprezentuje. Preto, ak by sme chceli pokračovať celkom v duchu analytickej metódy, museli by sme začať vyčerpaním všetkých, teda neohraničených možností a každú ohraňovanú maticu pokladať za výsledok eliminácie premenných z ešte širších matíc. Pretože tento ideál je ťažko uskutočniteľný, logiky nikdy nebudú môcť byť úplne preštudované a symbolizované, teda ani formalizované. Musíme sa uspokojiť nie logikou, ale niektorými jej substitúciami, ktorých premenná má čo možno najširší premenný moment, ktorým sa dívame k nedosažiteľnému cieľu. Takto chápaná logika by bola teda len jedna, ale je n e v y s t a v i t e ľ n á terajším ľudským poznaním. Je len ideálom, ako je ideálom jeden vedecký svetonáhľad. Preto potre-

bujeme mnoho logik, lebo len prekonaním mnohosti sa dostaneme k jednote. Aby sme sa čím menej odchyľili od ducha logiky, mali by sme začať skúmať najširšiu nám známu logiku a substitúciami sa bližšie k užším, špecifickejším poriadkom, t. j. mali by sme začať topologickými logikami a zavedením metriky mali by sme topologické systémy špecifikovať. Z psychologických dôvodov si volíme opačný postup. Začneme najšpecifikovanejším poriadkom a odstránením substitúcií, t. j. konštantných aspektov premenných, sa dostávame k širším logickým poriadkom. Dokázať nemožnosť logického absolutizmu a pluralizmu samou logikou nie je možné bez jej výstavby. Preto výstavba logík je prípravou a vnútorným momentom nášho postupu.

II. Výstavba logík maticovou metódou

Ak sa logika nelíši od svojej metódy, potom čo nie je v metóde, nie je logické. Postupujeme však len parciálnou metódou. Tieto dve veci musíme na začiatku zdôrazniť, aby sa naše vývody nechápaly „proti pravidlám z d r a v é h o rozumu“.

1. Z á k l a d n é p o j m y

Maticová metóda predpokladá množinu prvkov, ktoré sa môžu vzájomne rozličným spôsobom spájať, čím zo svojich postáv, ktoré voláme základnými, tvoria rozličné základné útvary. Možnosti spájania sa zmnožia, ak prijmeme nové možnosti menenia a kombinovania tým, že možnosti zmeny priradíme jednotlivým prvkom, čím vstupujeme i do nového poriadku. Princíp rozšírenia možností menenia sa, t. j. vlastnosť, ktorou jednotlivý prvok môže rôzne vystupovať a akosi sa „samomeniť“, voláme h o d n o t o u a poriadok tým vzniklý nazveme hodnotový a či logický poriadok. Hodnota je teda stupeň voľnosti objavovania sa tých istých prvkov v rozličných stálych vlastnostiach a či počet možností jednotlivých prvkov, ktorý sa stálosťou odlišuje od základných možností prvkov určitého logického poriadku. Lebo hoci v danom poriadku množstvo spájajúcich sa prvkov je premenlivé, voľnosť každého prvku je stála.¹ Stálosťou voľnosti prvkov sú logické poriadky jednoznačne určené. Ak prvok nadobudne väčšiu alebo menšiu voľnosť, t. j. ak sa stane členom iného poriadku, stáva sa i iným prvkom. Preto je nesprávne tvrdiť, že naše

¹ Sú mysliteľné logické poriadky s premenným počtom hodnôt. Naše logiky by vznikly z nich substitúciou pevnej množiny hodnôt do ich hodnotovej premennej. Potom by sme museli i hodnotu inak definovať.

obyčajné (dvojhodnotové) vety sa môžu stať i trojhodnotovými útvarmi. Ak zničíme dvojhodnotovosť viet, zničili sme vety a zaviedli sme celkom nové logické entity.

Prvok, vystupujúci len v jeho základnej postave, môžeme považovať za jednohodnotový, lebo má len jednu možnosť, totiž tú, ktorou je základom. A pretože inú možnosť už nemá, stupeň jeho voľnosti bude nulový. Ak prvok okrem prvej možnosti má i inú možnosť vystupovania, bude dvojhodnotový a jeho stupeň voľnosti jednotkový. Niet príčiny zastaviť sa pri dvoch hodnotách; naopak, postupujúc našou metódou, vidíme, že sme len na začiatku. Aby sme si všimli všetky možnosti, nesmieme vynechať prvky s dvoma stupňami voľnosti, čím vstupujeme do trojhodnotovej logiky; a tak pokračujúc, dostaneme sa až k n -hodnotovej logike, kde $2 \leq n \leq N_0$, ktorá bude mať $n-1$ stupeň voľnosti. Môžeme to robiť tak, že v dvojhodnotovom prvku „inú možnosť vystupovania“ (druhú hodnotu) a či nový stupeň voľnosti pokladáme za sumárne označenie, skrývajúce určitý stupeň voľnosti, že totiž tá druhá možnosť nemá nulový stupeň voľnosti, čím dôjdeme k viachodnotovej logike vidlanovitým spôsobom.

Hodnoty označujeme číslami: 0, 1, 2, 3, ..., n , alebo zlomkami medzi „0“ a „1“; teda 0, $\frac{1}{2}$, 1; 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1; a v n -hodnotovej logike 0, $1/n-1$, $2/n-1$, ... 1. Prvky označujeme písmenami zo začiatku abecedy: „a“, „b“, „c“, ...

Toľko stačí na predbežné určenie logického poriadku, čím chceme povedať i to, že logický poriadok chápeme precízne, a preto z neho vylúčime všetky prvky, ktoré nie sú v ňom obsažené. To znamená, že prvky patria do logiky len svojou hodnotou; obsahom len natoľko, nakoľko obsahy (prvky a, b) zväčšujú rozličné možnosti kombinácie hodnôt, t. j. nakoľko má hodnota nutný vzťah k obsahu. Náš logický poriadok, ako to ľahko vidieť z jeho precízneho charakteru, je omnoho širší ako logický poriadok „obyčajného chápania“. Nielen že sa neobmedzujeme dvojhodnotovosťou, ale do úvah nevstupujeme s množstvom predpokladov, javiacich sa v určení povahy prvkov a ich vlastností (hodnôt). Niektorým je prvok výpoveďou, vetou, súdom, prípadne i pochopom, hodnoty sú im pravda — nepravda. Iní ako napr. *Reichenbach*, za prvok považujú až rad výpovedí a hodnoty za pravdepodobnosť! Všetky tieto logiky sú málo všeobecné a sú len niektorými zo zvláštnych prípadov možných modelov logík, t. j. sú len niektorými zo substitúcií opravdivej logiky, ktorá má za prvky ľubovoľné predmety, „etwas“, „entities“, ¹ ozaistné premenné

¹ P. Weiss, *Two-valued logic, Another Approach*, Erkenntnis II, 1931, 244 a Whitehead - Russell, *Principia mathematica* I, 2. vyd., Cam-

symboly niečoho a teda hocičoho, a za hodnoty ľubovoľné vlastnosti. Veď ako by inak logika mohla byť základnou vedou, dávajúcou podmienky a rámec každému poriadku a každej vede.

2. Základné zákony

Z n -hodnotového poriadku plynie, že každý prvok má n -možností, t. j., že sa môže objaviť alebo v jednej, alebo v druhej, alebo ... v n -tej možnosti, že môže mať hodnotu alebo „0“, alebo „1“, alebo „2“, alebo ... n . Túto vetu, platnú pre všetky systémy, nazveme zákonom možnosti alebo zákonom hodnot. Z neho plynie iný zákon, že každý prvok n -hodnotového poriadku môže mať síce hodnotu „0“, alebo „1“, alebo ... n , ale nemôže mať hodnotu $n + 1$, lebo táto v n -hodnotovej logike nejestvuje. Preto ju musíme z n -hodnotovej logiky vylúčiť. Zákon, vyjadrujúci túto vetu, nazveme zákonom o vylúčení $n+1$ hodnoty v n -hodnotovej logike.

Ak tieto dva zákony aplikujeme napr. na dvojhodnotovú logiku a ak prvky nazveme vetami, aby sme sa viac priblížili k obvyčajnému chápaniu logiky, ich hodnoty pravdou a nepravdou, t. j., ak vykonáme tri substitúcie v n -hodnotovej logike, tak spomínané dva zákony prejdú v známe princípy neprotirečenia a vylúčenia tretieho. V dvojhodnotovej logike každá veta má len dve možnosti; alebo je pravdivá (má hodnotu „1“), alebo je nepravdivá (má hodnotu „0“). A pretože v dvojhodnotovom poriadku viac možností nejestvuje, tretia hodnota je vylúčená. Je samozrejmé, že v trojhodnotovej logike nemôže platiť zákon o vylúčení tretieho, lebo práve tretia hodnota patrí do počtu možností každého trojhodnotového prvku. V nej platí zákon o vylúčení štvrtého.

Niekoľko môže namietaf, že nerozoznávame zákon o vylúčení tretieho od zákona dvojhodnotovosti, tvrdiaceho, že každá výpoveď pripúšťa len dve hodnoty.¹ Neskoršie uvidíme, že tieto zákony nie sú ekvivalentné len v čisto maticovej metóde. Ak však maticovú metódu chápeme ako časť analytickej metódy, nevidíme dôvody nestotožniť obidva zákony, ako to robí i Červenka,² ale nevidíme ani dôvody, prečo by princíp neprotirečenia musel byť princípom každej logiky.

bridge 1925, tiež hovoria, že za premenné môžeme dosadiť „any set of entities“ (str. 4), ale hneď nato zúžia okruh premenných na vety. Z toho vidno, že vety sú len substitúciou do „any object“.

¹ Z. Zawirski, *Über das Verhältnis der mehrwertigen Logik zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *Studia philosophica* I, Lwow 1935, 418.

² J. Červenka, *K problému logiky o více hodnotách*, *Česká mysl* XXXVIII, 1945, 112 (citujeme zo separátneho výtlačku).

Neodvrhujeme dvojhodnotovú logiku, t. j. tvrdíme, že sú určité oblasti, ktoré sa dajú modelovať len dvojhodnotovou logikou, ale súčasne tvrdíme, že nie všetky oblasti sa dajú ňou modelovať. Červenka spomína, že dvojhodnotovosť je viac noetickým faktom¹ a že výpoveď, majúca tretiu hodnotu (hodnotu $\frac{1}{2}$), je len provizórna a v budúcnosti prejde alebo v pravdivú alebo v nepravdivú výpoveď. No ak ľudské poznanie nie je dokončiteľné, potom pravda je nedosažiteľnou limitou (vo vedeckom poznaní) a ani budúcnosť úplne nerozhodne o platnosti určitých teórií. Potom bude treba zaviesť stupne možnosti a či pravdepodobnosti, no redukcia na dvojhodnotovú logiku ostane vždy len ideálom. Dodávame len, že i takto chápaná mnohodhodnotovosť je noetickým faktom.

Jasne si uvedomujeme, že naše tvrdenia majú ťažkosti, ale sa nazdávame, že správnym chápaním sa dajú odstrániť a že sa ubránime v základe správnej námietke, že bez princípu o vylúčení tretieho a neprotirečenia upadneme do úplného chaosu. Logiku nikdy nesmieme chápať osamelo, ale vždy vo vzťahu k nadradeným celkom, ktoré o nej hovoria a ktoré tým môžu zaistiť i ich koherenciu, analytickosť atď. Ak by sme všetky celky, ktoré hovoria, a celky, o ktorých hovoria, kládli na tú istú rovinu a tvrdili, že všetky sa môžu vzájomne vyjadrovať a jeden druhému bez rozdielu zaručovať koherenciu, upadli by sme do antinomií. Nadradené vyššie celky voláme metalogiky logík a potom hovorenie o vlastnostiach trojhodnotových, pravdepodobnostných a iných logík nepatrí už do nich samých, ale do ich metalogík. A preto ani zákony tohto hovorenia nie sú zákony trojhodnotových a n-hodnotových... logík. To znamená, že tvrdenie, že „z dvoch výpovedí, a je pravdepodobné v stupni $\frac{1}{4}$ “ a „a nie je pravdepodobné v stupni $\frac{1}{4}$ “ jedna musí byť pravdivá a jedna nepravdivá a niet tretej možnosti“,² nie je už v poli pravdepodobnosti, ale v poli o pravdepodobnosti, t. j. je už v metalogickej oblasti. Z tejto oblasti princíp neprotirečenia nevylúčil ani L u k a s i e w i c z, ako správne poznamenáva Z a w i r s k i.³ Princíp neprotirečenia i naďalej zostáva regulatívnym princípom, ktorý, i keď neplatí v mnohých systémoch, platí o všetkých systémoch, t. j. všetky systémy si požadujú dvojhodnotovú metalogiku. Preto i naša formulácia princípu hodnot

¹ J. Červenka, o. c. 108.

² J. Červenka, o. c. 112.

³ „Lukasiewiczova mnohodhodnotová logika splňuje metalogický princíp protirečenia, t. j. ...v systéme sa neobjavia také dve formulky, z ktorých jedna by negovala druhú.“ Z. Z a w i r s k i, *Über die Anwendung der mehrwertigen Logik in der empirischen Wissenschaft*, Erkenntnis VI, 1936, 433.

bola dvojhodnotová. Tým sme zaiste vec neriešili, udali sme len návod na odstránenie ťažkostí.

S pochopom hodnoty a so zákonom hodnôt je spojený ďalší dôležitý pochop: *n e g á c i a*. Negácia je obsažená v samej možnosti zákona hodnôt. Je výber inej hodnoty prvku, ako je pôvodná hodnota. Prvok s pôvodnou hodnotou nazveme *k l a d* a prvok s novou hodnotou *z á p o r* kladu. V *n*-hodnotových logikách negáciu môžeme pokladať za súhrn hodnotových možností okrem jednej, ktorá je kladom a negácia by potom bola jednoznačná len v dvojhodnotovej logike.¹ V logikách, v ktorých majú prvky väčšiu voľnosť ako jednotkovú, i negácia bude mať stupeň voľnosti. Ak negáciu označíme čiarkou nad prvok alebo nad hodnotu,² tak v dvojhodnotovej logike $1 = \bar{0}$ a $0 = \bar{1}$, ale v trojhodnotovej logike, ak jednu hodnotu vyberieme ako klad, zostávajú nám ešte dve hodnoty, ktoré môžeme pokladať za jej zápor. To znamená, že „ $\bar{0}$ “ sa môže rovnať druhej alebo tretej hodnote, čím nastanú takéto prípady: $\bar{0} = 1$, alebo $\bar{0} = 2$, alebo $\bar{2} = 0$, alebo $\bar{2} = 1$, alebo $\bar{1} = 0$, alebo $\bar{1} = 2$. Neurčitost takto definovanej negácie je len známkou, že naša definícia je všeobecná a vyjadruje všetky možnosti. V individuálnych prípadoch sa rozhodneme pre jednu možnosť, čím sa negácie špecifikujú. Spomenieme len niektoré možnosti špecifikácie. Negáciu môžeme definovať napr. tak, že povieme, že niektorá nasledujúca hodnota je negáciou niektorej predchádzajúcej, čím je negácia určená topologicky a bližším určením výrazu „niektorá“ dostaneme množstvo metricky určených negácií. Ak napr. každá nasledujúca hodnota je negáciou predchádzajúcej, ktorú považujeme za klad, dostaneme *P o s t o v u* (cyklickú) negáciu. Teda ak $H_1 H_2 H_3 H_4 H_5$ je rad hodnôt (päťhodnotovej logiky), tak ak H_1 je kladom, H_2 je jeho negáciou, ale je súčasne kladom pre $H_3 \dots$ a H_5 je negáciou vzhľadom na H_4 , ale ak je len päť hodnôt, môže byť i kladom, ktorého negácia bude H_1 , čím sa cyklus opakuje. Môžeme však vystavať necyklické Postove negácie, ktoré predpokladajú nekončiaci sa počet hodnôt, a preto sú nedokončiteľné, parciálne, v ktorých každý člen je len provizórnym kladom, ale je súčasne i negáciou (tiež provizórnou) predošlého člena. Podobný systém negácií s jemu primeraným logickým poriadkom je logickou schémou vedeckého poznania, v ktorom hypotézy umierajú, ale hypotéza žije. V takomto systéme pravda by bola nedosažiteľnou limitou, čo dobre

¹ V jednohodnotovej logike, pretože má nulový stupeň voľnosti, negácia nie je možná.

² Negáciu označujeme i minuskulným „z“ pred prvkom, teda $\bar{a} = z a$. Negáciu obyčajne označujú minuskulným „n“. My toto označenie neužívame, aby sa nezamieňalo negačné „n“ s „n“, označujúcim počet hodnôt v logike.

odpovedá štruktúre vedeckého poznania. Okrem cyklických a necyklických Postových negácií je možná ešte jedna definícia negácie. Negáciu implicitne určíme negačným radom (N), ktorý je obrátením pozičného (kladného) radu (P). Ak pozičný rad dvojhodnotovej logiky je „0,1“, tak jemu zodpovedný negačný rad bude „1,0“, t. j. negácia „0“ bude „1“ a negácia „1“ bude „0“. Pomocou pozično-negačného radu ľahko zistíme negáciu každého kladu a klad každej negácie. Pozično-negačné rady budú takéto:

$$\begin{array}{c|c} P & 0,1 \\ \hline N & 1,0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} P & 0,1,2 \\ \hline N & 2,1,0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} P & 0,1/n-1,2/n-1 \dots\dots\dots 1 \\ \hline N & 1,\dots\dots\dots 2/n-1,1/n-1, \quad 0 \end{array}$$

Ak vezmeme prvé označenie hodnôt, negáciu definujeme vzťahom: $H(za) = H[(n-1) - a]$, t. j. hodnota záporu prvku „a“ sa rovná hodnote, vzniklej z odčítania hodnoty prvku „a“ od počtu hodnôt v logike, umenšenom o „jeden“; ak berieme druhé (zlomkové) označenie hodnôt, tak negáciu definujeme ako jedna mínus klad: $H(za) = 1 - H(a)$. Z pozično-negačného radu vidieť, že v troj- a viachodnotových logikách sú prípady, v ktorých klad je hodnotovo ekvivalentný svojej negácii, čo je výrazom toho, že v trojhodnotovej logike neplatí princíp vylúčenia tretieho.

Negovaním kladu nie sú vyčerpané negačné operácie, lebo negáciu môžeme znova negovať. Znegovanú negáciu označíme dvoma čiarkami nad prvok („ $\bar{a}$ “) alebo dvoma „z“ pred prvok („zz a“). Ľahko sa môžeme presvedčiť, že negovaná negácia sa rovná pôvodnému kladu, čo neplatí o Postových negáciách.

3. Jednoargumentové funkcie

Pozično-negačný rad je schéma, z ktorej ľahko vyčítame, ako máme priradovať hodnoty negácie k hodnotám kladu. Negácia je teda funkciou, ktorá, keďže za premennú má len jeden prvok (alebo celý složený celok), sa volá jednoargumentová funkcia, čím sa súčasne zaraďuje do širšieho celku jednoargumentových funkcií, plynúcich z určitého poriadku. V dvojhodnotovej logike je možných 2^2 jednoargumentových funkcií $[F(a)]$, ktoré podľa poradia označíme:

a	$F_1(a)$	$F_2(a)$	$F_3(a)$	$F_4(a)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Tretia funkcia je práve naša negácia.

V trojhodnotovej logike je 3^3 , t. j. 27 jednoargumentových funkcií. Nebudeme ich označovať $F_1, F_2, F_3 \dots F_{27}$, ale ich vedľa seba rozpíšeme. Tretiu hodnotu „ $\frac{1}{2}$ “ označíme pohodlnejším symbolom „ $?$ “.

a																												
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	0	0	0	0	0	0	0	0
?	1	1	0	0	1	?	?	?	0	?	?	?	?	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	?	1	?	?	1
0	1	0	0	1	?	?	1	0	?	?	?	1	0	1	0	?	?	0	1	0	1	?	1	?	0	0	1	?

Predposledná funkcia (0, ?, 1) je naša negácia a osemnásť funkcia (?, 0, 1) je cyklická Postova negácia.

V n -hodnotovej logike bude n^n jednoargumentových funkcií, medzi ktorými mnohé môžeme považovať za negácie. Nebudeme, hoci ako by to bolo dôležité, riešiť problém ich vzájomného vzťahu, ale hneď prejdeme k viacargumentovým funkciám.

4. Viacargumentové funkcie

Jednoargumentové funkcie nestačia pri výstavbe logík, preto musíme skúmať rozličné spôsoby spájania sa dvoch prvkov.

Hodnoty dvoch prvkov v dvojhodnotovej logike sa môžu kombinovať štyrmi spôsobmi. Obidva prvky môžu mať tú istú hodnotu, a to „0“ alebo „1“, alebo jeden má hodnotu „1“, druhý „0“ a naopak. Znázorníme to takto:

a	b
1	1
1	0
0	1
0	0

Dva prvky majú teda 2^2 možností kombinovania hodnôt. Tri prvky majú 2^3 a m prvkov 2^m možností.

a	b	c
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

V trojhodnotovej logike počet možností je väčší. Hodnoty dvoch prvkov tvoria 3^2 možností, tri prvky 3^3 a m prvkov 3^m možností. V n -hodnotovej logike počet možností kombinácie hodnôt m prvkov bude n^m .

Pri vytváraní kombinácií si pomáhame zákonitosťou: V prvom stĺpci (počítajúc od prava do ľava), v našom prípade pri prvku „c“, každá hodnota sa v n -hodnotovej logike opakuje n^0 raz, v druhom stĺpci n^1 , v treťom stĺpci n^2 a v m -tom stĺpci n^{m-1} raz.

Všetky kombinácie hodnôt prvkov, usporiadané do tabuliek, voláme **h o d n o t o v é s c h é m y**.

Nové možnosti sa nám otvoria spájaním prvkov, čím vznikajú celky, určené hodnotou prvkov a hodnotou spojenia. Závislosť hodnoty spojenia od hodnôt prvkov nazveme funkciou a to, čím hodnoty prvkov vstupujú do novej hodnoty spojenia, t. j. čím sa prvky spájajú v celky, voláme funktory. Pretože nám ide len o hodnoty prvkov, môžeme ich nahradiť i inými prvkami tej istej hodnoty, čím dostávajú úlohu premennej. Ako nám nezáležalo na obsahu prvkov, tak nám nezáleží ani na obsahu ich spojenia. Funkciou sa určuje, aká bude hodnota spojenia pri všetkých možných prípadoch, pri všetkých vzťahoch hodnôt prvkov medzi sebou. Preto sa funkcia nevzťahuje na jednotlivé hodnoty, ale na hodnotové schémy. Z pochopu logického poriadku ako celku plyní, že musíme brať do úvahy všetky hodnoty všetkými možnými spôsobmi priradené k hodnotovým schémam. Tým sa stane, že hodnota spojenia prvkov bude závisieť iba od hodnôt spojených prvkov a nie od iných okolností, ako obsahu atď., a že logické zákony budú analytické. Preto naše funkcie nazveme hodnotovými.¹ Určením množstva funkcií sa určuje povaha logických spojení, „nasledovania z...“ a teda i povaha analytických viet. V dvojhodnotovej logike, pretože hodnotová schéma dvoch prvkov má štyri možnosti, počet jej príslušných funkcií bude 2^{2^2} , t. j. 16. Tri prvky majú 2^{2^3} a m prvkov 2^{2^m} funkcií.

V trojhodnotovej logike počet dvojargumentových funkcií bude 3^{3^2} a počet m -argumentových funkcií vzrastie na 3^{3^m} . V n -hodnotovej logike počet m -argumentových funkcií bude n^{n^m} .

Tým sme však nevyčerпали všetky možné extenzionálne matricové logiky. Môžu nastať prípady, že hodnotové dvojargumentové funkcie trojhodnotových prvkov budú len dvojhodnotové, ale jednoargumentové funkcie budú trojhodnotové. Napr. prvky budú mať hodnoty „1, ?, 0“ a ich spojenia len hodnoty „1, 0“,² alebo „?, 0“, alebo „1, ?“. Počet dvojargumentových funkcií v týchto logikách bude 2^{3^2} a vo všeobecnosti v n -hodnotovej logike pri k -hodnotových

¹ Skoro všetci logisti miesto výrazu „hodnotová funkcia“ užívajú výraz „pravdivá funkcia“ (Wahrheitsfunktion, truth-function). Pretože „pravda-nepravda“ je len substitúcia, neužívame ani názov pravdivá funkcia.

² W. M. M a l i s o f f, *Meanings in multi-valued logics*, Erkenntnis VI, 1936, 135.

m-argumentových funkciách (kde $2 \leq k \leq n$), počet funkcií bude k^n . Lahko určíme i počet jednotlivých logík. Trojhodnotové logiky budú štyri. Jedna s trojhodnotovými dvojargumentovými funkciami a tri s dvojhodnotovými dvojargumentovými funkciami. Štvorhodnotových logík bude jedenásť, a to jedna logika o štvorhodnotových dvojargumentových funkciách, štyri logiky o trojhodnotových a šesť logík o dvojhodnotových dvojargumentových funkciách.¹ Vo všeobecnosti v n-hodnotovej logike bude $\binom{n}{k}$ logík o k-hodnotových funkciách. Ďalšie diferencovanie by sme mohli zaviesť tým, že v n-hodnotovej logike dvoj- a trojargumentové funkcie by boli n-hodnotové, ale štvorargumentové funkcie len k-hodnotové. Počet funkcií v jednotlivých logikách, ako sa ľahko presvedčíme, je nesmierne veľký. Ale pri bližšom skúmaní zistíme, že mnohé funkcie sa dajú zredukovať na niekoľko málo funkcií a že pri logike dvojargumentových funkcií postačí so vzťahmi medzi hodnotami dvoch prvkov, ba i viacargumentové hodnotové funkcie môžeme rozložiť na dvojargumentové. Samozrejme sú mysliteľné m-argumentové nerozložiteľné funkcie, a možno, že sa objavia vedecké disciplíny, vyjadriteľné práve logikami podobných funkcií.

5. Dvojhodnotová logika

Dvojhodnotová logika, ako to plynie z jej definície, bude mať 16 dvojargumentových funkcií s týmito hodnotovými tabuľkami:

a	b	V · ⊃ ≡															
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
		1	2	3	4	5	6										

Zo schémy vidíme, že celý smysel funkcie je určený okolnosťami, v ktorých má hodnotu „1“ alebo „0“.² Všetky funkcie ani nie sú symbolizované a pomenované. Pomenovanie sa pridržalo hovorovej reči, a to výrazov „nie“, „alebo“, „aj“ atď. To by mohlo z viesť k omylu, že logika skúma zákony hovorovej reči. Pre nás však reč znamená kalkul, t. j. systém určení, vzťahujúcich sa na prvky a ich

¹ Počet logík je určený kombináciou k-tej triedy z n- prvkov. Teda výrazom $\frac{n!}{k! (n-k)!}$

² B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, 4. vyd., London 1930, 147.

celky. A určenie sa koná maticami, ukazujúcimi názorne priebeh funkcií. V skutočnosti reč nie je celkom nelogická, a preto v nej nájdeme realizované niektoré naše funkcie, t. j. dvojhodnotová logika je parciálnou schémou hovorovej reči. Pozrime si bližšie jednotlivé funkcie, určené hodnotovými tabuľkami. Hodnotové tabuľky sú jednotlivé stĺpce v našom obrázku, okrem prvých dvoch stĺpcov, patriacich hodnotovej schéme.

Funkcia, označená číslom 2, majúca pri hodnotovej schéme „11, 10, 01, 00“ hodnotovú tabuľku „1, 1, 1, 0“, sa volá *disjunkcia* a ukazuje, že spojenie prvkov má len vtedy hodnotu „0“, keď hodnota obidvoch prvkov je tiež „0“, inak má hodnotu „1“.¹ Funkciu symbolizujeme „... v ...“, a v b, a čítame „alebo a, alebo b“ (nevylučujúc aj „a“ aj „b“). Prvok „a“ voláme prednou časťou spojenia (disjunkcie), prvok „b“ zadnou časťou. Funkciu môžeme názorne vyjadriť i maticou:

v	1,0
1	1,1
0	1 0

Ak prvky rozlišujeme ich hodnotou, tak do matice nedeme písať „a“, „b“, ale len ich hodnoty. Hodnoty horizontálneho horného riadku sú hodnoty prvku „b“ (zadnej časti disjunkcie) a hodnoty ľavého vertikálneho stĺpca označujú hodnoty prvku „a“. Hodnoty vo vnútri matice sú hodnoty jednotlivých spojení pomocou disjunktívneho funktora. Z matice jasne vidieť, že disjunkcia má hodnotu „0“, len keď obidva prvky majú tú istú hodnotu 0.

Funkcia, označená číslom 4, sa volá *konjunkcia* a symbolicky sa označuje bodkou „•“. Konjunktívne spojenie prvkov ($a \bullet b$) má len vtedy hodnotu „1“, keď obidva prvky majú hodnotu „1“, inak má vždy hodnotu „0“. Rečove by jej odpovedala spojka „a“, „aj“ (platí aj „a“ aj „b“). Jej matica bude:

•	1 0
1	1 0
0	0 0

Funkcia číslo 6 je *neslučiteľnosť* a znamená, že spojenie prvkov „a“ a „b“² pomocou neslučiteľnosti je len vtedy pravdivé (len vtedy má hodnotu „1“), keď obidva prvky majú hodnotu „0“,

¹ Mnoho logistov miesto označenia hodnôt symbolmi „1“, „0“ užíva označenie P (pravda), N (nepravda), T (true), F (false) atď.

² Výraz „spojenie“ má teda u nás definitorický význam. Hoci funktor neslučiteľnosti hodnoty prvkov vlastne rozlučuje, predsa ich dáva do určitého vzťahu, čím ich spája. Preto $a|b$ môžeme volať spojením. Miesto výrazu „spojenie“ budeme užívať i výraz „složenina“.

t. j. hodnota „1“ spojenia sa nedá slúčiť s hodnotou „1“ prvkov. Neslučiteľnosť symbolicky vyjadrujeme „|“ ($a | b$). Jej matica bude:

1	1	0
1	0	0
0	0	1

Jedenásta funkcia sa obyčajne volá **i m p l i k á c i a**. Symbolizujeme ju „ $\supset$ “ ($a \supset b$) a určíme maticou:

$\supset$ | 1 0 To znamená, že implikatívne spojenie má len vtedy hodnotu „0“, keď predná časť spojenia má hodnotu „1“ a zadná časť hodnotu „0“. Ak implikácia má hodnotu „1“, tak hodnota „0“ implikuje všetko a „1“ implikuje len „1“. Výraz „implikácia“ nie je šťastne volený a spôsobuje konfúziu¹ s pochopom dôsledku; preto sa nekryje so slovným spojením „ak — tak“.

Trinásta funkcia, ktorej matica je

$\equiv$ | 1 0 nám ukazuje, že spojenie má len vtedy hodnotu „1“, keď hodnoty obidvoch prvkov sú tie isté, t. j. keď sú ekvivalentné. V opačnom prípade funkcia má hodnotu „0“. Preto ju voláme **e k v i v a l e n c i a**. Označujeme ju „ $\equiv$ “ ($a \equiv b$). Ekvivalencia neznamena, že „a“ i „b“ majú rovnaký význam alebo tú istú logickú silu pri dokazovaní. Ekvivalentné sú napr. i vety (t. j. ekvivalencia má hodnotu „1“): „sneh je drevený“, „tráva je železná“.

Zaujímavá je prvá a piata funkcia.

Prvá funkcia hovorí, že spojenie má stále hodnotu „1“, nech je hodnota jednotlivých prvkov akákoľvek, že teda hodnota spojenia nezávisí od hodnôt prvkov a hodnota „1“ nasleduje po každej hodnote prvkov. Funkcia je preto hodnotový invariant, je všeobecne a nezávisle platná. Menuje sa úplná totožnosť alebo **t a u t o l o g i a**, príliehavejšie: **l o g i c k á v e t a**. Jej negáciou je piata funkcia, ktorú voláme **p r o t i r e č e n i e**.

Aby sme tautologiu definovali celkom všeobecne a nielen jej niektoré substitúcie, nemôžeme o hodnote „1“ hovoriť ako o „platnosti“ a preto ju nazveme „výberovou hodnotou“.² Výberová hodnota by mohla byť i „0“, len by sme museli odpovedne premenovať, prípadne premeniť všetky funkcie. Hodnotová tabuľka implikácie by potom mohla byť napr. „0, 1, 0, 0“. Môžeme teda definovať tautologiu ako nezávislosť výberovej hodnoty spojenia od hodnôt prvkov spojenia. Z toho vidno, že iba tautologie sú zákony logiky, lebo len

¹ R. Carnap, o. c. 255.

² Poľskí logisti výberovú hodnotu volajú „wartośćia wyróżniona“.

ony sú všeobecne platné, čo znamená, že nasledujú z hocikákeho radu prvkov. Preto ich voláme analytickými spojeniami. A pretože plynú z celku systému, aj ho odzrkadľujú. Z toho nasleduje, že z tautológií môžeme určiť implicitne všetky funkcie. Keby sme brali maticovú metódu v jej izolovanosti, len takéto určenie funkcií by bolo správne; to však vedie do veľkých ťažkostí.

Principiálne sa proti tautológiám nedá vážne namietat, najmä keď uvažíme, že najviac napádané pochopovania tautológií boli neg-logické. Všetky funkcie sme symbolicky nevyjadrili ani nepomenovali. Mohli sme to urobiť. No dôležitejšie je ukázať, že jednotlivé funkcie nie sú od seba nezávislé, ale že sú navzájom jedna druhou vyjadriteľné a nahraditeľné. Dve spojenia (funkcie) sa môžu vzájomne nahradiť, ak predstavujú tú istú hodnotovú tabuľku. Naše symbolizované funkcie môžeme nahradiť negáciou a konjunkciou, alebo negáciou a disjunkciou, alebo negáciou a implikáciou.

a v b môžeme nahradiť výrazom: $\overline{a} \cdot \overline{b}^1$ alebo: $\overline{a} \supset b$.

Konjunkciu $a \cdot b$ nahradíme: $\overline{a} \vee \overline{b}$ alebo $\overline{a \supset b}$ a implikáciu nahradíme disjunkciou $\overline{a} \vee b$ alebo konjunkciou $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Ekvivalenciu môžeme nahradiť dvoma konjungovanými implikáciami: $(a \supset b) \cdot (b \supset a)$. Z jednoty logického poriadku musí nasledovať, že i nesymbolizované a nepomenované funkcie (teda funkcie 3, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16) sú nahraditeľné niektorými známymi funkciami. Z obrázku, na ktorom je všetkých 16 funkcií, vyčítame, že šiesta funkcia je ekvivalentná negácii druhej (disjunkcii), ôsma ekvivalentná negácii štvrtej (konjunkcii), štrnásť ekvivalentná negácii jedenásť (implikácii) a šestnásť je ekvivalentná negácii trinásť (ekvivalencii); tretia je ekvivalentná negácii siedmej, deviata negácii desiatej a dvanásť negácii pätnásť. Ostávajú nám teda len tri skutočne „neznáme“ funkcie. Tretiu funkciu môžeme nahradiť napr. složenou funkciou: $(a \cdot \overline{b} \cdot a) \vee a$, deviatu nahradíme funkciou: $(a \cdot \overline{b} \cdot b) \vee b$ a dvanásť nahradíme funkciou $\overline{b} \vee a$ alebo funkciou $b \supset a$; to znamená, že celý systém je určený niektorou z funkcií (disjunkciou, alebo konjunkciou, alebo...) a negáciou. Matica, reprezentujúca celú dvojhodnotovú logiku teda bude:

$\supset$	1	0	—
1	1	0	0
0	1	1	1

Ale negáciu môžeme definovať i pomocou dvojargumentovej funkcie — neslučiteľnosti, na ktorú sa tak zredukujú všetky ostatné

¹ $\overline{a} \cdot \overline{b}$ znamená, že negujeme celú konjunkciu z „ $\overline{a}$ “ a „ $\overline{b}$ “.

dvojargumentové funkcie a ktorá teda sama stačí reprezentovať celý systém. Negácia, vyjadrená neslučiteľnosťou: $\bar{a} \equiv a \mid a$. Disjunkciu môžeme vyjadriť ako $(a \mid b) \mid (a \mid b)$ a pomocou disjunkcie a negácie sa dajú vyjadriť ostatné funkcie. Neslučiteľnosť však môžeme definovať i ako negáciu konjunkcie. Aj pomocou takto definovanej neslučiteľnosti môžeme vyjadriť negáciu a ostatné funkcie. Napr. konjunkcia, definovaná touto novou neslučiteľnosťou, by mala ten istý tvar ako disjunkcia, vyjadrená prvou neslučiteľnosťou, teda $a \cdot b \equiv (a \mid b) \mid (a \mid b)$. Tieto dva tvary sú duálne, ako duálne sú disjunkcia s konjunkciou¹. A teraz sa vráťme k funkciám, ktoré W a i s m a n n nazval „degeneráciami spojení“,² k tautológii a kontradikcii. Už sme ich definovali. Ostávalo by nám ukázať niekoľko tautológií, dokázať, že sú tautologie, udať kritérium tautologickosti funkcie, čiže študovať všeobecnú štruktúrnú (vonkajšiu) formu, spoločnú všetkým tautológiám, tak, „aby každá tautologia sama ukazovala, že je tautologiou“.³ Problémy sa dotýkajú metalogických oblastí, a preto si ich tu nebudeme veľmi všímať. Tautologiami sú všetky spomínané ekvivalencie medzi implikáciou, disjunkciou a konjunkciou; napr. $a \vee b \equiv a \supset b$ atď. Známejšie tautologie, potrebné pri deduktívnych postupoch, sú: $(a \cdot b) \supset a$;

$$a \supset (a \vee b) \text{ a } a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c \equiv a \vee b \vee c;$$

$$a \cdot (b \vee c) \text{ eq } a \cdot b \vee a \cdot c;⁴$$

$$a \vee (b \cdot c) \text{ eq } (a \vee b) \cdot (a \vee c).⁵$$

Teraz dokážeme, že spomínané spojenia sú tautologiami. Ako príklad vezmeme funkciu $a \supset (a \supset b)$. Za jednotlivé prvky postupne dosadzujeme všetky hodnoty, ktoré môžu mať (teda „1“ a „0“), a zisťujeme, či výsledok je „1“. Ak totiž spojenie je tautologiou, musí

¹ Hilbert - Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1928, 13.

² F. Waismann, *Was ist logische Analyse?* The Journal of unified science 1940, 269.

³ L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, 2. vyd., London 1933, 166.

⁴ Symbol „eq“ značí ekvivalenciu, ktorá však nie je totožná s „ $\equiv$ “. „eq“ užívame len pri dosadzovaní a nahradzovaní, kde jeden člen ekvivalencie prejde do složeniny bez druhého. Ak dané ekvivalencie chceme použiť ako premisy, užijeme symbol „ $\equiv$ “, ak ich užívame pri dosadzovaní (ako deduktívne pravidlá), píšeme „eq“.

Tieto dva symboly nie sú zredukovateľné a nepatria tomu istému systému.

⁵ Systematický prehľad tautológií podáva H. Reichenbach, *Wahrscheinlichkeitslehre*, Leiden 1935, 26n, 37n.

mať hodnotu „1“, nech je už hodnota prvkov akákoľvek. To znamená, že na dôkaz našej tautologie potrebujeme štyri kroky.¹

Prvý krok: $a = 1$, $b = 1$. Potom

$$\begin{array}{ll} 1 \supset (\bar{1} \supset 1), & \text{ale } \bar{1} = 0, \text{ teda} \\ 1 \supset (0 \supset 1), & \text{ale } 0 \supset 1 = 1, \text{ teda} \\ 1 \supset 1, & \text{ale } 1 \supset 1 = 1, \text{ teda} \\ 1 & \end{array}$$

Druhý krok: $a = 0$, $b = 0$. Potom

$$\begin{array}{ll} 0 \supset (\bar{0} \supset 0) & \bar{0} = 1 \\ 0 \supset (1 \supset 0) & 1 \supset 0 = 0 \\ 0 \supset 0 & 0 \supset 0 = 1 \\ 1 & \end{array}$$

Tretí krok: $a = 1$, $b = 0$. Potom

$$\begin{array}{l} 1 \supset (\bar{1} \supset 0) \\ 1 \supset (0 \supset 0) \\ 1 \supset 1 \\ 1 \end{array}$$

Štvrtý krok: $a = 0$, $b = 1$. Potom

$$\begin{array}{l} 0 \supset (\bar{0} \supset 1) \\ 0 \supset (1 \supset 1) \\ 0 \supset 1 \\ 1 \end{array}$$

Pretože sú len tieto štyri možnosti a spojenie má v nich vždy význačnú hodnotu, je tautologiou.²

Za prvky „a“ a „b“ môžeme dosadiť hocijaké složené spojenie, len nech má tú istú hodnotu ako „a“ a „b“, čiže tautologiu môžeme nahradiť hocijakou tautologiou systému, preto sú si rovnocenné. To ďalej znamená, že spojenia môžeme rozširovať alebo i skracovať, len keď hodnota nového spojenia je tá istá ako hodnota pôvodného.

¹ Spôsob dôkazu sme prevzali od K. Ajdukiewicza, *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej*, Warszawa 1928, 167n. Dôkaz pomocou hodnotových tabuliek nedáva vyniknúť povahe analytickej vety a okrem iného i preto ho neuvádzame, lebo čitateľ ho nájde v štúdiu S. Felber, *Symbolická logika*, Filozofický Sborník III, 1942, 32n.

² K dôkazu tautologie potrebujeme toľko krokov, koľko riadkov má hodnotová schéma, potrebná pre konštrukciu funkcie.

Jednota logického poriadku sa prejavuje i vo vonkajšej forme tautológií, takže hneď z formy spojenia vidíme, či je tautologiou alebo nie. K tomu však treba previesť všetky spojenia na jednotnú štandardnú formu. Z dôvodov symetricity sa užíva forma, majúca len negáciu, konjunkciu a disjunkciu.

Aby naša logika bola úplná aspoň v hrubých obrysoch, mali by sme skúmať i trojargumentové funkcie. Zistili by sme však, že ich môžeme zredukovať na dvojargumentové funkcie, ktorých jeden člen je dvojargumentovou funkciou.

Úvahy o dvojhodnotovej logike skončíme udaním všeobecnej definície matice, reprezentujúcej celý systém.

Logická matica je usporiadaná trojica $M = [A, B, f]$ pozostávajúca zo vzájomne sa vylučujúcich množín A, B , ľubovoľného charakteru a z funkcie „ f “, definovanej pre všetky prvky množiny $(A + B)$, kde hodnoty sú výlučne prvky z množiny A, B . Naš systém je potom množina prvkov, splňujúcich spomínanú maticu, pričom $A = 0, B = 1$, a $f = a \mid b$.¹

6. Trojhodnotové logiky

a) Trojhodnotová L_1 -logika.

Práve tak, ako sme vystavali dvojhodnotovú logiku, mohli by sme skonštruovať i ďalšie logiky. Určíme teda najprv hodnotové schémy, potom uvedieme všetky možnosti priradenia hodnôt ku schémam. Počet možností a teda i počet hodnotových funkcií závisí nielen od hodnotovej schémy, ale i od bližšieho určenia stupňa voľnosti dvojargumentových funkcií a od definície negácie. V našich úvahách sa pokúsime podať len náčrt a užívať negáciu, definovanú pozično-negačným radom. Ako prechod do trojhodnotovej logiky vezmeme L_1 -logiku, ktorú definujeme:

Trojhodnotový logický systém L_1 je ten, v ktorom jednoargumentové funkcie sú trojhodnotové a dvojargumentové len dvojhodnotové. Z definície plynú všetky vlastnosti tohto systému. Keď sme študovali tento systém, zostavili sme si všetkých 512 tabuliek, predstavujúcich 512 funkcií. Niektoré sme si zvolili za základné a po-

¹ J. Lukasiewicz - A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa naukowego warszawskiego III, 1930, 33. Časopis sa obyčajne uvádza skratkami francúzskeho podtitulu. (C. R. Soc. Sciences Varsovie Cl. III.) Lukasiewicz však logickú maticu definuje ako usporiadanú štvorinu $M = [A, B, f, g]$, kde „ f “ je implikácia a „ g “ negácia.

mocou nich sme vyjadrili ostatné, práve tak ako v dvojhodnotovej logike. Aby práca bola pohodlnejšia, vybrali sme si 10 „základných“ funkcií:

a	b	$a \supset b$	$a \&_1 b$	$a \&_2 b$	$a \&_3 b$	$a \&_4 b$	$a \vee_1 b$	$a \vee_2 a$	$a \vee_3 b$	$a \equiv b$	$a b$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	?	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
?	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
?	?	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
?	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	?	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Za konjunkcie sme si vybrali štyri hodnotové tabuľky, lebo všetky s implikáciou definujú tú istú ekvivalenciu.

Na týchto 10 funkcií sme postupne zredukovali 502 funkcií. No ani naše základné funkcie nie sú nezredukovateľné. Pomocou negácie, matica ktorej je

a	$\bar{a}$	$\supset$	1	?	0
1	0	1	1	0	0
?	?	?	1	1	0
0	1	0	1	1	1

, a pomocou implikácie, definovanej maticou

môžeme vyjadriť všetky ostatné základné funkcie. Tak napr.

$$a \&_2 b \equiv [(a \supset \bar{b}) \supset (\bar{a} \supset b)] \supset \bar{b}; \quad a \vee_2 b \equiv \bar{a} \supset b;$$

$$a \vee_3 b \equiv [(\bar{a} \supset b) \supset (\bar{a} \supset \bar{b})] \supset a; \quad a | b \equiv [(a \supset \bar{b}) \supset (\bar{a} \supset \bar{b})] \supset \bar{a} \equiv \overline{a \vee_1 b}$$

atď.

To znamená, že týmito dvoma funkciami je určený celý systém. V dvojhodnotovej logike a vôbec v každej logike, kde jednoargumentové funkcie¹ majú tie isté hodnoty ako dvojargumentové, všetky funkcie sa dajú zredukovať na upravenú definíciu neslučiteľnosti ($a | b$). V našej L_1 -logike to nie je možné, lebo trojhodnotovú negáciu nemožno vyjadriť dvojhodnotovou neslučiteľnosťou. Neplatí teda, že $\bar{a} \equiv a | a$, ani keby sme neslučiteľnosť definovali hodnotovou ta-

¹ O viac ako dvojhodnotových logikách, pretože sme doteraz nevykonali dôkaz, je naše tvrdenie čisto hypotetické (v neskoršie spracovanom dodatku sa naša hypotéza stala tézou).

buľkou: „0 0 0 1 1 0 1 1“. Tvrdenie môžeme rozšíriť na všetky logiky, v ktorých jednoargumentové funkcie majú iný stupeň voľnosti ako dvojjargumentové. Z toho plynie i to, že L_1 -systém nie je ekvivalentný s dvojjhodnotovým systémom, preto ani dvojjhodnotové tautologie nemusia byť L_1 -tautologiami. Napr. dvojjhodnotová tautologia $a \supset (\bar{a} \supset b)$ má v L_1 -logike túto tabuľku:

„1 1 1 1 1 0 1 1“;

v L_1 -systéme nie je ani $\bar{a} \supset (a \supset b)$ tautologiou. Z toho jasne vidíme, že tautologia a či logický zákon je relatívny, intrasystémový. Má smysel len v určitom systéme; v inom systéme nemusí byť tautologiou. Dôkaz, že spojenie prvkov je analytické v L_1 -logike, je podobný ako v dvojjhodnotovom systéme; len ak sa spojenie skladá z dvoch prvkov, je k tomu potrebných deväť krokov. Na príklade ukážeme tri kroky. Treba dokázať, že $\bar{b} \supset [(\bar{a} \supset b) \supset (\bar{a} \supset b)]$ je L_1 -tautologiou.

Nech $a = 1$, $b = ?$. Potom

$$\begin{aligned} \bar{?} &\supset [(\bar{1} \supset ?) \supset (\bar{1} \supset ?)], \text{ ale } \bar{?} = ? \\ ? &\supset [(0 \supset ?) \supset (0 \supset ?)], \text{ ale } 0 \supset ? = 1 \\ &? \supset (1 \supset 1) \\ &? \supset 1, \quad \text{ale } ? \supset 1 = 1 \\ &1 \end{aligned}$$

Nech $a = ?$, $b = 0$. Potom

$$\begin{aligned} \bar{0} &\supset [(\bar{?} \supset 0) \supset (\bar{?} \supset \bar{0})] \\ 1 &\supset [(? \supset 0) \supset (? \supset 1)] \\ &1 \supset (0 \supset 1) \\ &1 \supset 1 \\ &1 \end{aligned}$$

Nech $a = ?$, $b = ?$. Potom

$$\begin{aligned} \bar{?} &\supset [(\bar{?} \supset ?) \supset (\bar{?} \supset \bar{?})] \\ ? &\supset [(? \supset ?) \supset (? \supset ?)] \\ &? \supset (1 \supset 1) \\ &? \supset 1 \\ &1 \end{aligned}$$

Jednota každej logiky sa prejavuje v pravidlách nahraditeľnosti funkcií. Od dvojjhodnotovej logiky sa veľmi líši pravidlo krátenia a predlžovania. Podstata pravidla je v tom, že krátená složenina musí mať tú istú hodnotu ako pôvodná dlhšia. Z toho, že složenina

má len dve hodnoty, prvky však tri, plyníe, že složeninu o m prvkoch, kde $m > 1$, môžeme nahradiť inou složeninou o $m \pm 1$ prvkoch, keď $m \pm 1 > 1$. Ak $m \pm 1 = 1$, t. j. ak složenina prechádza v prvok, tak pôvodná složenina má dve hodnoty a skrátaná tri hodnoty. Preto nie sú ekvivalentné. Podobné pravidlo platí pre celý druh týchto logík. V dvojhodnotovej logike $a \cdot b$ v $\bar{b}$ je nahraditeľné a ekvivalentné s „a“, v L_1 -logike to nie je možné. Modifikácia pravidla krátenia vplýva i na zmenu pravidiel dedukcie.

b) Trojhodnotová L_2 -logika

Trojhodnotová L_2 -logika je tá, ktorá má jedno i dvojargumentové funkcie s dvoma stupňami voľnosti. Berúc do úvahy všetky hodnoty „1 ? 0“, priradené všetkými možnými spôsobmi k hodnotovým schémam, zistíme, že trojhodnotová L_2 -logika má 3^2 , t. j. 19.683 dvojargumentových funkcií. Je veľmi ťažko uviesť tabuľky všetkých týchto funkcií a ešte ťažšie je konkrétne vykonanie redukcie všetkých funkcií na niekoľko málo funkcií, prípadne na jednu jedinú. Uvedieme niekoľko funkcií ako príklad.

a	b											
1	1	1	1	1	0	0	1	?	0	1		
1	?	0	?	1	?	0	0	1	?	0	1	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	?	0	1	
?	1	0	?	1	?	0	0	1	?	0	1	
?	?	1	1	1	1	0	1	1	?	0	1	
?	0	0	?	?	?	0	1	1	?	0	?	
0	1	0	0	0	0	0	0	1	?	0	1	
0	?	0	?	?	?	0	1	1	?	0	?	
0	0	1	1	1	1	1	1	1	?	0	?	

Ak vychádzame z myšlienky jednoty systému, t. j. zo vzájomných vzťahov medzi funkciami, môžeme tvrdiť, že jednota systému sa odzrkadľuje v složeninách, v ktorých je len niekoľko málo funkcií a že všetky funkcie sú zredukovateľné na niektoré, nami zvolené za základné.¹ Môžeme teda postupovať podobne ako v dvojhodnotovej logike, len nesmieme zabúdať, že brať podobnosť s dvojhodnotovou logikou za metodologické pravidlo konštrukcie nesmieme preceňovať. Lahko nás môže viesť do omylu, že partikulárnu zákonitosť budeme

¹ Z jednoty systému plyníe, že hodnoty „1“ a „0“ sú celkom odlišné od hodnôt v dvojhodnotovej logike, označených tými istými symbolmi.

aplikovať na širšie súvislosti. Lebo hoci i trojhodnotová L_2 -logika¹ je len substitúciou širšej logiky s viac premennými, predsa, pretože je substitúciou nižšieho radu, lepšie ukazuje všeobecné zákonitosti závislostí funkcií.² Z veľkého množstva funkcií plynie i ich podobnosť, takže celým ich skupinám môžeme priradiť jedno meno. Ako príklad vezmeme nasledujúcich šesť funkcií:

a	b	$\equiv_1$	$\equiv_2$	$\equiv_3$	$\equiv_4$	$\equiv_5$	$\equiv_6$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	?	0	1	?	1	?	1
1	0	0	0	0	0	0	0
?	1	0	1	?	1	?	1
?	?	1	1	1	1	1	1
?	0	0	0	?	?	?	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	?	0	0	?	?	?	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Všetky majú spoločné to, že majú hodnotu „1“, keď obidva prvky majú rovnakú hodnotu. Preto ich voláme *ekvivalenciami*. No nesmieme ich stotožňovať s dvojhodnotovou ekvivalenciou, ku ktorej sa najviac blíži „ $\equiv_1$ “, duchu trojhodnotovej logiky najviac odpovedá „ $\equiv_3$ “. Ak ekvivalenciu definujeme podľa príkladu dvojhodnotovej logiky ako $a \supset b \cdot b \supset a$, dostaneme niekoľko implikácií a konjunkcií. No môžeme postupovať i tak, že za základnú funkciu si zvolíme implikáciu („ $\supset$ “) a ňou definujeme disjunkciu, ktorá zasa definuje konjunkciu, čím sa dostávame k ekvivalencii. Netvrdíme, že novozískané ekvivalencie sú totožné s horeuvedenými šiestimi ekvivalenciami. Musíme si totiž uvedomiť, že stavíme nový systém a mená funkciám priraďujeme konvenčne. Za základné by sme si mohli voľiť i také funkcie, ktoré nemajú obdobu v dvojhodnotovej logike. No výhodnejší je postup, všimajúci si určité zákonitosti a ukazujúci, ako sa tieto zákonitosti uskutočňujú v dvoj- i v trojhodnotovom systéme.

Za základnú funkciu si zvolíme implikáciu a negáciu, definovanú pozično-negačným radom (neskoršie uvidíme, že naša voľba nebola výhodná). Z dvojhodnotovej implikácie vidíme, že má hodnotu „1“, keď predná časť je „0“ alebo keď obidva prvky majú tú istú hodnotu,

¹ Miesto „trojhodnotová L_2 -logika“ budeme všade písať len trojhodnotová logika, lebo nenastane konfúzia s L_1 -logikou.

² Preto logicky prirodzenejšie by bolo postupovať od trojhodnotovej logiky k dvojhodnotovej.

t. j. keď platí, že hodnota prednej časti je menšia alebo rovná hodnote zadnej časti. Keby sme v tomto postupe pokračovali a určili, že implikácia má hodnotu „0“, ak hodnota prednej časti je väčšia ako hodnota zadnej časti, dostali by sme funkciu, ktorá je s hľadiska trojhodnotovosti málo významná. Preto musíme hľadať iné pravidlo definície základnej funkcie. Prvú časť pravidla ponecháme a druhú časť nahradíme určením: ak predná časť „a“ má vyššiu hodnotu ako „b“, implikácia nebude mať ani hodnotu „0“, ale ani „1“, to znamená, že bude splňovať nerovnosť „ $0 < C < 1$ “. Vieme zasa, že hodnota funkcie závisí len od hodnôt prvkov, preto ak „a“ > „b“, tak hodnota implikácie bude $1 - a + b$. Implikácia nemôže mať totižto hodnotu $1 + a + b$, lebo by sa nesplnila spomínaná nerovnosť; nemôže mať ani hodnotu $1 - b + a$, lebo v prípade $1 \text{ } C_1 \text{ } 0$ implikácia by mala hodnotu väčšiu ako „1“, čo je nesmysel; pre tú istú príčinu nemôže mať ani hodnotu $1 + a - b$.

K podobným výsledkom by sme došli, keby sme si zvolili opačný postup a určili, že implikácia bude mať hodnotu „1“, keď „a“ má vyššiu hodnotu ako „b“. Takto vzniklá funkcia by bola obrátením našej implikácie, a preto i ňou vyjadriteľná ($b \text{ } C_1 \text{ } a$). Vzorec $1 - a + b$ môžeme aplikovať i na prípad, keď obidva prvky majú tú istú hodnotu. Základnú funkciu si môžeme určiť i iným spôsobom a hovoríme, že implikácia má hodnotu „1“, keď $a < b$, ak však $a = b$, a „a“ a „b“ nemajú krajné hodnoty („0“ alebo „1“), má implikácia tú istú hodnotu ako „a“; ak aspoň jeden prvok má krajnú hodnotu $a > b$, má funkcia hodnotu $1 - a + b$. Matica tejto implikácie, ktorú označíme symbolom C_2 , bude:

C_2	1	?	0
1	1	?	0
?	1	?	?
0	1	1	1

Táto funkcia má tú výhodu, že sa dá ľahko zredukovať na trojhodnotovú neslučiteľnosť, vyjadrujúcu nám i negáciu. Matica neslučiteľnosti bude:

	1	?	0
1	0	0	0
?	0	?	?
0	0	?	1

Negáciu definujeme ako $\bar{a} = a | a$; potom platí, že $a \text{ } C_2 \text{ } b \equiv \equiv [(a | a) | b] | [(a | a) | b]$. So systematického hľadiska to má ten význam, že trojhodnotovú logiku môžeme definovať maticou uspo-

riadanej trojice. C_2 je však, ako to z jednoty systému plyní, nahraditeľná funkciou C_1 podľa ekvivalencie $a C_2 b = (\bar{a} C_1 b) C_1 b$.

Obidve určenia implikácií narážajú na ťažkosti, keď ich máme pokladať za analogony deduktívnym schémam. A aby sme sa vyhli zbytočným komplikáciám v dedukciách, zavedieme tretie určenie implikácie (C_3). „ C_3 “ má hodnotu „1“, keď $a \leq b$; ak $a > b$, a ak „b“ nie je dolná krajná hodnota, tak implikácia má hodnotu $1 - a + b$, ak však „b“ je dolnou krajnou hodnotou, implikácia bude mať hodnotu rovnú dolnej krajnej hodnote. Dolná krajná hodnota je tá, ktorá sa už nesmie objaviť v matici funkcie, aby složenina (funkcia) bola platná a aby sa mohla dosadiť do deduktívnych schém; obyčajne ňou býva „0“; ale platnosť tejto hodnoty sa môže posunúť (napr. v päťhodnotovej logike) na $\frac{1}{4}$, prípadne na $\frac{2}{4}$ alebo na $\frac{3}{4}$. V tom prípade platné složeniny by boli len tautologie. Složeniny, ktoré nikdy nemajú dolnú krajnú hodnotu, ale ani nie sú tautologiami, nazývame „m o ž n é“. Mnohé dvojhodnotové tautologie sú v trojhodnotovom systéme len možné. Napr. $(\bar{a} C_1 a) C_1 a$ je možnou složeninou, lebo nie je tautologiou a nie je ani neplatnou.

Nie je tautologiou:

$$\begin{array}{c} (\bar{?} C_1 ?) C_1 ? \\ 1 C_1 ? \\ ? \end{array}$$

Nie je ani neplatnou složeninou, lebo nikdy nemá dolnú krajnú hodnotu, ktorá je tu „0“:

$$\begin{array}{c} (\bar{1} C_1 1) C_1 1 \\ 1 C_1 1 \\ 1 \\ (\bar{0} C_1 0) C_1 0 \\ 0 C_1 0 \\ 1 \end{array}$$

Z ekvivalencií a implikácií môžeme určiť konjunkcie, ktorých bude väčšie množstvo, ale všetky budú tvorené podľa zákona $(a C b) \& (b C a) \text{ eq } a \equiv b$.¹

Podobne môžeme určiť i disjunkcie podľa $a \vee b \text{ eq } \bar{a} C b$. Len si musíme stále uvedomovať, že náš výber je do veľkej miery konvenčný

¹ Už sme spomenuli, že znak „eq“ nepatrí do tej istej oblasti ako „ $\equiv$ “, ale do príslušnej metaoblasti. V metavedách, t. j. v disciplínach o vedách, platí zákon, že každá viachodnotová oblasť si požaduje dvojhodnotovú metaoblasť. Preto zákon funkcie „eq“ bude podobný zákonu dvojhodnotovej ekvivalencie.

a že dvojhodnotové funkcie sa celkom rôznia od trojhodnotových. Ak náš výber pokladáme za nutný, zapletieme sa do zbytočných ťažkostí a nedorozumení. Ukážeme to na príklade. V dvojhodnotovej logike disjunkcia má dva ekvivalenty „ $\bar{a} \supset b$; $(a \supset b) \supset b$ “, ktoré však v trojhodnotovej logike nie sú ekvivalentné. Preto vraj pre definíciu disjunkcie sa máme rozhodnúť pre jeden z výrazov; Lukasiewicz prijal¹ za definíciu trojhodnotovej disjunkcie druhý výraz, majúci maticu

v_2	1	?	0
1	1	1	1
?	1	?	?
0	1	?	0

Potom vraj neplatí ani princíp o vylúčení tretieho, lebo a v $\bar{a}$, ak $a = ?$, nemá hodnotu „1“, ale „?“ . Ak sa rozhodneme pre prvý výraz, platí vraj zákon o vylúčení tretieho, lebo z matice takto definovanej disjunkcie

v_1	1	?	0
1	1	1	1
?	1	1	?
0	1	?	0

plynie, že ak $a = ?$, disjunkcia má hodnotu „1“, že teda princíp o vylúčení tretieho je tautologiou. Podobné tvrdenia majú základ v uprednostovaní niektorých logík s čisto logického hľadiska. Ak sme symbolu „ v “ v dvojhodnotovej logike mohli priradiť rečovú časticu „alebo“,² nemusíme to urobiť i v trojhodnotovej logike. Princíp o vylúčení tretieho neplatí v trojhodnotovej logike, lebo to „tretie“, symbolizované znakom „?“ , máme v samej matici; no v trojhodnotovej logike sa táto neplatnosť nedá vyjadriť, ako sa nedá vyjadriť ani jeho platnosť, preto trojhodnotovou logikou nemôžeme hrešiť proti tomuto princípu.

Keby si bol Lukasiewicz vybral za definíciu disjunkcie funkciu $\bar{a} C_1 b$, tak a v $\bar{a}$ by bola síce tautologiou, t. j. mala by vždy význačnú hodnotu, ale nebola by vyjadrením princípu vylúčenia tretieho. Pretože obidve tieto definície sú zredukovateľné na novú funkciu,

¹ S. Zawirski, *Les logiques nouvelles et le champ de leur application*, Revue de metaphysique et de morale XXXIX, 1932, 506.

² Nesmieme zabudnúť, že toto priradenie je len parciálne, neanalytické, ale čisto experimentálne. Porov. J. Herbrand, *Sur le problème fondamental de la logique mathématique*, C. R. Soc. Sciences Varsovie Cl. III, 1931, 21.

ba sú zredukovateľné medzi sebou, ak by jedna popierala spomínaný princíp, popierala by ho i druhá. Práve ich zredukovateľnosť nám ukazuje nemožnosť nekonvenčného výberu. Keby som predsa nástojil na výbere, tým samým by sme vystavili novú logiku, ktorej naša L_2 — logika by bola opravdovou časťou. Táto nová logika by však už nebola čisto maticová, ale bola by i axiomaticky dekrétovaná.

Princíp o vylúčení tretieho nám vyjadruje dôležitú vlastnosť dvojhodnotovej logiky, ktorú až teraz lepšie pochopíme. Tento princíp obyčajne vyjadrujeme takto: „voľačo alebo je také, alebo nie je také, niečo tretieho, iného, nie je možné“. Logistika ho symbolizuje: $a \vee \bar{a}$, $1 \vee \bar{1}$. Že táto symbolická formulácia sa nekryje so slovnou, je jasné. Logistická formulácia by skôr odpovedala princípu dvojhodnotovosti. Aby sa tieto formulácie k sebe priblížily, museli by sme k druhej niečo dodať: „ $a \vee \bar{a}$ + nemožnosť niečoho iného.“ Keďže $a \vee \bar{a}$ je tautologiou a jednoznačne odzrkadľuje systém, tak ak niečo pridáme k tautológii, musíme pridať i k systému, t. j. systém musíme položiť do širšej súvislosti. Potom „nemožnosť niečoho iného“ (prídavok k princípu „dvojhodnotovosti“) nemôžeme vyjadriť tou istou symbolikou, ktorou sme vyjadrili $a \vee \bar{a}$. Túto nedostatočnosť môžeme nahradiť len tým, že „poukážeme“ na celý systém, že v ňom nenájdeme „niečo iného“. To znamená, že tvrdíme, že v s y s t é m e je niečo iného nemožné, čím jeho platnosť relativizujeme. No každé zrelativizovanie musíme chápať ako obmedzenie na určité pole možností, čo sa zasa dá pochopiť len na širšom pozadí možností. Plyníe teda z obidvoch úvah, že logiku nemôžeme chápať ako hotovú a v sebe uzavretú, ale len na pozadí širšej logiky, o ktorej platí znovu to isté. Preto logiky čisto s logického a nielen noetického hľadiska sú nedokončiteľné. Pomocou našich implikácií sme vyjadrili všetky funkcie, charakterizované dvoma znakmi: ak prvky majú hodnoty „1 1“ alebo „0 0“, majú ich funkcie hodnotu alebo „0“, alebo „1“, ak prvky majú hodnoty rôzne (10, ?1, atď.), tak ich funkcie tiež môžu mať rôzne hodnoty (1 alebo ?, alebo 0). Z charakteristiky plyní, že ak prvky majú tú istú hodnotu „1“ alebo „0“, ich funkcie nemôžu mať hodnotu „?“ , lebo čo ako komplikujeme implikácie s negáciami, vždy $1 \text{ C } 1 = 1, 0 \text{ C } 0 = 1$ a ich negáciou nedostaneme „?“ . Preto sa nazdávame, že Lukasiewiczovo určenie trojhodnotovej logiky maticou implikácie a negácie je nedostatočné, alebo sa nekryje s maticovou trojhodnotovou logikou, v ktorej, berúc do úvahy všetky možnosti priradenia hodnôt k hodnotovým schémam, musíme prijať i funkcie, ktoré pre hodnotovú schému, začínajúcu s „1 1“ a končiacu s „0 0“, majú hodnoty „?“ a „?“ . Na vyjadrenie týchto funkcií musíme prijať nové základné funkcie. Až doteraz sme operovali

negáciou, určenou pozično-negačným radom. Táto negácia je málo pohyblivá. Z trojhodnotovej tabule jednoargumentových funkcií si vyberieme novú funkciu, majúcu maticu:

a	$\sim a$
1	?
?	0
0	1

Táto funkcia sa kryje s Postovou negáciou. Nie je však potrebné, aby sme ju volali negáciou. Jej zákony sú obsažené v matici. Keď Postovo negujeme „1“, dostávame nasledujúcu hodnotu „?“ , t. j. $\sim 1 = ?$, $\sim ? = 0$, čiže od „1“ sme dvoma negáciami došli k nule, čo označujeme $\sim \sim 1 = 0$ a či $\sim^2 1 = 0$. Pomocou tejto negácie ľahko dostaneme funkcie, majúce hodnotu „?“ , keď obidva prvky majú hodnotu „1“. Takou funkciou je napr.: $a C_1 \sim b$. Aby cyklickou negáciou vytvorený systém mal prednosť pred systémom, užívajúcim negáciu, charakterizovanú pozično-negačným radom, musíme dokázať, že cyklickou negáciou môžeme vyjadriť našu prvú negáciu. Je jasné, že k tomu potrebujeme i nejakú dvojargumentovú funkciu. Post si zvolil disjunkciu, definovanú ako $(a C_1 b) C_1 b$. Potom definujeme:¹

$$\bar{a} = \sim^2 \{ \sim^2 [\sim V(a) v a] v \sim^3 a \} v \sim^2 \{ \sim^2 [\sim V(a) v \sim^2 a] v \sim^2 (\sim^2 a) \} v \sim^2 \{ \sim^2 [\sim V(a) v \sim a] v \sim (\sim a) \}.$$

$V(a)$ znamená jednoargumentovú tautologiu, teda funkciu, ktorá má význačnú hodnotu, nech je hodnota argumentu akákoľvek. Ľahko ju môžeme skonštruovať: $V(a) = a v \sim a v \sim^2 a$. Presvedčme sa, aká je hodnota „ $\bar{a}$ “, keď $a = ?$. Dosadíme do definície. Pre prehľadnosť každého člena disjunkcie spracujeme osve.

$$\begin{aligned} & \sim^2 \{ \sim^2 [\sim V(a) v a] v \sim^3 a \} \\ & \sim^2 \{ \sim^2 [\sim (? v 0 v 1) v ?] v \sim^3 ? \} \\ & \quad \sim^2 \{ \sim^2 [\sim (1) v ?] v ? \} \\ & \quad \quad \sim^2 \{ \sim^2 (? v ?) v ? \} \\ & \quad \quad \quad \sim^2 (1 v ?) \\ & \quad \quad \quad \quad \sim^2 1 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{aligned}$$

¹ Z. Zawirski, *Über das Verhältnis der mehrwertigen Logik zu Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *Studia Philosophica*, 1935, 434.

Druhý člen disjunkcie:

$$\begin{aligned}
 & \sim^2 \{ \sim^2 [\sim V(a) \vee \sim^2 a] \vee \sim^2 (\sim^2 a) \} \\
 & \sim^2 \{ \sim^2 [\sim (? \vee 0 \vee 1) \vee 1] \vee \sim^2 1 \} \\
 & \quad \sim^2 \{ \sim^2 (? \vee 1) \vee 0 \} \\
 & \quad \quad \sim^2 (0 \vee 0) \\
 & \quad \quad \quad \sim^2 0 \\
 & \quad \quad \quad ?
 \end{aligned}$$

Tretí člen disjunkcie:

$$\begin{aligned}
 & \sim^2 \{ \sim^2 [\sim V(a) \vee \sim a] \vee \sim (\sim a) \} \\
 & \sim^2 \{ \sim^2 [\sim (? \vee 0 \vee 1) \vee 0] \vee 1 \} \\
 & \quad \sim^2 \{ \sim^2 (? \vee 0) \vee 1 \} \\
 & \quad \quad \sim^2 \{ 1 \vee 1 \} \\
 & \quad \quad \quad \sim^2 1 \\
 & \quad \quad \quad 0
 \end{aligned}$$

Z toho dostávame, že $\bar{?} = 0 \vee ? \vee 0 = ?$. Podobne by sme dokázali, že $\bar{1} = 0$, len všade miesto „a“ by sme dosadili „1“.

Pomocou cyklickej negácie a disjunkcie môžeme skonštruovať ľubovoľnú dvojargumentovú funkciu, t. j. poznajúc hodnotovú tabuľku hocijakej funkcie, môžeme určiť jej štruktúru pomocou dvoch základných funktorov. A hoci Postove konštrukcie sú veľmi složité, predsa predstavujú jedínú dnes známu možnosť vytvárania tautológií a vzájomných vyjadrení jednej funkcie druhou v n-hodnotovej logike. Lukasiewiczov postup, ako sme videli, nie je dostačujúci. Jeho implikáciou a negáciou môžeme síce vyjadriť veľmi rozsiahle n-hodnotové systémy, ale nimi nezachytíme a nesjednotíme všetky možné funkcie, ktoré sa rapídne množia so vzrastaním hodnôt. Musíme si pribrať na pomoc Postovu rozsiahlejšiu logiku. Ňou vystačíme pri n-hodnotových extenzionálnych logikách. Ak však počet hodnôt je veľmi vysoký, Postova metóda sa stáva nadmieru komplikovanou. So systematického hľadiska by bolo zaujímavé, či nejestvuje dvojargumentová funkcia, ktorou sa dá vyjadriť i cyklická negácia a zákon ktorej by bol reprezentantom všetkých n-hodnotových logík. Aby sme mohli problém riešiť i pre vysokohodnotové logiky, museli by sme najprv nájsť zjednodušené konštruktívne metódy na tvorenie pravidiel vzťahov medzi ľubovoľnými funkciami. Dnes len toľko môžeme povedať, že Postova metóda sa dá iste zjednodušiť. Naše maticové operácie boli elementárne a vystačili pri nízkohodnotových logikách. Pri složitejších celkoch budeme musieť modifikovať i pochop maticovej metódy, lebo musíme zmeniť náš postoj k rozsiahlym celkom, t. j. spôsob ich analýzy.

Všetky doteraz uvažované logiky mali presne číselne určené hodnoty a podľa nich i funkcie. Boly to logiky metrické. A pretože hodnoty sa blížili od „0“ k „1“, môžeme ich usporiadať podľa vzťahov „väčší“ a „menší“. Vzniká v nás myšlienka, či sa nedá vystavať logika, ktorá si nevšíma metriku, ale len vzťah nasledovania hodnôt podľa ich veľkosti. Zaiste sa nám tým podarí vystavať presný poriadok medzi hodnotami prvkov, ako sa nám podarilo usporiadať minerálie podľa vzťahu „tvrdší“.

Prvky usporiadame podľa stúpajúcej hodnoty do radu, čím dostávame hodnotové usporiadanie pomocou dvoch vzťahov „<“, „=“; $a < b$ znamená, že hodnota prvku „b“ je v poriadku za hodnotou prvku „a“. $a = b$ znamená, že „a“ i „b“ majú v poriadku to isté miesto. Ak za pravidlá transformácie prijmeme len vzťahy „<“ a „=“, z toho nasleduje (pravidlo formácie), že prvkom v topologickej logike nemôže byť „a“, „b“... , ale vždy len vzťah prvku „a“ k inému, teda k „b“ alebo „c“... podľa „<“ a „=“. A pretože prvky definujeme len týmto vzťahom, môžeme určiť, že každý prvok topologickej logiky musí mať aspoň jednu (a najviac jednu) z troch nasledujúcich foriem: $a < b$, $a = b$, $b < a$.¹ V topologickej logike nemôžeme určiť odstup dvoch častí prvkov; ak v päťhodnotovej logike každej hodnote 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1 priradíme „a, b, c, d, e“, potom vzhľadom na „b“ „c, d, e“ majú ten istý vzťah, sú všetky za „b“. Platí teda $b < c$, $b < d$, $b < e$, hoci odstup „e“ od „b“ je väčší ako odstup „c“ od „b“. Preto jednotlivým častiam prvkov nemôžeme určiť presné miesto v poriadku, ale len ich vzájomnú polohu. Čo sme získali na elasticite, stratili sme na presnosti.

Topologickú logiku chceme vystavať maticovou metódou, a preto musíme určiť maticu pre jedno- a dvojargumentové funkcie. Dostaneme ich i z metrických funkcií, keď si nebudeme všímať metriku. Keby sme chceli vystavať celú topologickú logiku, stretli by sme sa, pre jej veľkú rozľahlosť, s podobnými ťažkosťami ako pri trojhodnotovej logike. Preto sa uspokojíme s udaním matice negácie a náčrtom výstavby matíc implikácie, konjunkcie a disjunkcie. Budeme sa pritom riadiť zásadou, že ak topologická logika je abstraktum metrických logik, tak topologické matice budú abstraktami metrických.

Matica negácie bude veľmi jednoduchá. Ňou sa určuje, aké bude topologické usporiadanie negácie, keď poznáme usporiadanie po-

¹ Prvok v našej logike je $a < b$, časť prvku je „a“, „b“ atď. Prvok v našej logike ako i jeho časti sa definujú len implicitne. Explicitné ich poznanie je umožnené, lebo porovnávame rozličné logiky.

zície. A pretože vždy berieme dva členy prvku a tieto môžu mať tri vzťahy „<, =, >“, tak sa pýtame, aké vzťahy budú mať ich negácie.

(a, b)	$(\bar{a}, \bar{b})$
<	>
=	=
>	<

To znamená, že ak „b“ má väčšiu hodnotu ako „a“, tak negácia „b“ má menšiu hodnotu ako negácia „a“. Experimentálne to môžeme zistiť na hociktovej n-hodnotovej logike. Vezmime ako príklad päťhodnotovú logiku. Nech $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, teda $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$. Hodnota $\bar{a} = 1 - a$, t. j. $\frac{3}{4}$, hodnota $\bar{b} = 1 - \frac{3}{4}$, teda $\frac{1}{4}$, preto $\bar{a} > \bar{b}$.

Složitejšie sú už dvojargumentové funkcie; ani jednu z nich, pre jej rozľahlosť nerozopíšeme celú. Určíme len postup.

Ak sme pri jednoargumentovej funkcii potrebovali dve časti prvkov (a, b), tak pri dvojargumentových funkciách potrebujeme štyri časti dvoch prvkov (a, b, c, d). Aby sme vyčerpali všetky možnosti, musíme časti usporiadať všetkými možnými spôsobmi podľa vzťahov „<, =, >“. Ak ich usporadujeme len podľa vzťahu „<“, dostaneme 4! možností. Jedno také usporiadanie bude napr. $a < b < c < d$. No v tomto usporiadaní sa skrýva šesť možností: (a c), (b d), (a b), (c d), (a d), (b c); teda môže byť $a < c$, $b < d$, $a < b$, ... každému zo šiestich prípadov odpovie určitý vzťah (napr. „>“ alebo „=“) implikácie, disjunkcie atď. Ak máme spomínané usporiadanie $a < b < c < d$, tak prvých šesť možností označíme

(a, c)	(b, d)	(a, b)	(c, d)	(a, d)	(b, c)
<	<	<	<	<	<

Potom implikácia, disjunkcia a konjunkcia budú mať „hodnoty“¹

$a \text{ } C_1 \text{ } c, b \text{ } C_1 \text{ } d$	$a \vee c, b \vee d$	$a \cdot c, b \cdot d$
=	<	<

Tabuľky čítame takto: ak $a < c$, a ak $b < d$, tak hodnota disjunkcie $b \vee d$ je väčšia ako hodnota disjunkcie $a \vee c$.

O správnosti matice sa zasa môžeme presvedčiť na päťhodnotovej logike. Nech $a = 0$, $b = \frac{2}{4}$, $c = \frac{3}{4}$, $d = 1$. $a \text{ } C_1 \text{ } c = 1$, $b \text{ } C_1 \text{ } d = 1$, to znamená, že medzi nimi platí vzťah „=“.

² Tabuľka je od C. H e m p e l a, *Eine rein topologische Form nicht-aristotelischer Logik*, Erkenntnis VI, 1936, 438. No Hempel v svojom krátkom referáte udáva len tento prvý nedokončený riadok.

Vezmime disjunkciu: $a \vee c = 3/4$, $b \vee d = 1$, preto platí $a \vee c < b \vee d$.

Pokúsime sa zostaviť čiastku celej matice, ale budeme oddelene stavať maticu implikácie, disjunkcie atď.

	$(a \vee c, b \vee d)$	$(a \vee d, b \vee c)$	...	$(a \cdot c, b \cdot d)$	...
$a < b < c < d$	$<$	$>$		$<$	
$a < b < d < c$	$>$	$<$		$<$	
$a < c < b < d$	$<$	$>$		$<$	
$a < c < d < b$	$<$	$<$		$<$	
$a < d < b < c$	$>$	$<$		$<$	
$a < d < c < b$	$<$	.		$<$	
$b < a < c < d$	$<$	.		$>$	
$b < a < d < c$	$>$	.		$>$	
$b < c < a < d$	$<$			$>$	
.	.			.	
.	.			.	
$c < a < b < d$	$<$			$<$	
.	.			.	
.	.			.	
$d < a < b < c$	$>$			$>$	
.	.			.	
.	.			.	
.	.			.	

	$(a \supset c, b \supset d)$	$(a \supset d, b \supset c)$	...
$a < b < c < d$	$=$	$=$	
$a < b < d < c$	$=$	$=$	
$a < c < b < d$	$=$	$>$	
$a < c < d < b$	$>$	$=$	
$a < d < b < c$	$>$	$=$	
$a < d < c < b$	$>$	$>$	
$b < a < c < d$	$=$	$=$	
$b < a < d < c$	$=$	$=$	
$b < c < a < d$	$<$	$=$	
$b < c < d < a$	$<$	$<$	
.	.	.	
.	.	.	
$c < a < b < d$	$<$	$>$	
.	.	.	
.	.	.	
$d < a < b < c$	$>$	$<$	

Mnohé prípady sa možno opakujú, ale teraz o to nejde. Chceli sme podať len ukážku. Systematická práca si vyžaduje svoje zvláštne technické metódy.

Zdá sa, že v topologických logikách nemá smysel hovoriť o tautológiách, lebo ako výberová hodnota nás neuspokojuje ani vzťah „<“, ani „=“. V topologických logikách matice teda neslúžia na určenie tautológií, ale, ako to plyní asi z povahy relacionálnych funkcií, na vytvorenie pravidiel uzatvárania, dedukcie.¹ Tak napr. z $a < b$ môžeme uzatvárať na $\bar{b} < \bar{a}$, z $a = b$ na $\bar{a} = \bar{b}$ atď.

8. Dedukcia

Skúmanie dedukcie je vlastne skúmaním povahy analytickej a maticovej metódy. Preto nám tu ani nejde o vyčerpávajúce podania pravidiel dedukcie, ale skôr o povahu logiky ako dedukcie.

Maticová metóda, chápaná ako celok a nie ako časť analytickej metódy, netvorí logický systém; ňou vytvorený systém len môžeme logicky interpretovať. Interpretácia pozostáva v tom, že komplex vzťahov a závislostí, reprezentovaných maticami, chápeme ako analytický inštrument, t. j. v sebe ucelený nástroj, vhodný vyjadrovať naše spôsoby „hovorenia“ o svete, teda vhodný na nepriame zachycovanie a mapovanie reality. Ak zanedbáme inštrumentálny charakter, maticová logika sa nám stane statickou sústavou, ktorej tautologie môžeme pripodobniť postaveniam figúrok na šachovnici. Z jedného postavenia do druhého môžeme prejsť len ak pridáme transformačné pravidlá, t. j. ak udáme pravidlá operácií s baštou, strelcom atď. Správne teda poznamenáva Hempel, že maticovou metódou sa nevystaví logika ako reč s určitými transformačnými pravidlami,² ale len trieda tautológií v systéme. Z toho by nasledovalo, že maticovou metódou sa nedá vystaviť pochop dedukcie. Hovorí sa, že dedukciou získame z platných viet (tautológií) systému nové vety, ktoré, ak sme postupovali korektne, t. j. podľa pravidiel dedukcie, tiež musia byť platné. Ako pravidlo a schéma dedukcie sa obyčajne uvádza

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

¹ C. Hempel, o. c. 439.

² C. Hempel, *Ein System verallgemeinerter Negationen*, Travaux du IX Congrès... de phil. VI, Paris 1937, 30.

čo znamená, že ak A je tautologia a ak $A \supset B$ je tautologia, tak i B je tautologia. Lebo ak $A = 1$, a $A \supset B = 1$, tak i $B = 1$; ak totiž $B = 0$, tak $A \supset B = 1 \supset 0 = 0$, čo je proti predpokladu, že $A \supset B$ je tautologia. Táto úvaha však na justifikáciu dedukcie nestačí. V dedukcii totiž je podstatné to, že A a $A \supset B$ môžeme vynechať, t. j. konklúziu oddeliť od premís a položiť ju medzi ostatné tautologie a tým jej dať samostatnú platnosť. Preto musíme povedať, že B platí, ak platí A , $A \supset B$ a ak platí i samo to oddelenie a dávanie samostatnej platnosti tautológii B , t. j. B je tautologiou, ak i sama jeho pozícia je logická, „tautologická“, čo je len tak možné, že pravidlá dedukcie sú vlastne tautológiami a či, presnejšie, že tautologie sú len časti, formy a spôsoby pravidiel dedukcie. To znamená, že každá tautologia je „formou dôkazu“, ¹ že nemá samostatný význam a teda že vlastne nie je vetou, lebo veta je samostatná a vždy priamo hovorí niečo o niečom; a to sa hovorí *l o g i k o u*. Tautologia nie je to, čo skúmame, ale to, čím skúmame. A také sú i matice; i ony slúžia len na získanie premís, t. j. možností a spôsobov uzatvárania. Mnohí logici ponechávajú tautológiám akýsi samostatný charakter, ² ale správne poznamenávajú, že tautologie musia mať dvojakú úlohu, „musia byť premisami, z k t o r ý c h nasleduje konklúzia, ale i pravidlami uzatvárania, p o m o c o u k t o r ý c h dochádzame ku konklúzii“. ³ Preto logika sa musí postaviť čisto imanentne, internou metódou, ⁴ t. j., aby sme to ukázali na príklade, ak „a“ nasleduje z „b“ a teda môžeme uzatvárať na „a“, tak spôsob uzatvárania pochádza len z týchto dvoch viet („a“ je len symbolom složeniny) a uzáver je len nimi justifikovaný. ⁵ Ostatné vedy, zahrnujúc do toho i matematiku, musia postupovať vonkajšou metódou, opierajúc sa o pravidlá, ktoré nie sú časťami vedy a z vedy. Tým sa rôzni logika od ostatných vied a tak treba chápať i výrok, že metóda logiky sa ne-

¹ "in logic every proposition is the form of a proof". L. Wittgenstein, o. c. 167. Ak chápeme tautologie ako časti, formy, zaradujeme ich tým do širšieho celku, ktorý je práve potrebný na justifikovanie dedukcie. Dávanie samostatnosti tautológii B je operácia vykonaná na B , ktorej by odpovedala výpoveď, ktorá nie je v systéme, v ktorom je B , ale v systéme, hovoriacom o B . Dávanie samostatnosti je posúdenie tautologie B , ktoré preto nemôže byť vyjadrené symbolmi, ktorými sa vyjadrujú B , $A \supset B$ atď. Dávanie samostatnosti tautológiám je mimo nich, je v širšom poriadku, čo dobre odpovedá tvrdeniu, že maticová metóda je časťou, určením analytickej metódy, stojacej na pochope uzatvárania z... na...

² Nazývajú ich „substantive premisses“ B. Russell, o. c. 150.

³ C. Lewis - C. Langford, o. c. 253.

⁴ Porov. A. Bennett, *Formal logic*, New York 1946, 322.

⁵ L. Wittgenstein, o. c. 108.

liši od samej logiky. Preto logiku nebudeme volať deduktívnou vedou, ale jednoducho dedukciou a tautologie (axiómy) nenazveme substitútmi do deduktívnych schém, aby to nevedlo k omylu, že tautologie môžu byť pred schémami, bez nich a schémy bez tautológií. Ale dedukcia je pravidlom (komplexom pravidiel) postupu, je tautologiou inštrumentálne interpretovanou. Až do takto vzniklej dedukcie môžeme niečo dosadiť. Ale to, čo dosadzujeme, už nepatrí do logiky! Logika raz vystavaná môže len slúžiť niečomu, čo ona nie je.

Hotovú dedukciu alebo jej časti prijímajú jednotlivé vedy, aby jej použitím nadobudly jednotu. Cieľom vied je, aby z niekoľko málo viet odvodily ostatné, čím sa veda v určitom smysle stáva substitútom logiky, stáva sa *l o g i c k á*.

Aby sa naše výklady stali celkom jasné, bolo by treba na príklade ukázať dvojakú úlohu tautológií. Pre nedostatok miesta od toho upúšťame a poukazujeme na Russellom rozvedený príklad,¹ (ktorý však tiež nepokladáme za veľmi dostačujúci).

Ak logický systém pokladáme za analytický a ak sa nazdávame, že od hociktorého člena môžeme dôjsť ku hociktorému, musíme za pravidiel dedukcie, t. j. za mostiky od jednej časti k druhej, vziať všetky možné tautologie, čím dochádzame k omnoho širšiemu pochozu dedukcie, než ako sa ona obyčajne chápe. A čím väčšie bude množstvo tautológií, t. j. čím väčšie bude množstvo funkcií, čiže čím budú logiky viachodnotové, tým viac pravidiel a foriem dedukcie budú mať.

Implikácia, ktorou sa obyčajne charakterizuje schéma, je len *s u m á r n y* výraz pre všetky funkcie, ktoré nám umožňujú dôkaz. „Podstatnou vlastnosťou, ktorá sa vyžaduje od implikácie, je, že čo je implikované pravdivou vetou (v našej terminológii: čo je implikované složeninou, majúcou hodnotu „1“), musí byť pravdivé.“² Preto symbol „ $\supset$ “ chápeme ako symbol mnohých funkcií. Napr. ekvivalenciu môžeme pokladať za implikáciu, v ktorej pravdivá výpoveď implikuje pravdivú a nepravdivá len nepravdivú; konjunkciu za implikáciu, v ktorej nepravdivá vôbec neimplikuje atď. Preto implikácia $A \supset B$ v schéme je len symbolom spojenia A s B a prechodu 0 od A k B.

V troj- a viachodnotových logikách okrem rapídne stúpajúceho množstva foriem dedukcie sa stretávame i s iným zjavom. V dvojhodnotovej logike složeniny mali alebo hodnotu „1“ (boly platné),

¹ Russell, o. c. 150n. V nemeckom preklade *Einführung in die mathematische Philosophie*, 151n.

² A. Whitehead - B. Russell, o. c. 94.

alebo „0“ (boly neplatné). V trojhodnotovej logike máme však aj stredné složeniny medzi tautologiami a netautologiami; nazvali sme ich možnými. Tieto nemajú v matici „0“. Ak ich pripustíme i do deduktívneho systému, musíme prijať pravidlo: Ak v složeninách nie je dolná krajná hodnota, tak nebude ani v konklúziách. To znamená, že z možných spojení môžeme uzatvárať na iné možné. Na to sa však nehodia implikácie „ C_1 “ a „ C_2 “. Dokážeme to na príklade. Vezmime si schému

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \quad C_1 \quad B \end{array}}{B}.$$

A a $A \quad C_1 \quad B$ nech majú hodnotu „?“ . Podľa pravidla i B by malo mať hodnotu „?“ . To však naše implikácie nesplňujú, lebo $A \quad C_1 \quad B$ i vtedy má hodnotu „?“ , keď $A = ?$ a $B = 0$; a tak z možných složenín by sme mohli dostať dedukciou neplatné. Preto sme zaviedli „ C_3 “ implikáciu, ktorá pre $1 \quad C_3 \quad 0$ a $? \quad C_3 \quad 0$ má hodnotu „0“, čím implikácia, ak jej zadná časť má hodnotu „0“, nemôže byť premisou.

Deduktívny problém, riešený na tejto rozšírenej základni (pripustenia možných složenín do systému), najmä ak máme na mysli vysokohodnotové logiky, v ktorých je mnoho stupňov možnosti složenín, sa veľmi blíži k problému indukcie a v nekonečnehodnotovej logike asi s ním i splýva. Preto naše mnohohodnotové dedukcie môžu slúžiť ako operácie s vedeckými výpovedami.

III. Modely logík

Ak transformáciami, t. j. povahou premennej, definujeme logický systém, potom problém modelov sa stáva centrálnym problémom logiky. Logika, ktorá by nemala modely, nemala by premenné, nebola by logikou. To znamená, že každá logika má interný vzťah k množine modelov, ktorými súčasne vychádza zo svojej „uzavretosti“.

1. Pojem modelu

Hneď na začiatku sme povedali, že maticová metóda sa stane logickou a maticový systém logikou až interpretáciou. Mnohoraký je význam tohto slova.

Podľa nás pravá interpretácia maticového systému pozostáva v chápaní maticovej metódy ako bližšieho určenia analytického po-

stupu, t. j. v chápaní maticového systému ako analytického operatívneho nástroja. Tým však maticová metóda nestráca svoju všeobecnosť a jej zákony sa môžu aplikovať na hociktoré polia, ako sme to postulovali pri určovaní pojmu logiky. Preto nesúhlasíme s Lewisovým poňatím interpretácie. Lewis sa nazdáva, že čisto matematický maticový systém sa stáva logickým dávaním významu maticovým zákonom. Ak by logika vznikala Lewisovou interpretáciou, čiže priradením významu maticovým zákonom a toto priradenie sa mení interpretáciou, tak maticové zákony by sa síce interpretáciou nemenili, ale menily by sa logické zákony. Aby sme sa vyhli podobným nepresnostiam (menenie logických zákonov pri nepremenlivosti ich štruktúry), budeme rozlišovať interpretáciu od substitúcie. Podľa Lewisa tautologie sa stanú logickými zákonmi,¹ ak napr. za hodnotu „1“ alebo „0“ dosadím výraz „pravdivý“, „nepravdivý“ a pod.

Ak však hodnota predstavuje premennú a ak len dosadením do premennej vstupujeme do logického poriadku, tak sa tajomstvo logiky skrýva v dosadenom člene, čím by sme logiku pokladali za nevšeobecnú alebo málo všeobecnú disciplínu, ktorá svoju korektnosť a jasnosť dostáva z nelogických oblastí (podobné chápanie sa dá brániť, ale sa nazdávame, že je menej prirodzené). Naše analytické chápanie matice sú už logické a dosadením za ich premenné len aplikujeme logiku na iné polia. Ak za premenné dosadíme konštanty alebo iné premenné s väčším konštantným aspektom a ak dosadené konštanty tvoria s funktormi koherentnú sústavu, tak ju nazveme *m o d e l o m s y s t é m u*. Lewisovou interpretáciou nevzniká teda logika, ale len jeden jej model. Ak si uvedomíme, čo sme už prv povedali, že v analytickej metóde musíme urobiť celý rad ústupkov, tak vidíme, že i naše dvoj- a mnohohodnotové logiky sú vlastne modelmi, t. j. substitúciami do oveľa širších poriadkov, lebo majú konštantné funktory, ktoré môžeme pokladať za výsledok substitúcií. Modelov systému môže byť väčšie množstvo a môžu mať rozličné stupne všeobecnosti. Naš najvšeobecnejší model, ktorého systém nepoznáme alebo nekonštruujeme, nazvime si, hoci to nie je presné, „logickým systémom“, a modelmi volajme už menej všeobecné útvary. Nazvime ich *s ú s t a v y*. Potom hovoríme, že sústavy modelujú systém. Všetky dôkazy, platné v systéme, sú platné i v sústavách a ak zasa nájdeme koherentnú sústavu, tak aj jej systém musí byť koherentný. Tieto poznatky majú veľký význam, ak ide o dôkaz neprotirečiteľnosti veľmi všeobecných logických systémov,

¹ C. Lewis - C. Langford, o. c. 23In.

ba i širokých sústav, koherenciu ktorých priamo nemôžeme dokázať. Všimnime si niektoré sústavy. Najprv dvojhodnotové.

2. Dvojhodnotové modely

V dvojhodnotovom systéme sme hovorili o prvkoch, ktoré nám predstavovali veľmi široké premenné. Môžeme do nich dosadiť výrazy: výpoveď, veta, súd, myšlienka a pod. Všetky tieto výrazy voláme substitútmi. A pretože vlastnosti (hodnoty) prvkov musia mať k prvkom presný jednoznačný vzťah, i substitúty hodnotovej premennej musia mať podobný vzťah k substitútom prvkov. To isté platí i o substitútoch prvkov a funktoch. Proti týmto pravidlám mnohí hrešia tým, že za prvky dosadia výrazy alebo celky, ktoré sú neslučiteľné s hodnotami a funktormi.

Keď sme za prvok dosadili výpoveď, ostáva nám ešte mnoho možností dosadenia za hodnotu. Všetky substitúty budú mať spoločnú tú vlastnosť, že budú deliť výpovede na dve vzájomne sa vylučujúce triedy. Túto podmienku spĺňujú výrazy: pravdivý — nepravdivý, áno — nie, čím z logického systému vzniká výpovedný počet. A aby sme sa ešte viac priblížili hovorovej reči, i do funktoch vkladáme rečové častice.

Že „pravda — nepravda“ je len substitútom v dvojhodnotovom systéme, vidieť z toho, že je veľmi mnoho dvojíc výrazov, ktoré spĺňujú tie isté zákony, t. j., ak ich dosadím namiesto výrazov „pravda — nepravda“ do všetkých složenín, vzniká nová koherentná sústava, majúca tie isté zákony ako sústava s výrazmi „pravda — nepravda“. Je to znakom, že pre všetky tieto výrazy jestvuje spoločná zákonitosť; výrazy, vyjadrujúce tie isté logické vlastnosti ako „pravdivý — nepravdivý“, sú napr. „dobrý — nedobrý“, „korektný — nekorektný“, „empirický — neempirický“. Potom tautologiu $a \equiv b$ môžeme modelovať ako výpovede: „alebo výpoveď a , alebo výpoveď b je empirická“, „ak a nie je empirická výpoveď, tak b je empirická“; tieto výpovede sú ekvivalentné. Ak za prvok nedosadím výpoveď, ale napr. predmet, potom za hodnotu môžeme dosadiť napr. „zlatý — nezlatý“.

Keby pri dosadzovaní vznikly ťažkosti, bolo by to znakom, že hovorová reč je len čiastočným modelom dvojhodnotovej sústavy a že dvojhodnotová sústava je neadekvátnym inštrumentom na zmapovanie bohatstva skutočnosti.

Podobnými substitúciami dôjdeme až k (parciálnej) logike skutočných predmetov, ktorú niektorí volajú fyzikou hocijakého ob-

jektu a kánonom našich perceptívnych súdov o existencii.¹ To isté tvrdí i Reichenbach.² Teda výrazy ako „byť — nebyť“, „jestvovať — nejestvovať“, ak sa dokonale vylučujú, nemôžeme užívať v inej logike ako v dvojhodnotovej. Preto nepresne by sa vyjadroval, kto by tvrdil, že pravdepodobnosť môjho pobytu v Bratislave v r. 1950 je $\frac{1}{2}$ a môjho nepobytu tiež $\frac{1}{2}$. Lebo ak sa pobyt v našom prípade rovná jestvovaniu v Bratislave, tak v udanom čase alebo budem jestvovať, alebo nebudem tam jestvovať. Z Lukasiewiczových tvrdení³ by nasledovalo len to, že nám nejde o určenie jestvovania, ale o určenie n u t n é h o jestvovania, alebo že ide o naše výpovede (t. j. o naše vedomosti) o mojom jestvovaní v r. 1950. Dotýkame sa tým už problematiky modelov viachodnotových logík. No ešte sa zastavíme pri jednom dôležitom modeli dvojhodnotovej logiky, pri rozšírenom vetnom počte (predikátnom, funkčnom počte).

Tento počet vzniká dosadením nových útvarov za premenné v dvojhodnotovom systéme. Vo výpovednom počte sme vety pokladali za nedeliteľné celky. Teraz ich môžeme považovať za vlastnosti nejakých nových nižších prvkov, ktoré budeme označovať ciframi 1, 2, 3...; no tu čísla neznamenajú logické hodnoty, ale množstvo individuí, majúcich určitú vlastnosť A, B, ... čiže množstvo individuí tou vlastnosťou sjednotených. Počet individuí píšeme za označením vlastnosti. Teda A (1, 2, 3...), čo čítame: Individuá 1, 2, 3... majú vlastnosť A. Prechod do rozšíreného výpovedného počtu je urobený tým, že nielen hodnota je funkciou prvku (vety), ale i prvok je funkciou individuí, teda tým, že zavedieme novú individ u á l n u p r e m e n n ú, ktorú teraz budeme označovať symbolmi „a, b, c...“ Tieto symboly, vystupujúce len v zátvorkách po A, B..., nie sú totožné so symbolmi a, b, c vo výpovednom počte. Je jasné, že všetky zákony systému budú i zákonmi rozšíreného počtu. Napr. ak a v ā je tautologiou, tak ňou je i $A(a) \vee \overline{A(a)}$ a $A(a, b, c) \vee \overline{A(a, b, c)}$; nech už dosadíme za A hocijakú vlastnosť a za individuálne premenné hocijaké individuá.

Ak však chceme presnejšie určiť, čo môžeme alebo chceme dosadzovať, tak voľnosť premennej obmedzujeme a vytvárame z nej viazanú premennú. Za viazanú premennú už nemôžeme dosadzovať, lebo vlastne už stratila vlastnosti premenných a predstavuje nám

¹ L. Rougier, *La relativité de la logique*, The Journal of Unified Science, 1939, 208.

² Reichenbach, o. c. 373.

³ J. Lukasiewicz, *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, C. R. Soc. Sciences. Cl. III, 1930, 64.

zákon určitého okruhu. Aby sme viazané premenné rozlíšili od voľných premenných, označujeme ich písmenami z konca abecedy: $x, y, z, u, v, \dots$, kým voľné premenné: $a, b, c, \dots$. Ak napr. tvrdíme, že všetky indivíduá majú vlastnosť A , tak tie indivíduá sme tým i určili, preto musíme použiť viazanú premennú, ktorú píšeme pred vlastnosť: $(x) A (x)$, čo čítame: pre všetky „ x “ platí, že majú vlastnosť A . Ak vlastnosť platí len pre niektoré „ x “, tak to značíme: $(Ex) A (x)$. Ak A platí pre všetky indivíduá, tak platí i pre indivíduum $1, 2, 3, \dots$, a preto $(x) A (x)$ môžeme považovať za ekvivalentné s $A (x_1) \cdot A (x_2) \cdot A (x_3) \dots A (x_m)$, alebo $A (1) \cdot A (2) \cdot \dots \cdot A (m)$, kde „ m “ je celým číslom. Ak A platí len pre niektoré „ x “, tak platí alebo pre prvé alebo pre druhé... alebo pre m -té indivíduum, preto $(Ex) A (x) \equiv A (1) \vee A (2) \vee \dots \vee A (m)$. Pomocou dvojhodnotového systému môžeme dokázať vety: $(x) A (x) \supset A (a)$, $A (a) \supset (Ex) A (x)$, ktoré s tautologiami výpovedného počtu a s upravenými pravidlami dedukcie a dosadzovania stačia na výstavbu celého rozšíreného počtu. Do iného svetla sa dostáva v našom počte i otázka tautologie. Môžeme rozlišovať tautologie pre každý okruh indivíduí a tautologie v určitom okruhu indivíduí. Dôležité je i určiť, pre aký počet indivíduí je veta tautologiou, t. j. určiť, pre ktoré indivíduá, dosadené za premennú vlastnosť, je pravdivá a pre ktoré je nepravdivá. To znamená, že ak predpokladáme konečný počet indivíduí, tak tautologickosť môžeme dokázať kombinatorikou, vyskúšajúc všetky prípady.¹ Ak m je počet indivíduí a k je počet individuálnych premenných vlastností, ktorá môže mať len dve hodnoty, tak je možných 2^{mk} prípadov, ktoré treba preskúšať. Ľahko to môžeme ukázať. Vezmime si ako príklad ekvivalenciu: $(\bar{x}) A (x) \equiv (Ex) \bar{A} (\bar{x})$, t. j. vetu, že vety „nie pre všetky „ x “ platí A “ a „pre niektoré „ x “ neplatí A “ sú ekvivalentné. Vezmime len dve indivíduá. Teda $(x) A (x)$ je ekvivalentné s $A (1) \cdot A (2)$. Potom $(\bar{x}) A (x) \equiv \bar{A} (1) \cdot \bar{A} (2); (Ex) \bar{A} (\bar{x}) \equiv \bar{A} (1) \vee \bar{A} (2)$. Celá formula bude: $\bar{A} (1) \cdot \bar{A} (2) \equiv \bar{A} (1) \vee \bar{A} (2)$. Miesto $A (1)$ môžeme písať A_1 a miesto $A (2)$, A_2 , čím dostaneme $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \equiv \bar{A}_1 \vee \bar{A}_2$. Konečne miesto A_1 a A_2 môžeme písať A, B , čím dostávame tautologiu výpovedného počtu $\bar{A} \cdot \bar{B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$, dokázateľnú štyrmi krokmi, ako to plynie z 2^{mk} , kde $m = 2$ a $k = 1$.

Vezmeme si iný príklad. $(x) A (x, x) \supset (x) (Ey) A (x, y)$. Pre dve indivíduá platí $A (1, 1) \cdot A (2, 2) \supset [A (1, 1) \vee A (1, 2)] \cdot [A (2, 1) \vee A (2, 2)]$ ($A_{1,1} \cdot A_{2,2} \supset [(A_{1,1} \vee A_{1,2}) \cdot (A_{2,1} \vee A_{2,2})]$). Ak vlastností s rozličnými indexmi považujeme, čo sa ich hodnoty týka, za rozlišovania sa možné, tak poslednú vetu môžeme nahradiť vetou z výpovedného

¹ Hilbert - Bernays, o. c. I, 9

kalkulu $(A \cdot B) \supset (A \vee C) \cdot (D \vee B)$, ktorá je tautológiou. Obidve uvažované vety rozšíreného kalkulu boli tautologie pre ľubovoľný počet individuí, ale poznáme i vety, platiace len pre jedno, dve, tri individúa. Napr. veta $(x) A(x) \vee \overline{A(a)}$ platí len pre jedno individuum¹ $A(1) \vee \overline{A(1)}$. Pre dve individúa vychádza veta: $[A(1) \cdot A(2)] \vee A(1)$ alebo veta: $[A(1) \cdot A(2)] \vee A(2)$. Ani jedna z nich nie je tautológiou, lebo neplatí, že $(A \cdot B) \vee A$; a $(A \cdot B) \vee B$, ako to ľahko vidíme na pripojenej tabuľke.

A	B	$A \cdot B$	$(A \cdot B) \vee A$	$(A \cdot B) \vee B$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	0	0	0

Veta $(x) A(x) \vee (x) [\overline{A(x)} \vee B(x)] \vee (x) [\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}]$ neplatí pre tri individúa, lebo nie je tautológiou veta $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \vee (\overline{A_1} \vee B_1) \cdot (\overline{A_2} \vee B_2) \cdot (\overline{A_3} \vee B_3) \vee (\overline{A_1} \vee \overline{B_1}) \cdot (\overline{A_2} \vee \overline{B_2}) \cdot (\overline{A_3} \vee \overline{B_3})$, a to napr. pre hodnoty

A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0

⋮
⋮
⋮
⋮

Platí však pre dve individúa, lebo $(A_1 \cdot A_2) \vee (\overline{A_1} \vee B_1) \cdot (\overline{A_2} \vee B_2) \vee (\overline{A_1} \vee \overline{B_2}) \cdot (\overline{A_2} \vee \overline{B_1})$ je tautológiou.

Ťažké sú dôkazy tautologickosti logických ekvivalentov aritmetických viet, ktorých okruh nie je konečný. Nemusíme hádam pripomínať, že rozšíreným počtom, stojacim na subjekt-predikátovej štruktúre viet, užívajúcej pochop subsumpcie subjektu pod predikát, sme sa priblížili ku klasickej logike. Celú ju môžeme vyjadriť v našom rozšírenom počte.² Pri bližšom skúmaní však zistíme, že klasická logika v sebe skrýva viac na seba nezredukovateľných poriadkov, t. j. rozpadáva sa na viac logík. Ak to dokážeme, tak tým sme súčasne ukázali, že musíme pripustiť viac logík, aby sme mohli sformovať

¹ Hilbert - Bernays, o. c. 121.

² Ďalšou interpretáciou dvojhodnotového systému by mohol byť triedny počet; tento sa však dá vyjadriť v termínoch rozšíreného počtu.

a „zlogizovať“ naše myslenie.¹ Klasická logika uznáva modálne výpovede. Ak máme dokázať, že modálne logické útvary sa neriadia dvojhodnotovými počtami, stačí dokázať, že modálne logiky, v ktorých operujeme len s dvojhodnotovými funktormi a maticami, vedú k zničeniu modalít, t. j., že ak za dvojhodnotové premenné dosadíme modálne celky, tieto sa nám transformáciami ničia. To je znakom, že modalitty sú útvary, ktoré musíme zaradiť do iného celku. Na formulovanie modálneho systému musíme určiť základné prvky a ich spojenia. Základný prvok bude „Ma“, čo znamená, že „je možné a“. Možnosťou a negáciou môžeme definovať ostatné modalitty. Tak „možné, že nie a“ budeme symbolizovať „MNa“; „nie možné, že a“ bude „NMa“, a „nutné, že a“ bude „NMNa“. Základné vety, charakterizujúce celý systém, sú takéto:

1. Ak nie je možné, že a, tak nie a.

2. Keď niečo je, súčasne nemôže nebyť, čo je ekvivalentné s vetou ak nie a, tak vtedy nie je možné, že a.

3. Pre určité a je možné, že a, je však súčasne možné, že nie a.

Môžeme ich symbolizovať:

1. $NMa \supset Na$.

2. $Na \supset NMa$

(Ea) $Ma \cdot MNa$.

Pri dokazovaní budeme užívať len prvé dve modálne vety, niektoré tautologie dvojhodnotového výpovedného počtu, pravidlá dosadzovania a dvojhodnotovú dedukciu. Tautologie si explicitne uvedieme:

3. $(Nb \supset Na) \supset (a \supset b)$.

4. $(Na \supset b) \supset (Nb \supset a)$.

5. $(a \supset Nb) \supset (b \supset Na)$.

6. $(a \supset b) \supset [(b \supset c) \supset (a \supset c)]$.

Objasníme si spôsob postupu.

3 b / Ma * 1 $\supset$ 7 znamená, že vo vete 3 premenná b sa nahradí novou premennou Ma a tak vzniklá veta (oddelená symbolom *) je implikácia, ktorej predná časť je veta 1. a zadná časť veta 7.

¹ Tento dôkaz sa neopiera o noetiku, je čisto logický; predpokladá len jestvovanie a oprávnenosť modalít v našom myslení.

² J. L u k a s i e w i c z, o. c. 66n. Pridržiavame sa jeho postupu, ktorý všetci pokladajú za veľmi presný a logicky ho nikto nevyvrátil. Užívame len našu symboliku. Pre lepšiu prehľadnosť ponechávame len Lukasiewiczovo označenie negácie. Naším označením MNa by sme písali $\bar{M}a$, NMa by bolo $\bar{M}a$, NMNa by bolo $\bar{M}\bar{a}$ a konečne $Na = \bar{a}$. Pochop možnosti sa určuje len spôsobom jeho užívania, teda implicitne. Viac o ňom Č e r v e n k a, o. c. 80n.

Preto dedukciou môžeme dostať novú vetu, ktorú práve označujeme číslom 7. Vykonalíme dosadenie a dedukciu:

$$(NMa \supset Na) \supset (a \supset Ma).$$

Za jednu premisu použijeme práve túto vetu a za druhú premisu vetu 1. Dostávame dedukciou:

$$NMa \supset Na$$

$$(NMa \supset Na) \supset (a \supset Ma)$$

$$a \supset Ma.$$

Vetu 7. sme dostali dosadením do schémy

$$\frac{a \quad a \supset b}{b},$$

kde veta „a“ schémy nám predstavuje našu vetu $NMa \supset Na$ a „ $a \supset b$ “ reprezentuje $(NMa \supset Na) \supset (a \supset Ma)$, v ktorej $a \supset Ma$ je práve „b“ schémy. Preto ju môžeme písať ako samostatnú tautologiu.

$$7. a \supset Ma.$$

V ďalšom postupe už nebudeme konať dedukcie, ale hneď napíšeme len jej konklúziu ako samostatnú vetu s nasledujúcim číslom. Teda:

$$7 a / Na * 8.$$

$$8. Na \supset MNa$$

$$4 b / MNa * 8 \supset 9.$$

$$9. NMNa \supset a$$

$$6 a / NMNa, b / a, c / Ma * 9 \supset (7 \supset 10).^1$$

$$10. NMNa \supset Ma$$

$$4 a / MNa, b / Ma * 10 \supset 11.$$

$$11. NMa \supset MNa.$$

To boli dôsledky z vety 1. Teraz si pozrime dôsledky z vety 2.

$$3 b / a, a / Ma * 2 \supset 12.$$

$$12. Ma \supset a$$

$$12 a / Na * 13.$$

$$13. MNa \supset Na$$

$$5 a / MNa, b / a * 13 \supset 14.$$

$$14. a \supset NMNa$$

$$6 a / Ma, b / a, c / NMNa * 12 \supset (14 \supset 15).$$

$$15. Ma \supset NMNa$$

$$5 a / Ma, b / NMa * 15 \supset 16.$$

¹ To znamená, že vo vete 6. najprv dosadíme za „a“, potom za „b“ a za „c“.

16. $MNa \supset NMA$.

Z implikácií

$a \supset Ma$

$Ma \supset a$

$a \supset NMNa$

$Ma \supset NMNa$ atď.

musíme uzatvárať, že „a“, „Ma“, „NMNa“ sú ekvivalentné, čím sme vlastne vylúčili modalitu, urobili ich zbytočnými a teda ukázali, že pre modálnu logiku nestačí dvojhodnotový počet. K tomu istému výsledku dôjdeme, ak modalitu pokladáme za jednoargumentové funkcie. Ak si potom uvedomíme, že v dvojhodnotovej logike sú možné len štyri jednoargumentové funkcie, museli by sme niektoré modalitu vylúčiť, alebo ich identifikovať.

Keby sme k dokazovaniu pribrali i tretiu základnú modálnu vetu: (Ea) $Ma \cdot MNa$, prišli by sme k nemožnému uzáveru, lebo ako konklúzie by sme dostali vety „a“ a „Ma“, t. j. všetky výpovede by boli platné a platné by boli i všetky možné výpovede, čím by súčasne platila „a“ a „Na“.

Je preto oprávnený pokus vkladať modalitu do trojhodnotového počtu, čím by bol tento i modelovaný. Pravdaže, bol by to len jeden z možných modelov.

3. Trojhodnotové a viachodnotové modely

Aby sa nám podaril pokus trojhodnotovú logiku modálne modelovať, musíme definovať „možnosť“ (Ma) trojhodnotovými maticami. Staršiu dlhšiu definíciu Lukasiewiczovu nahradil kratšou Tarski, ktorý definuje možnosť $Ma = Na \cdot C_1 a$.¹ Tento výraz má hodnotu „0“, keď „a“ má hodnotu „0“, inak hodnotu „1“. Tým sme definovali i iné modalitu. Tak $NMa = N(Na \cdot C_1 a)$, $MNa = a \cdot C_1 Na$, $NMNa = N(a \cdot C_1 Na)$, t. j. výpoveď je nutná, keď neobsahuje v sebe vlastnú negáciu.

Vety 1., 7.—11. budú i ďalej platné. Siedmu vetu môžeme odviesť z tautologie $a \cdot C_1 (b \cdot C_1 a)$; ak „b“ nahradíme s „a“, dostaneme $a \cdot C_1 (a \cdot C_1 a)$, ale $a \cdot C_1 a = Ma$, čím dostávame $a \cdot C_1 Ma$, z ktorej môžeme odvodiť vety 8.—11. No vety 2., 12.—16. nie sú platné, lebo napr. veta 12. $Ma \cdot C_1 a$, t. j. $(a \cdot C_1 a) \cdot C_1 a$, ak $a = ?$, má hodnotu „?“ . Ale veta 2. predsa nie je nesprávna. Že sme ju v dvojhodnotovom počte nemohli iným spôsobom formulovať, je vinou počtu samého. A hoci neplatia vety $a \cdot C_1 NMNa$, $Na \cdot C_1 NMa$, predsa platia

¹ V dvojhodnotovej logike platí $\bar{a} \supset a \equiv a$; no nie v trojhodnotovej logike.

$a C_1 (a C_1 NMNa)$, $Na C_1 (Na C_1 NMa)$. Posledné dve výpovede by sme mohli odvodiť z trojhodnotových tautológií, no stačí keď tabuľkami ukážeme, že prvá je tautologiou, t. j., že platí $a C_1 [a C_1 (a C_1 \bar{a})]$.

a	$\overline{a C_1 \bar{a}}$	$a C_1 (\overline{a C_1 \bar{a}})$	$a C_1 [a C_1 (\overline{a C_1 \bar{a}})]$
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
?	0	?	1
.			.
.			.
0	0	1	1

V dvojhodnotovej logike je spomínaný postup nemožný, lebo v nej platí ekvivalencia $a \supset (a \supset b) \equiv a \supset b$; ak za „b“ by sme dosadili NMNa, tak by „platilo“ $a \supset (a \supset NMNa) \equiv a \supset NMNa$; v trojhodnotovej logike spomínaná ekvivalencia neplatí. No to neznamená, že v trojhodnotovej logike nemôžeme dôjsť od „a“ k NMNa, ale môžeme to urobiť len dvojnásobnou dedukciou, čím je zdôraznené, že len vtedy je NMNa, keď už „a“. Tým sme súčasne i dokázali, že slovné znenie vety 2. bolo správne. Správna je teda i veta: „Nemám pri sebe pero, teda nie je možné, aby som teraz mal pri sebe pero.“ Len nesmieme z nejestvovania prechádzať do jestvovania a naopak, lebo ten prechod je len dvojhodnotový. Z možnosti nemôžeme uzatvárať na bytie, lebo neplatí $Ma C_1 a$.

Tretiu základnú modálnu vetu môžeme tiež vyjadriť trojhodnotovou logikou a zistiť, že je tautologiou.

Podobne môžeme i logiky o viac modalitách a modálne logiky o modalitách chápať ako n-hodnotové extenzionálne logiky, t. j. tieto n-hodnotové logiky nájdú v modálnych výpovediach svoj model (a mnoho ráz i smysel) a modálne výpovede nájdú v nich presnosť.

Modalities sme definovali implicitne. Ak hodnoty troj- a viac-hodnotovej logiky určíme explicitne, dostaneme ďalšie modely.

V trojhodnotovej logike nemôžeme za hodnoty „1, ?, 0“ dosadiť dvojice vylučujúcich sa výrazov, ako sú „pravda — nepravda“, lebo tým by sme nevyčerpali všetky možnosti, alebo by sme trojhodnotový systém považovali za dvojhodnotový + niečo, čím by stratil vnútornú jednotu. Pridaním jedného nového člena do systému sa mení celý systém. Preto, ak sme pridali novú hodnotu, tým sme zmenili i ostávajúce dve hodnoty a nasledovne sa zmenily i substitúty, t. j. zmeneným hodnotám odpovedajú iné triedy a oblasti substitútov. V ohromnom množstve trojhodnotových sústav môžeme rozlišovať viac druhov. Sú to modely subjektívne a objektívne,

potom modely, ktoré sa dajú zredukovať na dvojhodnotové sústavy a modely, ktoré nie sú schopné podobnej redukcie.

Subjektívne modely vytvárajú z trojhodnotového systému sústavu o našom poznaní, a preto sú spôsoby hovorenia o empirických vetách. Vety samy sú alebo pravdivé, alebo nepravdivé, lebo priamo alebo nepriamo sa vzťahujú na sféru existencie. Ale naše mená, reprezentujúce vety, a naše poznania viet umožňujú širšiu škálu. Alebo p o z n á m e, že vety sú pravdivé, alebo poznáme, že sú nepravdivé, alebo ani nepoznáme, že sú pravdivé, ani nepoznáme, že sú nepravdivé. Teda alebo máme istotu, že sú pravdivé alebo nepravdivé, alebo máme pochybnosť. Odpovedá to trom postojom poznania: afirmácia, negácia, dubitácia. Podľa toho za hodnotu „1“ môžeme dosadiť „istotne pravdivá“ (výpoveď o...), za „0“ „istotne nepravdivá“ a za „?“ „pochybná“ (ani istotne pravdivá, ani istotne nepravdivá). A pretože sa tieto tri postoje vylučujú a vyčerpávajú všetky možnosti, je naša substitúcia možná. Ťažšie je to už so substitúciou častíc hovorovej reči do funktorov. Niektoré rečové výrazy skôr inklinujú k dvojhodnotovosti, iné k mnohohodnotovosti. Preto si vždy musíme všimnúť matice funkcií, aby sme neupadli do nekoherencií.

V päťhodnotovej logike za hodnoty môžeme substituovať výrazy:¹

za hodnotu 1 výpovede „a“ dáme „a je istotne pravdivá“,
ak $a = \frac{3}{4}$, tak „a je viac pravdepodobná ako nie, ale nie istá“,
ak $a = \frac{2}{4}$, tak „a je rovnako pravdepodobná ako nepravdepodobná“,
ak $a = \frac{1}{4}$, tak „a je viac nepravdepodobná ako pravdepodobná,
ale nie je určite nepravdivá“,
ak $a = 0$, tak „a je isto nepravdivá“.

Tým sme do logiky voviedli veľmi dôležitý pochop: p r a v d e p o d o b n o s ť. Je veľké množstvo chápaní pravdepodobnosti² a jej rozvinutia. A pretože počet pravdepodobnosti môže byť modelom mnohohodnotových logík, dostaneme i veľké množstvo modelov.

Vezmime si len najjednoduchší prípad a najobyčajnejšie chápanie pravdepodobnosti. Pravdepodobnosť (p) sa definuje ako pomer priaznivých prípadov k prípadom možným. Opačná pravdepodobnosť (p') je pravdepodobnosť, že nenastane zjav, ktorého pravdepodobnosť je p . $p' = 1 - p$. Úhrnná pravdepodobnosť, že nastane jeden zo vzájomne sa vylučujúcich zjavov o pravdepodobnosti $p_1, p_2, \dots, p_m$, je $p = p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_m$. Složitá pravdepodobnosť, že súčasne

¹ Lewis - Langford, o. c. 230.

² Porov. napr. K. P o p p e r, *Logik der Forschung*, Wien 1935, 95 n.

nastane viac zjavov o pravdepodobnostiach $p_1 \dots p_m$, bude $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$.

Mnohohodnotovú logiku môžeme modelovať pravdepodobnostným počtom takto: Hodnoty modelujeme pravdepodobnosťou, funkčtóry matematickými operáciami pravdepodobnosti. Pravdepodobnostná logika (pravdepodobnostný model logiky), ktorú tu načrtujeme, bude zredukovateľná na dvojhodnotovú logiku. To je možné len tak, že výpoveď mnohohodnotovej logiky budeme chápať ako skrátenú formu množiny $(n - 1)$ dvojhodnotových výpovedí. Ak sú všetky dvojhodnotové výpovede pravdivé, tak n -hodnotová výpoveď bude mať hodnotu „1“. Ak sú všetky okrem jednej pravdivé, n -hodnotová výpoveď bude mať hodnotu $n-2/n-1$, čím hodnotu n -hodnotovej výpovede určujeme počtom pravdivých výpovedí, jestvujúcich v množine pravdivých i nepravdivých dvojhodnotových výpovedí, čím súčasne hodnotu mnohohodnotovej výpovede modelujeme pravdepodobnosťou.¹ Z porovnania pravdepodobnostného počtu s logikami dostávame, že opačná pravdepodobnosť je modelom negácie, úhrnná pravdepodobnosť modelom disjunkcie a složitá pravdepodobnosť konjunkcie. Pri úhrnnej pravdepodobnosti môžu nastať prípady kríženia a krytia. Odpovedajú im v trojhodnotovej logike disjunkcie „ v_1 “ a „ v_2 “, z ktorých prvá sa modeluje sčítaním vylučujúcich sa prípadov (a preto $\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = 1$) a druhá sčítaním kryjúcich sa prípadov (preto $\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$). Možnosti kríženia sa zväčšia, ak postúpime k vyšším logikám; všetky budú modelovať množinu disjunkcií, ktoré budeme mať v týchto logikách.²

Ďaleko by nás viedlo skúmanie složitejších pochopov pravdepodobnosti a pravdepodobnostných logík, ako napr. Reichenbachova logika, ktorá je asi najadekvátnejším dnes známym modelom nekonečnehodnotovej logiky a ktorú môžeme nazvať „logikou vedeckého poznania“.³

IV. Logiky

V predchádzajúcich častiach sme si všímali skôr noetických požiadaviek množstva logík a ich technickej výstavby. V tejto časti poukážeme na niektoré imanentne logické požiadavky.

¹ Z. Zawirski, *Les rapports de la logique polyvalente avec le calcul des probabilités*, Actes du congrès internat. d. ph. sc., Paris 1936, 45n.

² Tým zostaneme i v extenzionálnej logike a vyhneme sa námietkam A. Tarskeho, *Wahrscheinlichkeitslehre und mehrwertige Logik*, Erkenntnis I, 1935, 175.

³ H. Reichenbach, o. c. 367n.

V predchádzajúcich výkladoch sme už ukázali, že zákon o vylúčení tretieho dvojhodnotovú logiku zaraďuje do širšieho celku. Teraz to len zovšeobecňime. V každej logike platí zákon o vylúčení $n + 1$ hodnoty. Ak $n + 1$ hodnota, alebo n plus prvé, má mať zmysel, môžeme o nej hovoriť, čím hovoríme o širšej oblasti (i keď hovoríme o jej negovaní a negatívne), ako je oblasť n -hodnotová. O „ $n + 1$ “ hodnote nemôžeme hovoriť n -hodnotovou oblasťou, lebo v nej nie je obsažený pochop $n + 1$ hodnoty (nie je v nej pochop toho, čo v nej nie je). Preto každú logiku, nakoľko sa dá vyjadriť, musíme vyjadriť širšou oblasťou, čím pripúšťame možnosť našej logiky a logického hovorenia o našej logike, ktoré hovorenie alebo patrí do novej širšej logiky, alebo je širšou logikou — metalogikou našej logiky.

Ako absolutistická logika prichádza do úvahy len dvojhodnotová logika, a teda stačí len u nej poukázať na nemožnosť absolutizmu. Viachodnotové logiky totiž nevyhnutne požadujú dvojhodnotovú metalogiku ako jediný spôsob svojej formulácie,¹ čím súčasne svedčia o vlastnej relativite. Každá logika musí mať zákon hodnôt, ktorý sa dá definovať len exkluzívnym „alebo“, ktoré je však možné len v dvojhodnotovej logike. Keby sme zákon hodnôt neformulovali exkluzívnym „alebo“, mohol by nastať prípad, že prvok by mal viac protikladných hodnôt, čo by mohlo zapríčiniť nekoherenciu systému, alebo by doviedlo až do chaosu a či do zničenia samej logiky. Alebo (najmä ak by sme hodnoty definovali ako argumenty funktora „alebo“), užíjúc neexkluzívne „alebo“, umožnili by sme, aby sa niektoré hodnoty mohli kryť a identifikovať, čo by znamenalo možnosť redukcie n -hodnotových logík na $n - 1$ hodnotové a postupne až na dvoj- a jednohodnotovú logiku, čiže zničenie mnohohodnotových systémov.

Exkluzívne „alebo“ môžeme však vyjadriť len dvojhodnotovou logikou a pomocou dvojhodnotovej negácie. Pripustíme, že zákon hodnôt sa dá vyjadriť trojhodnotovou logikou. To znamená, že sa musí dať vyjadriť i tou jej časťou, ktorá sa líši od dvojhodnotovej logiky, t. j. v ktorej sa objavuje hodnota „?“ , lebo keby sa hodnota „?“ nespela objaviť, trojhodnotová hodnotová schéma a trojhodnotové matice by prešli v dvojhodnotové, a my by sme tým dosiahli svoj cieľ. Negácia „?“ je „?“ . Disjunktívne pri zákone hodnôt, dávame prvku jednu hodnotu a negujeme druhé, ale negáciou a súčasne disjunkciou tvrdíme, že prvok môže mať i iné hodnoty, čím i tvrdíme, že tieto hodnoty existujú. Podľa trojhodnotovej logiky vylúči

¹ Hoci na ich priradenie k realite je lepšia pravdepodobnostná Reichenbachova logika.

druhú hodnotu, t. j. negujúc ju, pokladali by sme ju za tú istú, ako je tá, od ktorej sme ju disjungovali, čím by nám hodnoty splynuly, ich počet by sa zmenšoval a my by sme mohli postupne dôjsť až k dvojhodnotovosti. Teda troj- a viachodnotové logiky nevyhnutne požadujú dvojhodnotovú metalogiku, ktorou sú i sjednotené a logický pluralizmus je prekonaný.

Doteraz sme si všimali len jeden aspekt absolutizmu, ktorý nie je práve najhlavnejší.

Ak by bola logika absolutistická, patrily by do nej nielen jej vlastné výpovede, ale i mená týchto výpovedí a výpovede o menách a označeniach výpovedí, slovom, patrilo by do nej všetko, čo sa dá vyjadriť, a teda i to, „že sa ňou nedá všetko vyjadriť“. Taká logika vedie do antinomií. Známa je napr. antinomia luhára, z riešenia ktorej nasleduje, že to, čo hovoríme, a to, čím hovoríme, nemôže patriť do jedného celku.¹ Z toho nasleduje, že to, čo voláme logikou, je množstvo stále širších sústredných kruhov, z ktorých väčší môže vyjadriť vlastnosti menšieho, ale nie naopak. Väčšie bohatstvo širších okruhov sa dá interpretovať väčším množstvom hodnôt; logiky tým vzniklé sa však nemusia kryť s našimi n-hodnotovými logikami,² lebo logické požiadavky logik splyývajú s noetickými požiadavkami až v limite.

Konečne si všimnime niektoré veci, ktoré nám v úvode nemohly byť jasné. Je to relativnosť analytických viet. Pretože analytické vety plynú zo systému (sú vety, majúce hodnotu „1“, nech sa do nich dosadí čokoľvek, nech je hodnota prvkov akákoľvek), nielen že budú relatívne ako sám systém, ale majú smysel a tautologickosť len v systéme. V inom systéme nemusia byť tautologiou, ako sme to ukázali na príklade $(\bar{a} \supset C_1 a) \supset C_1 a$, ktorý nie je tautologiou, hoci $(\bar{a} \supset a) \supset a$ je analytickou složeninou. Preto tautologie nie sú, ako sa mylne nazdával Wittgenstein, „bezpodmienečne pravdivé“;³ ale pravdivé len v určitom systéme. No nielen tautologia, ale i každá složenina dostáva smysel len logikou, do ktorej patrí. Poznáme totiž složeniny, majúce rovnakú hodnotovú tabuľku, a predsa sú celkom rôzne. Napr. funkcia, majúca tabuľku „1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1“ sa v L_1 -logike dá vyjadriť složeninou $(a \supset \bar{b}) \supset (a \supset b)$ a v L_2 -logike inou složeninou $\bar{b} \supset C_3 (a \supset b)$. Preto ak složeninu vytrhneme z celku, berieme jej i logický význam.

¹ Pre nedostatok miesta si nemôžeme bližšie všimnúť problém antinomií. Porov. o nich napr. Whitehead - Russell, o. c. 60n

² Logicky teda z logického relativizmu bezprostredne nenásleduje 3-, 5-, n-hodnotová logika, ale k podobným logikám môžeme dôjsť

³ L. Wittgenstein, o. c. 96.

Aby naše úvahy o tautológii boli ucelené, musíme pár slovami spomenúť vzťah tautológií ku skutočnosti. Mnohí logici radi označujú tautologie za vety (složeniny), platné pred skúsenosťou a bez skúsenostného overenia a teda za vety, o skúsenosti nič nehovoriace. Taký pochop tautologie nielen že je veľmi nejasný,¹ ale je falošný a nevyhnutne by logiku vylúčil z vedeckého poznania. V skutočnosti však nám logiky predstavujú súhrn zákonov, pomocou ktorých a podľa ktorých hovoríme (myslíme) o veciach. No spôsob vyjadrenia sa a hovorenia o veciach musí mať nejaký vzťah k veciam. O logike aspoň to môžeme tvrdiť, čo Frege tvrdil o aritmetike. Aritmetiku užívame na „spracovanie pozorovaných daností... , preto zákony čísel nie sú... použiteľné na vonkajšie veci: nie sú prírodné zákony... , ale sú zákony prírodných zákonov“.² No zákony prírodných zákonov musia mať určitý vzťah k prírodným zákonom, ako zasa tieto k prírode. Z toho vysvitá, že tu panuje tranzitívny vzťah, podľa ktorého a ktorým logika a teda i tautologia hovorí niečo o skúsenosti a skutočnosti. Nehovorí však priamo, ale nepriamo, hovoriac o niečom inom, úzko spätom so skúsenosťou.³ Ak logika je nástrojom, čo sa týka jej vzťahu k realite, vážnu úlohu bude mať nie tautologia, ale priradovací princíp, ktorý, ak je pevný (presný) a nakoľko je pevný a rozvetvený, tak a nakoľko by tautologia vyjadrovala všeobecné zákony priradenej oblasti a zákony oblasti, priradenej k priradenej oblasti.

Aby logika, práve tak ako matematika, mala inštrumentálny charakter a teda k skutočnosti nejaký určitý vzťah, musíme svet, skutočnosť zoschematizovať, zjednodušiť a takú ju matematicky spracovať a logicky usporiadať. Tento svet schémy, ktorý je vlastne vedeckým svetom, je veľmi chudobný a je len „svetom tieňa“.⁴

Obmedzená logika sa môže síce aplikovať na poznanie sveta, ale veľká časť poznania sveta nám ostane v mimologickej sfére, t. j. ostane mimo schém. Preto sa usilujeme, aby naše logické a prírodovedecké schémy, mapy boli vždy bohatšie, aby sa viac a viac blížili ku skutočnosti, t. j. aby sa rozdiel medzi logickým poznaním a mimologickým jeho zvyškom stále zmenšoval a tak empiria aby sa nepria-

¹ „Ziemlich vage“, hovorí Tarski v diele *Über den Begriff der logischen Folgerung*, Actes de Congrès intern. d. ph. sc., Paris 1936, 11.

² G. Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, 2. vyd., Breslau 1934, 99.

³ Len tak má smysel tvrdiť, že logika nám preukazuje orientačnú službu vo svete empirických poznatkov a umožňuje nám ich systematizovať. Usporiadať niečo niečím predpokladá možnosť priradenia a odzrkadľovania jedného druhým, lebo úplnou disparátnosťou a heterogennosťou sa ničí každá možnosť orientácie jedným okruhom v druhom.

⁴ A. S. Eddington, *Das Weltbild der Physik*, Braunschweig 1939, 6.

mo, ale jednoznačne priradzovala poriadku myslenia. Inými slovami, musíme hľadať stále bohatšie logické systémy, čím stierame presné hranice medzi logickými a mimologickými výrazmi a rozdiel medzi analytickými, tautologickými a empirickými súdmi.

Mierou tohto sblížovania sa logika stáva menej relatívnou, preto Carnapov princíp tolerancie, hovoriaci, že „v logike nie je morálka a že každý si môže vystaviť svoju logiku, t. j. formu reči, ako chce...“¹, musíme pokladať len za čiastočne správny² a nahradiť ho zákonom o stále sa zmenšujúcej tolerancii logík. Cieľ, pravdaže, nikdy nedosiahnutý, by bol prechod všetkých syntetických súdov v analytické,³ t. j., aby sme sa presnejšie vyjadrili, aby všetky syntetické súdy našly jednoznačné priradenie v analytických súdoch. Na lepšie objasnenie zavádzame ďalšiu úvahu, ktorej sumárnosť a nedokonalosť si plne uvedomujeme.

Empirický a či syntetický výrok je taký, ktorý sa dá určiť len podmienenčne, ktorý, pretože by plynul z nekonečného (nepoznaného, neurčitého) počtu antecedentov, t. j. vyplynul by nekonečným radom, je neurčitý.⁴ Taký istý je i logický výrok v nekonečnehodnotovej logike. Preto sa nazdávame, že rozdiel medzi logickou a empirickou výpoveďou je len pri konečnehodnotových logikách. Môžeme ďalej myslieť, že v nekonečnehodnotovej logike by každý empirický výrok iste našiel jednoznačné zobrazenie.⁵ Keď však vstúpime do oblasti „našich nízkych“ logík, musíme mnoho možností nechať mimo logického systému, čím tvoríme opozíciu medzi logikou a ne-logikou. Dá sa ďalej myslieť, že táto opozícia je zapríčinená nedokonalosťou nášho poznania, čiže prázdnosťou alebo nepoznaním mnohých miest v nekonečných maticiach, ktoré (matice) sa tým stávajú nielen bezvýznamnými, ale i konečnými. Presné spracovanie týchto myšlienok je nadmieru namáhavé, lebo v oblastiach vysokohodnotových logík sa ťažko pracuje.

¹ R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, Wien 1934, 45.

² Vyhýba sa sice monizmu, ale upadol by do pluralizmu.

³ Mnohi tvrdia, uznávajúc len jednu logiku, že by sa potom celé poznanie zredukovalo na princíp totožnosti. Naše logiky sú len riadené princípom totožnosti, ktorý dáva systémom jednotu, ale pretože tých jednôt je viac, nedajú sa zredukovať na identitu.

⁴ Formuláciu berieme od Carnapa, tvrdiaceho, že pre nevyčerpatelnosť podmienok všetky fyzikálne výpovede nie sú úplne platné. Porov. I. Hrušovský, *Teória vedy*, Bratislava 1941, 57. No je to konečne mienka H. Poincarého, E. Meyersona a skoro všetkých teoretikov vedy.

⁵ Možno, že by ho našiel i v niektorej veľmi vysokohodnotovej, ale konečnehodnotovej logike.

Redukcia funkcií v mnohohodnotových logikách

Je všeobecne známe, že v dvojhodnotovom výpovednom kalkule postačíme s jedinou funkciou (neslučiteľnosť „|“). V troch a vo viac-hodnotových kalkuloch podobná redukcia nám nie je známa. Lukasiewicz na vyjadrenie všetkých funkcií trojhodnotovej logiky potrebuje tri základné funkcie; jednu dvojargumentovú, implikáciu (v našej štúdii je to „ C_1 “), a dve jednoargumentové funkcie, a to negáciu, definovanú ako „ $z a = 1 - a$ “, a novú funkciu $T(a)$, ktorú najľahšie definujeme jej maticou:¹

a	$T(a)$
1	?
?	?
0	?

E. Post, aby skonštruoval hociktorý n -hodnotový výpovedný kalkul, potreboval dve základné funkcie: disjunkciu (našu „ v_2 “) a cyklickú negáciu („ $\sim$ “). Hoci sme nemali prístup k Postovej štúdii,² predsa sa nám podarilo nielen zrekonštruovať celý jeho systém, ale i jeho dve funkcie zredukovať na jednu funkciu, ktorú nazveme mnohohodnotovou neslučiteľnosťou („|“) a ktorou môžeme vyjadriť všetky konečnehodnotové extenzionálne výpovedné kalkuly. Nemôžeme samozrejme tu rozoberať Postov systém, ukážeme len jeho zjednodušenie.

Najprv udáme maticu neslučiteľnosti, určíme jej zákon a potom ňou vyjadríme cyklickú Postovu negáciu a disjunkciu.

	1	?	0
1	?	?	?
?	?	0	0
0	?	0	1

Funkcia neslučiteľnosti sa teda bude riadiť zákonom: Ak prvky „ a “ a „ b “ majú rovnakú hodnotu, tak hodnota neslučiteľnosti bude o jeden stupeň nižšia ako hodnota prvkov (teda ak $a = 1$, $b = 1$, tak $a | b = ?$); ak však prvky majú krajnú dolnú hodnotu („ 0 “),

¹ J. Lukasiewicz, *Bedeutung der logischen Analyse für die Erkenntnis*, Actes de VIII congrès internat. de philos., Prague 1936, 84.

² E. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*, Am. Journ. of Math. XLIII, 1921, 163 n.

hodnota neslučiteľnosti bude „1“; ak prvky „a“ a „b“ nemajú rovnakú hodnotu, tak hodnota neslučiteľnosti sa rovná hodnote prvku s vyššou hodnotou, umenšenou o jeden stupeň (teda: $1 | ? = 1 | 0 = ?$; $? | 0 = 0$). Neslučiteľnosťou práve definovanou vyjadríme najprv cyklickú negáciu: $\sim a \equiv a | a$, čo ľahko vidieť z tabuliek

a	$\sim a$	a	a
1	?	?	
?	0	0	
0	1	1	

Disjunkciu vyjadríme teraz pomocou cyklicky negovanej neslučiteľnosti: $a \vee_2 b \equiv \sim^2(a | b)$, ako to vidieť z tabuliek:

a	b	a b	$\sim(a b)$	$\sim^2(a b)$	$a \vee_2 b$
1	1	?	0	1	1
1	?	?	0	1	1
1	0	?	0	1	1
?	1	?	0	1	1
?	?	0	1	?	?
?	0	0	1	?	?
0	1	?	0	1	1
0	?	0	1	?	?
0	0	1	?	0	0

Obmedzujeme sa len na trojhodnotovú logiku, ale čitateľ ľahko zistí, že v n-hodnotovej logike platí $a \vee_2 b \equiv \sim^{n-1}(a | b)$ atď. Aby sme vykonali úplnú redukciu, musíme i cyklickú negáciu v tautológii $a \vee b \equiv \sim^{n-1}(a | b)$ vyjadriť neslučiteľnosťou. Ľahko vidíme (plynie to z povahy neslučiteľnosti a negácie), že platí:
 $a \vee_2 b \equiv [(a | b) | (a | b)] | [(a | b) | (a | b)]$.

Podobne môžeme udať všeobecný zákon funkcií, v ktorom sa objavuje len funkcia neslučiteľnosti. To však znamená len prepracovať Postov systém.

(1948)